中德机械与能源工程人才培养创新教材

数理方程
典型应用案例及理论分析

尹丽洁 编著

上海科学技术出版社

Synopsis 内容提要

本书在参考同类教材的基础上，结合传统的理论推导，增加了相应应用案例的分析及求解过程，希望能激发课程学习者对专业的兴趣。全书共分为 4 章，前 3 章分别介绍热传导方程、波动方程和调和方程等 3 类典型方程，第 4 章介绍一般二阶线性偏微分方程的分类。每个章节遵循工程问题的分析、定解问题的提出、定解问题的求解及分析的思路，旨在引导学生在学习过程中能够结合本专业的知识，用数学方程描述工程或者生活中遇见的波动、传热等现象，并在特定的条件下对方程进行求解和分析。

本书可供高等院校机械、能源等工科类专业本科生学习数学物理方程同时了解、学习本专业的知识，也可供社会读者和工程技术人员阅读参考。

Editorial Board

丛书编委会

主　任　李峥嵘

委　员　（以姓氏笔画为序）

王　海　尹丽洁　李铮伟

陆　亮　林　松　钱慧智

曹叔维

Preface

丛书序

在教育部和同济大学的支持下，同济大学人才培养模式创新实验区已经走过10个春秋。中德机械与能源工程人才培养模式创新实验区（简称莱茵书院）作为其中一员，自2014年开办以来，以对接研究生培养为主要目标，依托同济大学对德合作平台，探索并实践了双外语、宽口径、厚基础和学科交叉融合的人才培养模式，在学校和家长中得到了积极的响应。

本丛书是莱茵书院办学至今的部分成果汇报，主要包括两个部分：

一部分是根据机械、能源学科对于人才的要求，借鉴德国数学类课程体系，形成数学基本理论在学科内应用的案例教学，为研究生阶段学习奠定扎实基础。教材《常微分方程典型应用案例及理论分析》《数学建模典型应用案例及理论分析》《数理方程典型应用案例及理论分析》《数值分析典型应用案例及理论分析（上、下册）》中，编委们以高等院校工科学生的培养目标为准绳，以实际工程案例为切入点，进行数理知识点的分析与重构，提高工科学生的专业学习能力与分析问题、解决问题的能力。

另一部分是中德双语特色教学课程——机械原理的成果，该案例借鉴了德国亚琛工业大学、德累斯顿工业大学等优秀综合性大学的“机构学”教学经验和案例，结合了国内机械类专业本科生教学目标和知识点指标。《典型机构技术指南——认识—分析—设计—应用》是学生机构分析的案例汇编，该指南以加深学生理论基础、提升学生知识运用能力为目标，倾注了任课教师和莱茵书院学生的大量心血。

本丛书虽然是莱茵书院教学成果，亦可用作在校机械或能源类本科生和研究生辅导教材，或供相关专业在职人员参考。

在丛书出版之际，我代表莱茵书院工作组，对同济大学及其本科生院领导的支持表示诚挚感谢。在莱茵书院创办过程中，同济大学公共英语系教学团队为莱茵书院打造了特色课程体系，中德学院和留德预备部教学团队为莱茵书院的教学和学生培养提供了有

力的支撑，在此也表示衷心感谢。感谢同济大学机械与能源工程学院的支持。特别感谢莱茵书院工作组成员，大家克服困难，创建了莱茵书院，其中的彷徨、汗水和泪水最终与喜悦的成果汇合，回报了大家的初心。感谢丛书的编写者，是你们的支持保证了莱茵书院的正常教学，也推进了莱茵书院的教学实践。

尽管本丛书编写力求科学和实用，但是由于时间仓促，难免有不尽如人意之处，还望读者批评指正。

李峥嵘　教授
同济大学
2019 年 1 月于上海

Foreword

前 言

数学物理方程是指从自然科学和工程技术的各门分支中产生的偏微分方程，这些方程描述了所考察的变量与时间自变量、空间自变量之间的制约关系，通过求解线性偏微分方程的精确解来研究所考察的变量随自变量的变化规律。

传统的数学物理方程教材侧重求解的数学方法，缺少具体案例分析的详细过程，多适用于应用数学、物理学、力学等专业的本科生和工科类的研究生，而对于工科类本科生而言，比较抽象，学习起来比较困难，使得他们在学习以及日后工作过程中难以用数学物理方程的相关知识分析解决实际问题。实际上，对于工科类学生而言，不论从事基础研究还是工程技术开发工作，都需要数学物理方程的相关知识。

本书针对机械、能源类专业本科生，从实际工程应用角度出发，结合传热学、流体力学、理论力学等专业基础课，给出大量实际问题的详细求解过程。全书共分为 4 章，前 3 章依次介绍热传导方程、波动方程和调和方程，其分别为典型抛物型方程、双曲型方程和椭圆型方程，第 4 章为一般二阶线性偏微分方程的分类。每个章节遵循工程问题的分析、定解问题的提出、定解问题的求解及分析的思路，旨在引导学生在学习过程中能够结合本专业的知识，用偏微分方程描述工程或者生活中遇见的波动、传热等现象，并在特定的条件下对方程进行求解。

本书的部分内容参考了国内出版的教材，部分案例引自公开发表的文献，详见本书末的参考文献。在本书的成稿过程中，得到了同济大学机械与能源工程学院领导和同事们的大力支持和帮助，在此深表谢意；特别感谢曹叔维老师仔细阅读了全部书稿，并提出了非常宝贵的意见。感谢以下同学提供应用算例：王绎皓提供电流传输导热问题算例，王宇轩提供太阳能集热器导热问题算例，李庆涛提供扩散问题算例，陈建宗提供一维扩散反应问题算例，杨益提供蔬菜大棚湿度扩散问题算例，陈赟提供弦振动方程在斜拉桥

上的应用算例，黄家荣提供波动方程在动力打桩中的应用算例，黄超富提供波动方程在琴弦发声中的应用算例。

由于编者水平有限，本书错误和不足之处在所难免，恳请读者不吝赐教。

编　者

Contents

目 录

第1章 热传导方程 …… 1

1.1 热传导方程的导出 …… 3

1.1.1 无内热源热传导方程的导出 …… 3

1.1.2 有内热源热传导问题的导出 …… 4

1.2 热传导方程的初边值问题 …… 7

1.2.1 定解条件 …… 7

1.2.2 定解问题 …… 9

1.3 热传导方程初边值问题的分离变量法 …… 10

1.3.1 叠加原理 …… 10

1.3.2 分离变量法 …… 10

1.3.3 非齐次热传导方程初边值问题 …… 15

1.4 热传导方程柯西问题的积分变换法 …… 18

1.4.1 傅里叶变换的概念和性质 …… 18

1.4.2 齐次热传导方程柯西问题 …… 20

1.4.3 非齐次热传导方程柯西问题 …… 21

1.5 热传导方程的基本理论 …… 24

1.5.1 极值原理 …… 24

1.5.2 初边值问题解的唯一性和稳定性 …… 25

1.5.3 柯西问题解的唯一性和稳定性 …… 26

1.6 热传导方程的应用案例 …… 27

1.6.1 无限大平壁导热问题 …… 27

1.6.2 大颗粒炭内部热应力的分布及热应力破碎理论 …… 31

1.6.3 电流传输导热问题 …… 33

1.6.4 太阳能集热器导热问题 …… 35

1.6.5 扩散问题 …… 41

1.6.6 一维扩散反应问题 …… 43

1.6.7 蔬菜大棚湿度扩散问题 …… 46
1.6.8 非平衡截流子扩散问题 …… 49
小结 …… 52
习题 …… 52

第2章 波动方程 …… 55
2.1 波动方程的导出 …… 57
2.1.1 弦振动方程的导出 …… 57
2.1.2 膜振动方程的导出 …… 62
2.2 弦振动方程的初边值问题 …… 64
2.3 弦振动方程的柯西问题的行波法 …… 66
2.3.1 达朗贝尔公式 …… 66
2.3.2 传播波 …… 69
2.3.3 依赖区间、决定区域和影响区域 …… 69
2.3.4 半无界弦及有界弦的振动问题 …… 70
2.3.5 非齐次弦振动方程的柯西问题 …… 72
2.4 弦振动方程的初边值问题的分离变量法 …… 75
2.4.1 弦振动方程的分离变量法 …… 75
2.4.2 解的物理意义 …… 81
2.4.3 非齐次弦振动初边值问题 …… 82
2.4.4 非齐次边界条件 …… 83
2.5 三维波动方程的柯西问题的球平均法 …… 85
2.5.1 齐次三维波动方程的柯西问题 …… 85
2.5.2 非齐次三维波动方程的柯西问题 …… 87
2.6 二维波动方程的柯西问题的降维法 …… 89
2.7 波的传播与衰减 …… 90
2.7.1 依赖区域、决定区域、影响区域和特征锥 …… 90
2.7.2 泊松公式的物理意义、惠更斯原理 …… 92
2.8 波动方程的基本理论 …… 93
2.8.1 振动的动能和位能 …… 93
2.8.2 初边值问题解的唯一性与稳定性 …… 94
2.8.3 柯西问题解的唯一性与稳定性 …… 97
2.9 波动方程的应用案例 …… 100
2.9.1 波动方程在均匀传输线方程中的应用 …… 100

2.9.2 弦振动方程在斜拉桥上的应用 …… 101
2.9.3 波动方程在动力打桩中的应用 …… 106
2.9.4 波动方程在琴弦发声中的应用 …… 110
2.9.5 波动方程在高频输电断路中的应用 …… 113
小结 …… 114
习题 …… 114

第3章 调和方程 …… 117
3.1 调和方程的导出 …… 119
3.2 调和方程的边值问题 …… 120
3.3 格林公式及其应用 …… 121
3.3.1 格林公式 …… 121
3.3.2 调和函数的基本性质 …… 122
3.4 格林函数 …… 126
3.4.1 格林函数的概念 …… 126
3.4.2 格林函数的基本性质 …… 128
3.5 静电源像法 …… 129
3.5.1 球域的格林函数 …… 129
3.5.2 半空间的格林函数 …… 131
3.5.3 二维区域的格林函数 …… 131
3.6 调和方程的基本理论 …… 134
3.6.1 极值原理 …… 134
3.6.2 边值问题解的唯一性 …… 136
3.7 调和方程的应用案例 …… 137
3.7.1 导体槽内的电位分布问题 …… 137
3.7.2 油气渗流问题 …… 139
小结 …… 139
习题 …… 139

第4章 二阶线性偏微分方程的分类 …… 141
4.1 二阶线性偏微分方程的分类与化简 …… 143
4.1.1 两个自变量二阶线性偏微分方程的分类 …… 143
4.1.2 两个自变量二阶线性偏微分方程的化简 …… 144
4.1.3 化二阶线性偏微分方程为标准型 …… 146

4.2 三类方程的比较 …… 150
4.2.1 线性方程的叠加原理 …… 150
4.2.2 三类方程解的性质的比较 …… 152
4.2.3 三类方程定解问题提法的比较 …… 155
小结 …… 158
习题 …… 159

参考文献 …… 160

第 1 章

热传导方程

热传导方程

热传导又称导热，是指物体各部分无相对位移或不同物体直接接触时依靠原子、分子及自由电子等微观粒子热运动而进行的热量传递现象。在许多工程实践中，热传导是经常遇到的现象，比如建筑物的暖气片、墙壁和锅炉炉墙中的热量传递、热网地下埋设管道的热损失等。热传导方程就是用来描述物体内温度分布的偏微分方程。

热传导方程是典型的抛物型方程。本章内容包括热传导方程的导出、初边值问题及分离变量法、柯西(Cauchy)问题及积分变换法，最后给出一些热传导方程的常见工程应用算例。

1.1 热传导方程的导出

1.1.1 无内热源热传导方程的导出

问题描述： 空间静置的某物体 G，与周围介质之间有热交换，假定该物体是各向同性连续介质，求物体内的温度 $u(x, y, z, t)$ 分布。

物理规律：

(1) 能量守恒定律。在物体 G 内任取一闭曲面 Γ，它所包围的区域记为 Ω，则 t_1 时刻到时刻 t_2 区域 Ω 所吸收的热量等于该时段内流进此闭曲面的热量。

(2) 傅里叶(Fourier)导热定律。物体在无穷小时段 $\mathrm{d}t$ 内沿法线方向 $\boldsymbol{n}$ 流过一个无穷小面积 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$，与物体温度沿曲面 $\mathrm{d}S$ 法线方向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 成正比，即

$$\mathrm{d}Q = -k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

式中，$k(x, y, z)$ 称为物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数，取正值。式(1.1)中负号表示热量总是从温度高的一侧流向低的一侧，与温度梯度的方向相反。

由式(1.1)，从 t_1 时刻到 t_2 时刻流进此闭曲面的全部热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\Gamma} k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

流入的热量使物体内部温度发生变化，在时间间隔 (t_1, t_2) 中物体温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 变化到 $u(x, y, z, t_2)$，需要吸收的热量为

$$\iiint_{\Omega} c(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

式中，$c(x, y, z)$ 为物体的比热，$\rho(x, y, z)$ 为物体的密度。根据能量守恒定律

$$\iiint_{\Omega} c(x, y, z)\rho(x, y, z)[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\Gamma}k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

假设函数 $u(x,y,z,t)$ 关于变量 x，y，z 具有二阶连续偏导数，关于 t 具有一阶连续偏导数，利用格林公式，式(1.3)可以转化为

$$\iiint_{\Omega}c\rho\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

变换积分次序得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

由于时间间隔 (t_1,t_2) 和区域 Ω 都是任意的，则

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.5}$$

式(1.5)称为无内热源的非均匀的各向同性体的热传导方程，其描述的是物体的温度随时间和空间的变化。如果物体是均匀的，此时 k，c 及 ρ 均为常数，记 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.6}$$

方程(1.6)称为齐次热传导方程。

如果研究对象为薄片的热传导，薄片的侧面绝热，即侧面与周围环境之间没有热交换，可得二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.7}$$

当研究对象是均匀细杆时，假如它的侧面是绝热的、温度的分布在同一截面是相同的，则温度函数 $u(x,y,z,t)$ 仅与坐标 x 及时间 t 有关，可得一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

这种含有未知函数偏导数的方程称为偏微分方程。方程中出现的未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的阶数。如果方程中的项关于未知函数及其各阶偏导数的整体是线性的，就称该方程为线性方程，否则就称为非线性方程。方程(1.7)为二阶线性偏微分方程。

1.1.2 有内热源热传导问题的导出

问题描述： 空间静置的某物体 G，与周围介质之间有热交换，同时内部含有热源(例

如化学反应时放出反应热、电阻通电发热等，这时内热源为正值；化学反应时吸收热量、熔化过程中吸收物理潜热等，这时内热源为负值)，单位时间内单位体积中所产生的热量为 $F(x, y, z, t)$，假定该物体是各向同性连续介质，求物体内的温度 $u(x, y, z, t)$ 分布。

物理规律：

(1) 能量守恒定律。

(2) 傅里叶导热定律。

根据能量守恒，式(1.4)变为

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} c\rho\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F(x, y, z, t)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{1.9}$$

整理可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x, y, z, t)\tag{1.10}$$

其中

$$f(x, y, z, t)=\frac{F(x, y, z, t)}{\rho c}\tag{1.11}$$

方程(1.10)称为非齐次热传导方程。

例 1.1 一均匀细杆直径为 l，假设它在同一截面上的温度是相同的，杆的表面和周围介质发生热交换且服从规律 $\mathrm{d}Q=k_1(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$，假设杆的密度为 ρ，比热为 c，热传导系数为 k，试导出此时温度 u 满足的方程。

解 以杆的对称轴为 x 轴，温度分布为 $u(x, t)$，在杆上任取一段 $(x, x+\Delta x)$，则：

由一端导入的热量为

$$q_x=-k\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

由另一段导出的热量为

$$q_{x+\Delta x}=-k\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

时间段 $(t, t+\Delta t)$ 内由于热传导产生的净热量为

$$Q_1=(q_x-q_{x+\Delta x})\Delta t=\int_t^{t+\Delta t}k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\pi l^2}{4}\Delta x\,\mathrm{d}t$$

时间段 $(t, t+\Delta t)$ 内与周围介质传递的热量为

$$Q_2=\int_t^{t+\Delta t}k_1(u-u_1)\pi l\Delta x\,\mathrm{d}t$$

时间段$(t, t+\Delta t)$内细杆升温所需的热量为

$$Q_3=\int_t^{t+\Delta t} c\rho \frac{\pi l^2}{4}\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t$$

根据能量守恒

$$Q_3=Q_1-Q_2$$

则

$$\int_t^{t+\Delta t} c\rho \frac{\pi l^2}{4}\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t=\int_t^{t+\Delta t} k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\pi l^2}{4}\Delta x\,\mathrm{d}t-\int_t^{t+\Delta t} k_1(u-u_1)\pi l\Delta x\,\mathrm{d}t$$

可得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4k_1}{l}(u-u_1)$$

令$a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{4k_1}{c\rho l}(u-u_1)$$

例 1.2 混凝土内部储藏着的热量称为水化热，水化热在混凝土浇筑后逐渐放出，放热速度和混凝土所储藏的水化热成正比。以$Q(t)$表示混凝土在单位体积中所储的热量，Q_0为初始时刻所储的热量，则$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\beta Q$，其中$\beta$为正常数。又假设混凝土的比热为$c$，密度为$\rho$，热传导系数为$k$，求混凝土在浇筑后温度$u$满足的方程。

解 浇筑后在混凝土内任取一封闭曲面τ，所包围的区域为Ω，则由t_1时刻到t_2时刻，区域Ω内由于热传导产生的热量变化为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iint_\tau k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\beta Q,\ Q(t)=Q_0\mathrm{e}^{-\beta t}$$

则水化热释放的热量为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_\Omega Q_0\beta\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

区域Ω中升温所需的热量为

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

根据能量守恒

$$Q_3=Q_1-Q_2$$