奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

初中数学竞赛中的组合问题

张垚 沈文选 吴仁芳／编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

高级教程系列

◎新编数学奥林匹克教程
◎新编物理奥林匹克教程
◎新编化学奥林匹克教程
◎新编生物奥林匹克教程
◎信息学奥赛易学通 C++
◎信息学奥赛易学通算法
◎信息学奥赛易学通数据结构
◎物理奥林匹克实验教程
◎化学奥林匹克实验教程
◎生物奥林匹克实验教程

分级精讲与测试系列

◎初一数学　◎初二数学
◎初三数学　◎初二物理
◎初三物理　◎初三化学
◎高一数学　◎高二数学
◎高一物理　◎高二物理
◎高一生物　◎高二生物
◎高一化学　◎高二化学

解题金钥匙系列

◎初中数学　◎高中数学
◎初中物理　◎高中物理
◎初中化学　◎高中化学
◎高中生物　◎高中信息学

专题研究系列

◎初中数学竞赛中的代数问题
◎初中数学竞赛中的几何问题
◎初中数学竞赛中的组合问题
◎初中数学竞赛中的数论问题
◎奥林匹克数学中的代数问题
◎奥林匹克数学中的几何问题
◎奥林匹克数学中的组合问题
◎奥林匹克数学中的数论问题
◎奥林匹克数学中的问题探究
◎奥林匹克数学中的真题分析

名师讲堂系列

◎小学数学竞赛中的秘密
◎初中数学竞赛中的秘密
◎高中数学竞赛中的秘密

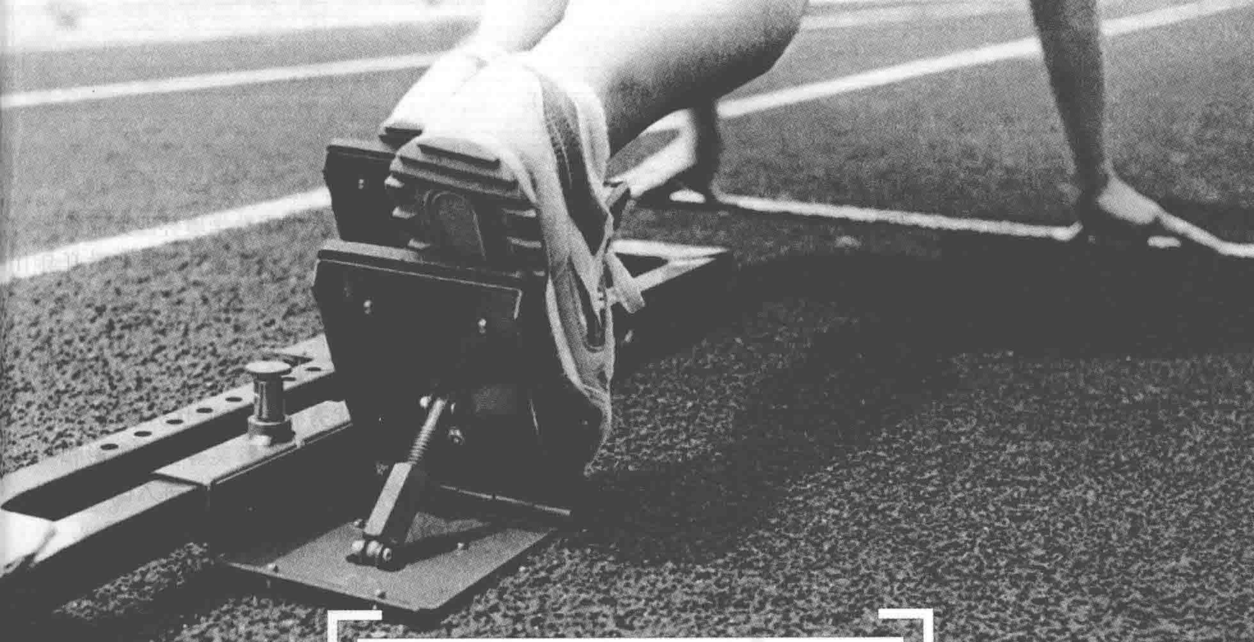
超级训练系列

◎初中数学
◎高中数学

⊙策划组稿　廖小刚
　　　　　　周基东
⊙责任编辑　廖小刚
　　　　　　周基东
⊙装帧设计　书亦有道

ISBN 978-7-5648-0357-5

定价：36.00元



奥赛经典

专题研究系列

初中数学竞赛中的组合问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

◇张　垚　沈文选　吴仁芳/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛中的组合问题 / 张垚，沈文选，吴仁芳编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2011.1

（奥赛经典丛书·专题研究系列）

ISBN 978-7-5648-0357-5

Ⅰ．①初…　Ⅱ．①张…②沈…③吴…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 240810 号

初中数学竞赛中的组合问题

张　垚　沈文选　吴仁芳　编著

◇策　　划：廖小刚　周基东

◇责任编辑：廖小刚　周基东

◇责任校对：蒋旭东

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731-88873070　88873071　传真/0731-88872636

网址/http：//press.hunnu.edu.cn

◇印刷：长沙超峰印刷有限公司

◇开本：787mm×1092mm　1/16 开

◇印张：13.25

◇字数：395 千字

◇版次：2011 年 1 月第 1 版　2020 年 8 月第 13 次印刷

◇书号：ISBN 978-7-5648-0357-5

◇定价：36.00 元

◆张　垚

男，1938年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，中国数学奥林匹克高级教练，湖南省数学奥林匹克主教练，美国《数学评论》评论员. 1987～1999年任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，负责全省数学竞赛的组织及培训工作，并主持了1989年全国初中数学联赛和1997年全国高中数学联赛的命题工作.

已出版图书《数学奥林匹克理论、方法、技巧》等20余部，发表学术论文80余篇. 从1992年起享受国务院颁发的政府特殊津贴. 曾荣获湖南省优秀教师，全国优秀教师，曾宪梓教育基金高等师范院校教师奖三等奖，湖南省教委科技进步奖二等奖等多项表彰和奖励. 所培训的学生有100余人进入全国中学生数学冬令营，其中有40余人进入国家集训队，14人进入国家队，在国际中学生数学竞赛(IMO)中，共夺得10枚金牌和3枚银牌.

◆沈文选

男，1948年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，硕士生导师，湖南师范大学数学奥林匹克研究所副所长，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究会理事长，全国高等师范院校数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省高师教育研究会理事长，湖南省数学会初等数学委员会副主任，湖南省数学奥林匹克培训的主要组织者与授课者，湖南师大附中、长沙市一中数学奥林匹克培训主要教练.

已出版著作《走进教育数学》、《单形论导引》、《矩阵的初等应用》、《中学数学思想方法》、《竞赛数学教程》等40余部，发表学术论文《奥林匹克数学研究与数学奥林匹克教育》等100余篇，发表初等数学研究、数学思想方法研究和数学奥林匹克研究等文章200余篇. 多年来为全国初、高中数学联赛，数学冬令营提供试题20余道，是1997年全国高中数学联赛，2002年全国初中数学联赛，2003年第18届数学冬令营命题组成员.

◆吴仁芳

男，1975年生，湖南师范大学数学与计算机科学学院讲师. 主要研究方向：数学教育、数学竞赛. 从2006年起负责湖南省数学奥林匹克组织和培训工作，为初、高中竞赛选手做了大量的培训工作.

已出版著作《奥赛经典·解题金钥匙初中数学》、《奥赛经典·解题金钥匙高中数学》、《奥赛经典·分级精讲与测试高一数学》、《新课程教学资源库·数学教学资料(1～3年级)》、《新课程教学资源库·数学教学资料(7年级)》、《中学几何研究》等，在国内外重要数学学术期刊发表学术论文10余篇.

奋发图强，力争上游，
为提高我国数学水平
而共同努力。

王梓坤敬书

▲王梓坤：中国科学院院士

湖南省中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届　次	获奖情况
第 28 届 (1987)	刘　雄(湖南湘阴一中)　金牌
第 32 届 (1991)	郭早阳(湖南师大附中)　银牌
第 34 届 (1993)	刘　炀(湖南师大附中)　金牌
第 35 届 (1994)	彭建波(湖南师大附中)　金牌
第 39 届 (1998)	艾颖华(湖南师大附中)进国家队 该届国家队未参赛
第 40 届 (1999)	孔文彬(湖南师大附中)　银牌
第 41 届 (2000)	刘志鹏(长沙市一中)　金牌
第 42 届 (2001)	张志强(长沙市一中)　金牌 余　君(湖南师大附中)　金牌
第 43 届 (2002)	肖　维(湖南师大附中)　金牌
第 44 届 (2003)	王　伟(湖南师大附中)　金牌 向　振(长沙市一中)　金牌
第 45 届 (2004)	李先颖(湖南师大附中)　金牌
第 48 届 (2007)	胡　涵(湖南师大附中)　银牌

前　言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动.多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,与其他高手切磋,培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等与日俱进.这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中.

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来,所取得的成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先水平.其中,截至2010年,湖南的学生已取得10块金牌、3块银牌的好成绩.这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望.为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系.为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,2003年,湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”.研究所组建一年后,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写了《奥赛经典·专题研究系列》,高中分几何、代数、组合、数论、真题分析五卷,初中分几何、代数、组合、数论四卷.这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可激发解竞赛题的直觉或灵感.从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动.

编　者

目 录

第一章　计数问题

§1　基础知识

1. 加法原理、乘法原理及计数公式

加法原理　假设完成一件事情的方法可分为几类(各类中的方法是互不相同的)，且第一类中有 m_1 种方法，第二类中有 m_2 种方法，…，第 n 类中有 m_n 种方法，那么完成这件事情一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法，这就是加法原理，简称为分类相加.

乘法原理　假设完成一件事情要分成几步，且第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事情一共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法，这就是乘法原理，简称为分步相乘.

例 1　将 27 分拆为 3 个质数之和(不考虑顺序)，共有________种不同的分拆方法.

解　设 $27=a+b+c$(a,b,c 是质数，$a\leqslant b\leqslant c$)，则 $27\geqslant 3a$，$a\leqslant 9$，故 a 只可能等于 2,3,5 或 7.

(1)当 $a=2$ 时，$b+c=25$，只有 1 个解：$(b,c)=(2,23)$；

(2)当 $a=3$ 时，$b+c=24$，共有 3 个解：$(b,c)=(5,19)$，$(7,17)$和$(11,13)$；

(3)当 $a=5$ 时，$b+c=22$，共有 2 个解：$(b,c)=(5,17)$和$(11,11)$；

(4)当 $a=7$ 时，$b+c=20$，只有 1 个解：$(b,c)=(7,13)$.

综上，由加法原理，一共有 $1+3+2+1=7$ 种不同的分拆方法.

例 2　在平面直角坐标系中，以原点为中心$\sqrt{6}$为半径的圆的内部共有多少个格点?(格点指的横坐标和纵坐标都为整数的点)

解　设 $A(x,y)$是任意满足题目要求的一个格点，则$|OA|=\sqrt{x^2+y^2}<(\sqrt{6})^2$，于是，可把这个问题分为 6 类情形：$x^2+y^2=k$，$k=0,1,2,3,4,5$.

当 $x^2+y^2=0$ 时，$(x,y)=(0,0)$，只有 1 个解；

当 $x^2+y^2=1$ 时，$(x,y)=(-1,0)$，$(1,0)$，$(0,-1)$，$(0,1)$，共有 4 个解；

当 $x^2+y^2=2$ 时，$(x,y)=(-1,1)$，$(1,1)$，$(1,-1)$，$(-1,-1)$，共有 4 个解；

当 $x^2+y^2=3$ 时，没有解；

当 $x^2+y^2=4$ 时，$(x,y)=(-2,0)$，$(2,0)$，$(0,-2)$，$(0,2)$，共有 4 个解；

当 $x^2+y^2=5$ 时,$(x,y)=(-2,-1),(-2,1),(-1,-2),(-1,2),(2,-1),(2,1),(1,-2),(1,2)$,共有 8 个解.

综上,由加法原理,满足题目要求的格点共有 $1+4+4+0+4+8=21$(个).

例 3 360 可以被多少个不同的正整数整除(包括 1 和 360 在内)?

解 因 $360=2^3\times3^2\times5$,故 360 的正约数有 $2^a\times3^b\times5^c$ 的形式,其中 a,b,c 均为非负整数且 $0\leqslant a\leqslant3$,$0\leqslant b\leqslant2$,$0\leqslant c\leqslant1$,因 a 可以取 0,1,2,3,a 有 4 种取法,b 可以取 0,1,2,b 有 3 种取法,c 可以取 0,1,c 有 2 种取法,故由乘法原理知 360 共有 $4\times3\times2=24$ 个正约数,即 360 可被 24 个不同的正整数整除.

注 一般地,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是互不相同的质数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 都是正整数,那么 n 的正约数共有 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ 个.

例 4 利用 1,2,3,4,5,6 共可组成

(1)多少个数字不重复的三位数?

(2)多少个数字不重复的三位偶数?

(3)多少个数字不重复的 4 的倍数?

解 (1)个位数可取 1,2,3,4,5,6 中任意一个,有 6 种选择;十位数可取不同于个位数的任何一个数,有 5 种选择;百位数可取不同于个位数也不同于十位数的任何一个数,有 4 种选择,由乘法原理知共有 $6\times5\times4=120$ 个数字不重复的三位数.

(2)个位数只能有 3 种选择:2 或 4 或 6;在个位数取完后,十位数还有 5 种选择;百位数还有 4 种选择,所以共有 $4\times5\times3=60$ 个数字不重复的三位偶数.

(3)因为 4 的倍数必须是其十位和个位组成的两位数是 4 的倍数,分为下列 6 种情况:

一位 4 的倍数,只有 1 个:4;

二位 4 的倍数,共有 8 个:12,16,24,32,36,52,56,64;

三位 4 的倍数有 $4\times8=32$ 个,其中 8 表示由十位数和个位数组成的两位数有 8 种取法,4 表示百位数可取不同于十位数和个位数的其他 4 个数字中的任何一个;

四位 4 的倍数有 $3\times32=96$ 个,其中 32 表示由百位数、十位数和个位数组成的三位数有 32 个,3 表示千位数可取除个位数、十位数和百位数外,其他 3 个数字中的任何一个.

类似地,可得五位 4 的倍数有 $2\times96=192$ 个,六位 4 的倍数有 $1\times192=192$ 个.

综上,由加法原理得满足题意的 4 的倍数共有 $1+8+32+96+192+192=521$(个).

注 一般地,从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素按照一定的次序排成一列,称为从 n 个元素中取 m 个元素的一个排列,从 n 个元素中取 m 个元素的所有排列

的个数记为 A_n^m，则由乘法原理可得 $A_n^m=n(n-1)\cdots[n-(m-1)]=\dfrac{n!}{(n-m)!}$， ①

这里 $n!$ 是 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$ 的缩写，读做 n 的阶乘，并约定 $0!=1$.

特别，将 n 个不同元素按照一定的次序排成一列，称为 n 个元素的一个全排列，n 个元素的所有全排列的个数记为 A_n^n，则

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!. \quad ②$$

例 5 (1)从 10 本不同的书中取 3 本书，分别送给 3 位朋友，每人恰好一本，共有多少种不同的方法？

(2)从 10 本不同的书中任取 3 本书送给 1 位朋友，共有多少种不同的方法？

解 (1)从 10 本书中取 1 本送给第一位朋友有 10 种选择，再从余下 9 本书中取 1 本送给第二位朋友，有 9 种选择，最后从余下的 8 本书中取 1 本书送给第三位朋友有 8 种选择，故由乘法原理知，不同的送书方法共有 $A_{10}^3=10\times9\times8=720$(种).

(2)同(1)，我们知道从 10 本书中依次取出 3 本书(每次取一本书)共有 $A_{10}^3=10\times9\times8$ 种取法. 当取出的 3 本书是 A,B,C 时，它们取出的次序都有下列 $A_3^3=3\times2\times1=6$ 种不同的顺序：ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA. 而将它们送给一位朋友是相同的情况，故不同的送书方法共有 $\dfrac{A_{10}^3}{A_3^3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$(种).

注 一般地，从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，不论顺序如何并成一组，称为从 n 个元素中取 m 个元素的一个组合，从 n 个元素中取 m 个元素的所有组合的个数记为 C_n^m.

因为从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的排列个数等于 A_n^m，而我们可用另一种方法来计算这个排列个数：首先从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素(不论顺序)有 C_n^m 种方法，再将取出的 m 个元素排成一列有 A_m^m 种方法，故由乘法原理知所求排列数又等于 $C_n^m\cdot A_n^m$，于是 $C_n^m\cdot A_m^m=A_n^m$，即

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots2\cdot1}{1\cdot2\cdots m}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}. \quad ③$$

例 6 (1)6 本书分给 2 个人，每人 3 本，有多少种不同的分法？

(2)6 本书分成 2 堆，每堆 3 本，有多少种不同的分法？

(3)6 本书分成 3 堆，每堆的书本数分别是 3,2,1，有多少种不同的分法？

(4)6 本书分成 3 堆，每堆 2 本，有多少种不同的分法？

解 (1)从 6 本书中取 3 本书给一个人有 C_6^3 种取法，余下 3 本给另一个人有 C_3^3 种取法，由乘法原理知，共有 $C_6^3\cdot C_3^3=\dfrac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\cdot\dfrac{3\times2\times1}{1\times2\times3}=20$(种)不同的分法.

(2)因为取 3 本书 A,B,C 作一堆，余下 3 本书 D,E,F 作另一堆与取 A,B,C 作一

堆是同一种分堆情况，故所求方法数为$\frac{C_6^3\cdot C_3^3}{A_2^2}=\frac{20}{1\times2}=10$(种).

(3)所求方法数为$C_6^3C_3^2C_1^1=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\cdot\frac{3\times2}{1\times2}\cdot1=60$种.

(4)类似于(2)，此时3堆没有区别，所求方法数为$\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}=(\frac{6\times5}{1\times2}\cdot\frac{4\times3}{1\times2}\cdot\frac{2\times1}{1\times2})\div(1\times2\times3)=15$(种).

例7 20人分为2组，每组10人，并且每组选出正、副组长各一人，共有多少种不同的方法?

解 同例6(2)知20人分为2组，每组10人的方法数为$\frac{C_{20}^{10}C_{10}^{10}}{A_2^2}=(\frac{20!}{10!\ 10!}\cdot\frac{10!}{10!\ 0!})\div2!\ =\frac{1}{2}[\frac{20!}{(10!)^2}]$(种)，再从一组10人中选出正、副组长各一人有$A_{10}^2=10\times9=90$(种)方法，最后从另一组10人中选出正、副组长各一人也有$A_{10}^2=10\times9=90$(种)方法，故由乘法原理得所求方法数为$\frac{1}{2}[\frac{20!}{(10!)^2}]\times90\times90=4050\cdot[\frac{20!}{(10!)^2}]$(种).

2. 容斥原理

为了介绍容斥原理的内容，我们先介绍有关集合的一些基本概念.

集合是数学中的一个基本概念，通常将具有某种性质的对象的全体称为集合，对象称为集合中的元素，同一集合中的任意2个元素是互不相同的. 只含有限个元素的集合叫做有限集，不含任何元素的集合叫做空集，记为$\varnothing$，含有无穷多个元素的集合叫做无限集.

具有性质p的对象全体组成的集合记为$A=\{x|x$具有性质$p\}$. 判断一个对象x'是否属于A，等价于证明x'是否具有性质p. 若A中的所有元素都属于B，则称A是B的一个子集，记为$A\subseteq B$；若$A\subseteq B$，且B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的一个真子集，记为$A\subsetneqq B$；约定空集$\varnothing$是任何集合的子集. 若x是A中元素，则记为$x\in A$，若x不是A中元素，则记为$x\notin A$.

任意两个集合A与B的交集$A\cap B$，并集$A\cup B$的定义如下:

$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$，$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$.

设$A\subseteq I$，则A在I中的补集$\overline{A}$(有的书上记为$\complement_I A$)定义为$\overline{A}=\{x|x\in I$且$x\notin A\}$.

容斥原理是解决计数问题常用的一个原理，我们先通过一个例子来介绍容斥原理的内容.

例8 从1到100的正整数中能被3整除或能被5整除的正整数共有多少个?

解 设A,B分别表示从1到100的正整数中能被3,5整除的数集，即

$A=\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 100, 3 \mid a\}$, $B=\{b \mid 1 \leqslant b \leqslant 100, 5 \mid b\}$,

而用$|A|$,$|B|$分别表示A,B中的数的个数,于是$|A|=[\frac{100}{3}]=33$,$|B|=[\frac{100}{5}]=20$,这里$[\alpha]$表示不超过α的最大整数,例如$[3.15]=3$,$[\sqrt{2}]=1$,并且$[\alpha]$满足$\alpha-1<[\alpha] \leqslant \alpha$.

A与B的并集$A \cup B$表示从1到100的正整数中能被3或5整除的数的集合,而A与B的交集$A \cap B$表示1到100的正整数中既能被3整除又能被5整除的数的集合.因3与5互质,故$A \cap B$为从1到100的正整数中能被$3 \times 5=15$整除的数的集合,于是$A \cap B$中数的个数为$|A \cap B|=[\frac{100}{3 \times 5}]=6$.

从图1-1可以看出,$A \cup B$中数的个数为

$$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|=33+20-6=47. \quad ④$$

上式中之所以要减去$|A \cap B|$,原因是在计算$|A|$(被3整除的数的个数)及计算$|B|$(被5整除的数的个数)时,都计算了$A \cap B$中的数(被15整除的数)的个数$|A \cap B|$,这就重复计算了一次,故应减去.

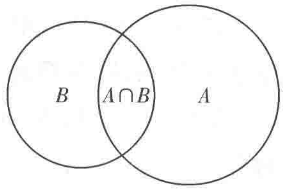


图1-1

因此,本题的结论是:从1到100的正整数中能被3或5的整除的数的个数是47.

我们将④式抽去其具体内容,便得到下列原理:

容斥原理Ⅰ 设A,B是两个有限集合,那么$|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$. ⑤

注意:记号$|M|$表示集合M中元素的个数(不要与数的绝对值混淆,有的书上也用记号Crad$M$表示集合M中元素的个数),记号$A \cup B$表示集合A与集合B的并集,即由集合A和集合B的全部元素(A与B中相同的元素只取1个)组成的集合,而记号$A \cap B$表示集合A与集合B的交集,即由集合A与集合B的公共部分的元素组成的集合.

关于3个有限集合的容斥原理Ⅰ为

$$|A \cup B \cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A \cap B|+|B \cap C|+|C \cap A|)+|A \cap B \cap C|. \quad ⑥$$

证明 如图1-2,要计算$|A \cup B \cup C|$,先计算$|A|+|B|+|C|$,其中$|A \cap B|$,$|B \cap C|$,$|C \cap A|$都重复计算了一次,必须减去,得到$|A|+|B|+|C|-(|A \cap B|+|B \cap C|+|C \cap A|)$,这样一来,$|A \cap B \cap C|$却一次也没有计算在内,所以又必须加上,于是得到要证的公式⑥.

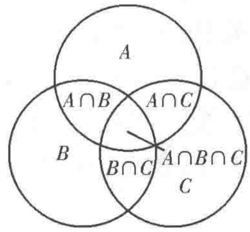


图1-2

容斥原理Ⅰ的一般形式是:设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个有限集合,那么

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \quad ⑦$$

其中$\sum_{i=1}^{n}|A_i|$表示$A_1,\cdots,A_n$中每个集合的元素个数之和，$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$表示$A_1,A_2,\cdots,A_n$中每2个集合的交集的元素个数之和，$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$表示$A_1,\cdots,A_n$中每3个集合的交集的元素个数之和，…，$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$表示$n$个集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交集的元素的个数.(证明略)

例9 某年级语文、数学、英语三门课程，期中考试成绩统计如下：至少一门课上90分的有200人，语文上90分的有122人，数学上90分的有82人，英语上90分的有90人，语文与数学两科上90分的有48人，数学与英语两科上90分的有28人，英语与语文两科上90分的有23人，问语文、数学和英语三科都上90分的有几人?

解 设A_1,A_2,A_3分别表示语文、数学、英语上90分的学生组成的集合，由容斥原理Ⅰ得$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cup A_2\cup A_3|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_3\cap A_1|)=200-(122+82+90)+(48+28+23)=5$，即三科都上90分的有5人.

例10 求从1到100的正整数中既不被3整除又不被5整除的正整数的个数.

解 设$\overline{A}$表示从1到100的正整数中不被3整除的数的集合，$\overline{B}$表示从1到100的正整数中不被5整除的数的集合，而I表示从1到100的正整数集合，由例8知从1到100的正整数中能被3或5整除的正整数的个数为$|A\cup B|=47$. 于是$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|I|-|A\cup B|=100-47=53$，即从1到100的正整数中既不被3整除又不被5整除的数的个数是53.

抽去上式的具体内容，便得到下列：

容斥原理Ⅱ 设A,B是有限集I的两个子集，A,B关于I的补集分别记为$\overline{A},\overline{B}$，那么$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|I|-|A\cup B|=|I|-(|A|+|B|)+|A\cap B|$. ⑧

容斥原理Ⅱ的一般形式为：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是有限集合I的子集，$A_1,A_2,\cdots,A_n$关于I的补集分别为$\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$，则

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=|I|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \quad ⑨$$

(证明略).

例11 某班期中考试结束后，语文、数学、英语获得90分以上的学生人数分别是