高等院校信息类新专业规划教材
机器人和人工智能技术丛书

机器人机构运动学

KINEMATICS OF ROBOT MECHANISM

张 英 ◎ 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等院校信息类新专业规划教材
机器人和人工智能技术丛书

机器人机构运动学

张　英　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书共分为12章，内容主要涉及机器人机构运动学的几何建模和代数解法。书中主要介绍了非线性多项式方程组代数求解的结式消元法(如Sylvester结式、Bézout-Cayley结式、Dixon结式等)、吴消元法、Gröbner基消元法和其他代数消元法以及机器人机构运动学的几何建模方法：刚体位姿描述和齐次变换、四元数、对偶矩阵、对偶四元数、倍四元数和几何代数(特别地，共形几何代数)。本书首次提出了基于共形几何代数的并联机器人机构正运动学分析方法以及基于分组分次逆字典序的Gröbner基消元法。最后，通过几个典型机器人机构实例来说明上述几何建模和代数求解法的实用性和有效性。

本书可作为机械工程专业或从事机器人研究的硕、博研究生和工程师的选读教材。

图书在版编目(CIP)数据

机器人机构运动学 / 张英编著. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2020.8

ISBN 978-7-5635-6177-3

Ⅰ. ①机… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①机器人机构—机构运动分析 Ⅳ. ①TP24

中国版本图书馆CIP数据核字（2020）第139491号

策划编辑：姚 顺 刘纳新 **责任编辑**：刘春棠 **封面设计**：柏拉图

出版发行：北京邮电大学出版社
社 址：北京市海淀区西土城路10号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185 传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经 销：各地新华书店
印 刷：
开 本：787 mm×1 092 mm 1/16
印 张：15
字 数：367千字
版 次：2020年8月第1版
印 次：2020年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-6177-3 定价：48.00元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

机器人和人工智能技术丛书

前　言

机构学是一门十分古老的科学，机器人学的兴起给传统机构学带来了新的活力，机器人机构学已逐渐演变成为机构学领域的一个重要分支。20 世纪中叶以来，由于计算机技术和计算数学的发展，美国著名机构学者弗洛丹斯坦教授提出了基于计算机的计算运动学理论与方法，开创了现代计算运动学。现代计算运动学主要包括机器人机构运动学的建模和求解两方面的研究内容。

根据“中国制造 2025”行动纲领，机器人领域将作为大力推动的重点领域之一。目前我国在机器人机构学方向已经出版了很多优秀专著或教材，涵盖了关于机器人机构的运动学分析、型综合分析、动力学分析和控制技术等多个方面，但是关于运动学分析方面的书籍通常只针对常用串联工业操作手，对于并联工业操作手，这方面的专著和教材还较少见。

一方面，现有专著或教材中介绍的机器人机构运动学的几何建模方法较单一，通常只介绍常用的 D-H 建模方法以及 POE(指数积)方法，不利于将现代数学方法引入机器人机构学中。目前，已有部分专著或教材中引入了旋量理论和李群李代数等现代数学工具，但是对于几何代数(Clifford 代数)这一新兴数学工具还未引入。本书将对偶矩阵法、对偶四元数法、倍四元数法和共形几何代数法(CGA)等现代数学工具(这些方法都属于几何代数)引入机器人机构运动学的几何建模中，这些现代数学工具已被本书作者及其课题组证明其实用性和有效性，如基于倍四元数法解决了可重构模块化机器人位置统一逆解建模及通用算法研究，以及首次基于 CGA 对一类并联机构的正运动学问题提出了一种脱离坐标系的几何建模和免消元计算方法。

另一方面，现有专著或教材关于机器人机构运动学的求解方法也没有系统介绍，尤其是代数求解法。我们知道，机器人机构运动学的问题通常最终转化为对一组非线性多项式方程组的求解。非线性方程组的求解方法主要包括数值解法和代数解法(封闭解法)。常用的数值解法主要有数值迭代法和同伦连续法。数值迭代法需要选择合适的初值，且往往只能得到一组解；同伦连续法在求解方程组时不需要预先给出合适的初值就能使方程组在大范围内收敛，并且能可靠地求出多项式方程组的全部解，其难点在于对构造初始方程组的要求比较高，按照一般方法构造初始方程组可能引起同伦方程组发散解过多，使计算效率显著降低。非线性方程组的代数解法是使用各种消元方法通过符号运算的方式将非线性方程组中的所有中间变量消去，推导出一个只含有输入量(已知量)和输出变量的一元高次方程。求解该方程得到变量的全部根，然后对应此变量求出一系列的中间变量(被消去的变量)。在该过程中，只要保证各个步骤都是同解变换，就能够保证得出全部的解，而且不产生增根。代数求解法虽然过程较为复杂，有一定的难度，但是可以解出全部解，而且不需要初始值。另外，代数解法不仅可以提供机构的几何特征和运动特性，并且单变量的一元高次方程对于

运动学的其他方面如工作空间分析、奇异位置分析等都有很大的理论价值。因此，机器人机构运动学的代数求解法在机器人机构运动学方向仍然是重要的。

本书将重点介绍机器人机构运动学常用的几何建模和代数解法，以期能够填补机器人机构运动学这方面的空白。本书围绕机器人机构的运动学几何建模和代数求解问题，分为3部分。第1部分是关于非线性多项式方程组的代数解法，包括第1～4章，分别介绍了结式消元法、吴消元法、Gröbner基消元法以及其他代数消元法；第2部分是关于机器人机构运动学的几何建模，包括第5～9章，分别介绍了刚体的位姿描述和齐次变换、四元数、对偶代数、倍四元数和几何代数；第3部分是基于上述几何建模和代数求解方法解决典型机器人机构(串联机械手和Stewart并联机构等)的正逆运动学问题，包括第10～12章。

本书是在北京邮电大学机械工程专业研究生专业必修课(数学机械化)授课讲义和作者及其课题组多年来的研究成果基础上编写而成的。书中部分内容于2000—2019年已先后在课堂上讲授过近20次，分别由本书作者及其博士生导师廖启征教授讲授。本书的部分研究成果来源于国家自然基金的资助和支持。

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者和专家批评指正。

张　英
于北京邮电大学

目　　录

第 1 章　结式消元法

结式概念是 20 世纪初由 Burside 和 Panton 首先提出的，源于对多项式消元方法的研究。基于结式的消去理论是构造性代数中经典消去理论之一，并在现代计算机代数与几何中有广泛应用。其思想及其发展归功于诸多代数学家，包括贝佐（Bézout）、凯莱（Cayley）、西尔维斯特（Sylvester）和狄克逊（Dixon）等。

结式消元法的原理是：从给定的方程组构造出一具有足够多个方程的导出方程组，然后把这个导出方程组看作诸个未知元各不同幂积的线性方程组，从而利用已得到充分发展的、丰富的"线性方法"来研究原来的非线性方程组。所谓的结式，就是一个多项式，由原多项式系统的系数所构成，它等于零的必要条件是原多项式系统存在公共零点。正因为如此，结式方法的优异，除了它的快速消元能力之外，还在于它能判定一个多项式系统是否有解。有了这个工具，我们就可以在求解之前先判定这个多项式系统是否有解，而不会碰到经过数天的计算之后，结果无解的情况出现。正因为它有着如此好的性质，我们就需要知道如何求得结式。

本章主要介绍 Sylvester 结式、Bézout-Cayley 结式和 Dixon 结式的构造方法，并介绍用矩阵广义特征值方法展开结式并求解。最简单的结式是线性代数中的行列式，通过系数矩阵的行列式可以判别一个线性方程组是否有解。

1.1　Sylvester 结式

经典的 Sylvester 结式方法是对单变元的两个多项式的系统进行消元。它的构造方法如下。

给定任一数域$\mathbb{K}$，对于$\mathbb{K}[x]$中次数分别为 m 和 n（$m \geqslant n > 0$）的两个多项式：

$$\begin{cases} f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 \\ g(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

分别将 $f(x)$和 $g(x)$乘以单项式（$x^{n-1}, \cdots, x, 1$）和（$x^{m-1}, \cdots, x, 1$），可以得到一个多项式系统：

$$
\begin{aligned}
x^{n-1}f(x) &= a_m x^{m+n-1} + a_{m-1}x^{m+n-2} + \cdots + a_0 x^{n-1} \\
&\vdots \\
xf(x) &= a_m x^{m+1} + a_{m-1}x^{m} + \cdots + a_0 x \\
f(x) &= a_m x^{m} + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 \\
x^{m-1}g(x) &= b_n x^{m+n-1} + b_{n-1}x^{m+n-2} + \cdots + b_0 x^{m-1} \\
&\vdots \\
xg(x) &= b_n x^{n+1} + b_{n-1}x^{n} + \cdots + b_0 x \\
g(x) &= b_n x^{n} + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0
\end{aligned}
$$

这个系统写成矩阵形式为

$$
\begin{pmatrix} x^{n-1}f(x) \\ \vdots \\ xf(x) \\ f(x) \\ x^{m-1}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{m+n-1} \\ x^{m+n-2} \\ x^{m+n-3} \\ \vdots \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}
$$

其 $m+n$ 阶的系数方阵表示如下：

$$
\mathrm{Syl}(f,g,x) = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m\text{ 行} \end{array} \tag{1.3}
$$

其中，空白处的元素都为 0（对后面遇到的类似情形，不再特别加以说明）。

定义 1.1.1 称该方阵 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$[①]为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 x 的 Sylvester 结式矩阵。称 Sylvester 矩阵 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 的行列式为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 x 的 Sylvester 结式，记作 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|$ 或 $\mathrm{res}(f,g,x)$。

关于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Sylvester 结式 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|$ 有一个著名的定理。

定理 1.1.1 存在两个次数分别满足 $\deg(p(x),x)<n$，$\deg(q(x),x)<m$ 的多项式 $p(x)$，$q(x)\in\mathbb{K}[x]$，使得

① 有的文献记 $\mathrm{Syl}(f,g,x)$ 的转置矩阵 $\mathrm{Syl}(f,g,x)^{\mathrm{T}}$ 为其 Sylvester 矩阵。

$$p(x)f(x)+q(x)g(x)=|\mathrm{Syl}(f,g,x)|$$

证明:不妨假设 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|\neq 0$,否则结论显然。记 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Sylvester 矩阵为 $\boldsymbol{S}$,则根据式(1.2)有

$$\boldsymbol{S}\begin{pmatrix} x^{m+n-1} \\ x^{m+n-2} \\ x^{m+n-3} \\ \vdots \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{n-1}f(x) \\ \vdots \\ xf(x) \\ f(x) \\ x^{m-1}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

将上式看作以 $x^{m+n-1},x^{m+n-2},\cdots,x,1$ 为变元的线性方程组,并用 Cramer 法则对最后一个变元 $x^0=1$ 求解得

$$\det(\boldsymbol{S})=\det\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & x^{n-1}f(x) \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 & a_0 & x^{n-2}f(x) \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots \quad a_1 & f(x) \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & x^{m-1}g(x) \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & x^{m-2}g(x) \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots \quad b_1 & g(x) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

将右端的行列式按最后一列展开,再把含有 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的项合并,并注意其中 x 的次数即可。

定理 1.1.2　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 如式(1.1)所示,则 $|\mathrm{Syl}(f,g,x)|=0$ 当且仅当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 x 有公共零点,或者 $a_m=b_n=0$。即只要 a_m 或 b_n 中有一个不为 0,$|\mathrm{Syl}(f,g,x)|=0$ 就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 x 有公共零点的充要条件。

通常可利用 Sylvester 结式来讨论两个多项式的公共零点,以便最终将其归结为一元高次多项式方程的求根问题。

1.2　Bézout-Cayley 结式

我们在上一节中介绍了一元 Sylvester 结式。这里将一元结式的另一构造描述如下。该构造由 É. Bézout 和 A. Cayley 首先给出,后来 Dixon 将 A. Cayley 的构造方法推广到二元情形。

1.2.1 Bézout-Cayley 结式的 Bézout 构造法

首先给出 Bézout-Cayley 结式的 É. Bézout 构造方法。首先在 $m=n$ 的情况下讨论，将 $f(x)$ 和 $g(x)$ 重写为

$$\begin{aligned} f(x)&=f_{i1}(x)x^i+f_{i2}(x) \\ g(x)&=g_{i1}(x)x^i+g_{i2}(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中，

$$f_{i1}(x)=a_n x^{n-i}+a_{n-1}x^{n-1-i}+\cdots+a_i,\quad f_{i2}(x)=a_{i-1}x^{i-1}+a_{i-2}x^{i-2}+\cdots+a_0$$

$$g_{i1}(x)=b_n x^{n-i}+b_{n-1}x^{n-1-i}+\cdots+b_i,\quad g_{i2}(x)=b_{i-1}x^{i-1}+b_{i-2}x^{i-2}+\cdots+b_0$$

易见，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共零点肯定是多项式

$$p_i(x)=\begin{vmatrix} f_{i1}(x) & f_{i2}(x) \\ g_{i1}(x) & g_{i2}(x) \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x^{n-j} \tag{1.6}$$

的根，因为

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(x) & f_{i2}(x) \\ g_{i1}(x) & g_{i2}(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_{i1}(x) & f_{i1}(x)x^i+f_{i2}(x) \\ g_{i1}(x) & g_{i1}(x)x^i+g_{i2}(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_{i1}(x) & f(x) \\ g_{i1}(x) & g(x) \end{vmatrix}$$

因此，n 个多项式

$$p_{n-i+1}(x)=\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x^{n-j},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.7}$$

的系数矩阵为

$$\mathrm{Bez}(f,g)=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

而 $\mathrm{Bez}(f,g)$ 的行列式就是我们所求的 Bézout-Cayley 结式。

当 $m>n$ 时，我们只需要考虑多项式 $f(x)$ 和 $x^{m-n}g(x)$。这两个多项式的次数相等。用上述方法可以构造出 n 个多项式：

$$p_i(x)=\sum_{j=1}^{m} d_{ij}x^{m-j},\qquad i=m-n,\cdots,m \tag{1.9}$$

并且不用另外的 $m-n$ 个多项式：

$$p_k(x)=f_{k2}(x)g(x),\quad k=1,\cdots,m-n$$

而用如下 $m-n$ 个多项式：

$$q_k(x)=x^k g(x),\quad k=0,1,\cdots,m-n-1$$

代替它和式(1.9)中的多项式一起组成 m 个多项式，这 m 个多项式的系数矩阵称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Bézout 矩阵，记作 $\mathrm{Bez}(f,g)$。其行列式就是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的结式。

1.2.2 Bézout-Cayley 结式的 Cayley 构造法

接下来给出 A. Cayley 构造 Bézout-Cayley 结式的方法。

考虑两个一元多项式 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$，其关于 x 的次数分别为 m 和 n，这里假定 $m \geqslant n > 0$。设 α 是一个新变元，则行列式

$$\Delta(x,\alpha) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(\alpha) & g(\alpha) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{m} (f(x)b_i - g(x)a_i)\alpha^i$$

是关于变元 x 和 α 的多项式，并且当 $x=\alpha$ 时 $\Delta(x,\alpha)=0$，这意味着 $x-\alpha$ 是 $\Delta(x,\alpha)$ 的因子。这样，多项式

$$\delta(x,\alpha) = \frac{\Delta(x,\alpha)}{x-\alpha} = \sum_{u=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{m-1} B_{u,v}x^u\alpha^v \tag{1.10}$$

就是一个关于变元 α 的 $m-1$ 次多项式，并且关于 x 和 α 是对称的。可以把多项式 $\delta(x,\alpha)$ 写为

$$\delta(x,\alpha) = B_0(x) + B_1(x)\alpha + \cdots + B_{m-1}(x)\alpha^{m-1}$$

其中，$B_i(x)$ 是关于变元 x 的多项式且次数小于或等于 $m-1$。

上述多项式可表示成如下的矩阵形式：

$$\delta(x,\alpha) = (1 \cdots x^{m-1})\mathrm{Bez}(f,g)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \alpha^{m-1} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

由于对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任意公共零点 x_0，无论 α 取值如何，$\delta(x_0,\alpha)=0$ 都成立，所以在 $x=x_0$ 处，多项式 $\delta(x,\alpha)$ 关于变元 α 的各阶幂积的系数都等于 0，即

$$\{B_0(x_0)=0, \cdots, B_{m-1}(x_0)=0\}$$

一般的，多项式的任一公共零点必然是多项式方程组

$$\{B_0(x)=0, \cdots, B_{m-1}(x)=0\} \tag{1.12}$$

的解。我们把这个方程组看作是 x 的各不同幂积 $x^{m-1}, x^{m-2}, \cdots, x, x^0=1$ 的齐次线性方程组（m 个方程 m 个变元）。如有解则必然是非零解（因 $x^0=1$）。故其系数矩阵 $\mathrm{Bez}(f,g)$ 的行列式为 0 时，式中的方程有公共解。系数矩阵 $\mathrm{Bez}(f,g)$ 是一个 m 阶方阵，称为 Bézout 矩阵。该 m 阶方阵的行列式为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 关于 x 的 Bézout-Cayley 结式，记作 $|\mathrm{Bez}(f,g)|$。它与前节中定义的 Sylvester 结式在 $m=n$ 时恒相同，而在 $m>n$ 时相差一个多余因子 $(a_m)^{m-n}$。

从上面的讨论可知，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的每个公共零点都是方程组的解。因此，$|\mathrm{Bez}(f,g)|=0$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公共零点的一个必要条件。

注意：Sylvester 结式矩阵的非零元素仅仅是两个多项式方程组的系数，而 Bézout-Cayley 结式矩阵的元素则要复杂得多，它们是由这些系数构成的表达式。于是，如何快速构造 Bézout-Cayley 结式矩阵就是一个需要研究的问题。

1.3　Dixon 结式

1.3.1　Dixon 结式的构造

1908 年，Dixon 将 Cayley 构造 Bézout-Cayley 结式的方法推广到三个二元多项式的情

形。三个多项式是关于变元 x 和 y 的双次数为(m,n)的多项式，$f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_{i,j}x^iy^j$，$g(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}b_{i,j}x^iy^j$ 和 $h(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{i,j}x^iy^j$。这里，双次数是指多项式 $f(x,y)$，$g(x,y)$，$h(x,y)\in\mathbb{K}[x]$关于 x 和 y 的全次数为 $m+n$，但关于 x 的次数仅为 m，关于 y 的次数仅为 n。让我们来考虑这一情形。显而易见，行列式

$$\Delta(x,y,\alpha,\beta)=\begin{vmatrix} f(x,y) & g(x,y) & h(x,y) \\ f(\alpha,y) & g(\alpha,y) & h(\alpha,y) \\ f(\alpha,\beta) & g(\alpha,\beta) & h(\alpha,\beta) \end{vmatrix}$$

在用 x 替换 α 或用 y 替换 β 之后为零。因此，$(x-\alpha)(y-\beta)\mid\Delta$。所以有多项式

$$\delta(x,y,\alpha,\beta)=\frac{\Delta(x,y,\alpha,\beta)}{(x-\alpha)(y-\beta)} \tag{1.13}$$

设

$$\begin{aligned} f(x,y)&=a_m(y)x^m+\cdots+a_1(y)x+a_0(y) \\ &=\bar{a}_n(x)y^n+\cdots+\bar{a}_1(x)y+\bar{a}_0(x) \end{aligned} \tag{1.14}$$

则

$$f(x,y)-f(\alpha,y)=(x-\alpha)\sum_{1\leqslant i\leqslant m}a_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) \tag{1.15}$$

$$f(\alpha,y)-f(\alpha,\beta)=(y-\beta)\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{a}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) \tag{1.16}$$

其中，$\sigma_k(x,\alpha)$是关于 x,α 的初等 k 次齐式。

由此得，

$$\begin{aligned} \delta(x,y,\alpha,\beta)&=\begin{vmatrix} \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) & \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}b_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) & \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}c_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) \\ \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{a}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) & \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{b}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) & \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{c}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) \\ f(\alpha,\beta) & g(\alpha,\beta) & h(\alpha,\beta) \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} f(x,y) & g(x,y) & h(x,y) \\ \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) & \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}b_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) & \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}c_i(y)\sigma_{i-1}(x,\alpha) \\ \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{a}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) & \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{b}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) & \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\bar{c}_j(\alpha)\sigma_{j-1}(y,\beta) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.17}$$

从上面的行列式可以看出，$\deg(\delta,x)\leqslant m-1$，$\deg(\delta,y)\leqslant 2n-1$；从下面的行列式可以看出 $\deg(\delta,\alpha)\leqslant 2m-1$，$\deg(\delta,\beta)\leqslant n-1$。

因此，多项式 $\delta(x,y,\alpha,\beta)$可写为

$$\delta(x,y,\alpha,\beta)=\frac{\Delta(x,y,\alpha,\beta)}{(x-\alpha)(y-\beta)}=\sum_{u=0}^{2m-1}\sum_{v=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{2n-1}d_{i,j,u,v}x^iy^j\alpha^u\beta^v$$

由于对任意$(\bar{x},\bar{y})\in\mathrm{Zero}(\{f,g,h\})$，无论 α 和 β 取值如何，$\delta(\bar{x},\bar{y},\alpha,\beta)=0$ 都成立，因而系数 $D_{ij}=\mathrm{coef}(\delta,\alpha^i\beta^j)$$(0\leqslant i\leqslant 2m-1,0\leqslant j\leqslant n-1)$关于 x 和 y 的公共零点构成的集合包含原多项式组的零点集 $\mathrm{Zero}(\{f,g,h\})$。

定义 1.3.1 每个多项式 D_{ij} 称为$\{f,g,h\}$关于$\{x,y\}$对应于$\{i,j\}$的 Dixon 导出多项