转型发展系列教材

高等数学及其应用（下）

GAODENG SHUXUE JI QI YINGYONG

主　编：胡　成　吴田峰　刘　洋
副主编：陈文贵　赵　芳　张　雪

西南交通大学出版社

高等数学及其应用

（下）

主　编　胡　成　吴田峰　刘　洋
副主编　陈文贵　赵　芳　张　雪

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用. 下 / 胡成，吴田峰，刘洋主编
. —成都：西南交通大学出版社，2019.1
ISBN 978-7-5643-6760-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①胡… ②吴… ③刘… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 024616 号

高等数学及其应用

（下）

主编　胡　成　吴田峰　刘　洋

责任编辑　孟秀芝
封面设计　严春艳

出版发行　西南交通大学出版社
（四川省成都市二环路北一段 111 号
西南交通大学创新大厦 21 楼）
邮政编码　610031
发行部电话　028-87600564　028-87600533
网址　http://www.xnjdcbs.com
印刷　四川森林印务有限责任公司

成品尺寸　185 mm × 260 mm
印张　14
字数　343 千
版次　2019 年 1 月第 1 版
印次　2019 年 1 月第 1 次
定价　36.00 元
书号　ISBN 978-7-5643-6760-2

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

总序

教育部、国家发展改革委、财政部《关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见》指出：

“当前，我国已经建成了世界上最大规模的高等教育体系，为现代化建设作出了巨大贡献。但随着经济发展进入新常态，人才供给与需求关系深刻变化，面对经济结构深刻调整、产业升级加快步伐、社会文化建设不断推进特别是创新驱动发展战略的实施，高等教育结构性矛盾更加突出，同质化倾向严重，毕业生就业难和就业质量低的问题仍未有效缓解，生产服务一线紧缺的应用型、复合型、创新型人才培养机制尚未完全建立，人才培养结构和质量尚不适应经济结构调整和产业升级的要求。”

“贯彻党中央、国务院重大决策，主动适应我国经济发展新常态，主动融入产业转型升级和创新驱动发展，坚持试点引领、示范推动，转变发展理念，增强改革动力，强化评价引导，推动转型发展高校把办学思路真正转到服务地方经济社会发展上来，转到产教融合校企合作上来，转到培养应用型技术技能型人才上来，转到增强学生就业创业能力上来，全面提高学校服务区域经济社会发展和创新驱动发展的能力。”

高校转型的核心是人才培养模式，因为应用型人才和学术型人才是有所不同的。应用型技术技能型人才培养模式，就是要建立以提高实践能力为引领的人才培养流程，建立产教融合、协同育人的人才培养模式，实现专业链与产业链、课程内容与职业标准、教学过程与生产过程对接。

应用型技术技能型人才培养模式的实施，必然要求进行相应的课程改革，我们这套“转型发展系列教材”就是为了适应转型发展的课程改革需要而推出的。

希望教育集团下属的院校，都是以培养应用型技术技能型人才为职责使命的，人才培养目标与国家大力推动的转型发展的要求高度契合。在办学过程中，围绕培养应用型技术技能型人才，教师们在不同的课程教学中进行了卓有成效的探索与实践。为此，我们将经过教学实践检验的、较成熟的讲义陆续整理出版。一来与兄弟院校共同分享这些教改成果，二来也希望兄弟院校对于其中的不足之处进行指正。

让我们共同携起手来，增强转型发展的历史使命感，大力培养应用型技术技能型人才，使其成为产业转型升级的“助推器”、促进就业的“稳定器”、人才红利的“催化器”！

汪辉武

2016年6月

前 言

高等数学一直是高等院校最重要的公共基础课之一，作为大多数专业课程所必要的知识基础，它在自然科学和社会科学领域中都具有广泛的应用。

为迎合独立学院学生的知识基础和实用性的要求，西南交通大学希望学院的骨干教师根据独立学院学生的特点，联合编写了本教材。本教材在系统地阐述高等数学的基本概念、基本思想和基本方法的基础上，进一步结合独立学院学生的数学基础和专业课需求，本着简单实用的原则，删减了一些理论性较强且较复杂的内容，注重对基本概念的引入和讲解，省略了许多定理的证明和推导，增加了很多应用性的例题和习题。

本教材是对高等数学与数学实验、数学建模有机结合的教学方式的尝试，推动传统教学方式与多媒体等现代教育技术的融合。在每个章节最后都编写了数学实验与数学建模的有关内容，以加强对学生实践能力的培养。本书以 MATLAB 软件为工具，学生可以在计算机上操作完成大部分微积分学的基本运算，并能解决一些简单的数学建模问题。

《高等数学及其应用（下）》包括微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分与曲线积分、无穷级数等内容。其中，第 8 章由宋军智老师编写，第 9 章由陈文贵、张雪老师编写，第 10 章由赵芳老师编写，第 11 章由吴田峰、张雪老师编写，第 12 章由冉菁、张雪老师编写，数学实验部分由赵芳老师编写，吴田峰、赵芳、张雪老师负责本书的校对工作。本书由西南交通大学的胡成教授统稿整理。

由于编者水平和经验有限，书中难免存在不足之处，敬请专家、同行及读者批评指正。

编 者

2018 年 10 月

目 录

第 8 章　微分方程

在解决实际问题的过程中，人们常常希望能确定反映客观事物内部联系的数量关系，即确定所讨论的变量之间的函数关系．用微商来描述事物变化的趋势，用物质不灭、能量守恒以及其他物质运动基本规律来建立质量和未知量之间的关系，这样可以将来自物理、化学、工程、生物和经济领域的一些实际问题表述为精确的等式形式．这种包含未知函数和其微商的恒等式就是我们即将学习的微分方程．

自牛顿（1642—1727）、莱布尼茨（1646—1716）创立微积分学以来，人们就已经开始对微分方程进行研究．从最初研究的初等求解技巧发展到今天日益发达的数值模拟技术，从早期对方向场的理解到今天关于微分方程定性理论、分叉理论的成熟知识体系，历经三百多年的历史，这门数学分支不仅成为数学学科中队伍最大、综合性最强的领域之一，而且成为数学以外学科最为关注的领域之一．它的发展极大地推动了自然科学、工程技术乃至社会科学的发展，尤其是为地球椭圆轨道的计算、海王星的发现、弹道轨道的定位、大型机械振动的分析、自动控制的设计、气象数值预报、人口增长的宏观预测等提供了技术支撑．

概括地说，微分方程是研究自然科学、工程技术及社会生活中一些确定性现象的重要工具．通过研究微分方程的解的各种属性，我们就能解释一些现象、对未来的发展趋势作出预测、为人们设计的新的装置提供参考．

这一章，我们将学习微分方程的一些基本概念和几种常用微分方程的经典解法．

8.1　微分方程的基本概念

一、引　例

下面通过几个具体的问题来给出微分方程的基本概念．

例 1　设曲线通过点（1, 2），且在该曲线上任意一点 M（x，y）处的切线斜率为 $2x$，求这条曲线的方程．

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，由导数的几何意义可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)=2x\,, \tag{8.1}$$

将（8.1）式两端同时积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C. \tag{8.2}$$

其中 C 是任意常数.

由已知条件，点（1, 2）在曲线上，将其代入（8.2）式，解得 $C=1$.

故所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

例 2 列车在平直线路上以 20 m/s 的速度行驶，当制动时列车获得加速度 – 0.4 m/s^2. 问列车开始制动后多长时间才能停住？列车在制动时间内行驶了多少路程？

解 设列车开始制动后 t 秒时行驶了 s 米，制动阶段列车运动规律函数 $s=s(t)$. 由物理学知识知，函数 $s=s(t)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4, \tag{8.3}$$

此外，还满足条件：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，} \quad s=0 \text{ 且 } v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20. \tag{8.4}$$

将（8.3）式两端积分一次，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \tag{8.5}$$

将（8.5）式两端再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2. \tag{8.6}$$

其中 C_1, C_2 都是任意常数.

将已知条件“$t=0$ 时 $v=20$”和“$t=0$ 时 $s=0$”分别代入（8.5）式和（8.6）式，有

$$C_1=20, \quad C_2=0,$$

最后将 C_1,C_2 的值代入（8.5）式和（8.6）式，得

$$v=-0.4t+20, \tag{8.7}$$

$$s=-0.2t^2+20t \tag{8.8}$$

在（8.7）式中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停止所需的时间：

$$t=\frac{20}{0.4}=50 \text{（秒）}$$

再把 $t=50$ 代入（8.8）式，得到列车在制动阶段行驶的路程：

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500 \text{（米）}$$

上述两个例子中的关系式（8.1）和（8.3）都含有未知函数的导数，它们都是微分方程.

二、微分方程的基本概念

一般地，凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫作**微分方程**．未知函数是一元函数的方程叫作**常微分方程**；未知函数是多元函数的方程，叫作**偏微分方程**．本章只讨论常微分方程．

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶数**，简称为微分方程的阶．例如，方程（8.1）是一阶微分方程；方程（8.3）是二阶微分方程．而方程

$$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=\sin 2x$$

则是四阶微分方程．

一般地，n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{8.9}$$

其中函数 F 含有 $n+2$ 个不同变量，我们将方程（8.9）称为 n 阶微分方程的**隐式格式**．这里必须指出，在方程（8.9）中，$y^{(n)}$ 是必须出现的，而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以出现也可以不出现．例如，在 n 阶微分方程 $y^{(n)}+1=0$ 中，除 $y^{(n)}$ 外，其他变量都没有出现．

如果能从方程（8.9）中解出最高阶导数，可得微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{8.10}$$

我们将方程（8.10）称为 n 阶微分方程的**显式格式**．后面我们讨论的微分方程都是显式微分方程或能通过恒等变形变为显式方程的微分方程，并且方程（8.10）右端的函数 f 在所讨论的范围内连续．

由前面的例子我们看到，在研究某些实际问题时，首先要建立微分方程，然后找出满足微分方程的函数，即找出这样的函数，把函数代入微分方程后能使该方程成为**恒等式**，则这个函数就叫作**微分方程的解**．确切地说，设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0$$

那么函数 $y=\varphi(x)$ 就叫作微分方程（8.9）在区间 I 上的解．

例如，函数（8.2）是微分方程（8.1）的解；函数（8.6）和（8.8）都是微分方程（8.3）的解．

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫作**微分方程的通解**．例如，函数（8.2）是方程（8.1）的解，它含有一个任意常数，而方程（8.1）是一阶的，所以函数（8.2）是方程（8.1）的通解．又如，函数（8.6）是方程（8.3）的解，它含有两个任意常数，而方程（8.3）是二阶的，故函数（8.6）是方程（8.3）的通解．

由于通解中含有任意常数，它还不能确定地反映某一特定客观事物的规律性，所以必须确定这些常数的值．为此，要根据问题的实际情况提出确定这些常数的条件．例如，例 1 中的“$x=1$ 时 $y=2$”，例 2 中的“$t=0$ 时 $v=20$”和“$t=0$ 时 $s=0$”，便是这样的条件．

设微分方程中的未知函数为 $y=y(x)$，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0\text{时}，\quad y=y_0$$

或写成
$$y|_{x=x_0}=y_0 .$$

其中 x_0,y_0 都是给定的值. 如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$x=x_0\text{时}，\quad y=y_0,\ y'=y_0'$$

或写成
$$y|_{x=x_0}=y_0,\ y'|_{x=x_0}=y_0' .$$

其中 x_0,y_0 和 y_0' 都是给定的值. 上述条件叫作**微分方程的初始条件**.

确定通解中的常数以后，就得到了**微分方程的特解**. 例如，函数 $y=x^2+1$ 是方程（8.1）满足条件"$x=1$ 时 $y=2$"的特解；而（8.8）式则是方程（8.3）满足条件（8.4）的特解.

求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解的这种问题，叫作一阶微分方程的**初值问题**，记作

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}. \tag{8.11}$$

微分方程的解的图形是一条曲线，叫作**微分方程的积分曲线**. 初值问题（8.11）的几何意义是求微分方程的通过点 (x_0,y_0) 的积分曲线. 而二阶微分方程的初值问题表示为

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y_0' \end{cases}. \tag{8.12}$$

它的几何意义是求微分方程通过点 (x_0,y_0)，且在该点处的切线斜率为 y_0' 的积分曲线.

例 3 验证：函数

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt \tag{8.13}$$

是微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0 \tag{8.14}$$

的解.

解 首先求出函数（8.13）的一阶导数、二阶导数

$$\frac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt) ,$$

将 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 及 x 的表达式代入方程（8.14），得

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0 \cdot$$

函数（8.13）及其导数代入方程（8.14）后成为一个恒等式，因此函数（8.13）是微分方程（8.14）的解.

习题 8.1

A 组

1. 指出下列各微分方程的阶数.

（1）$x(y')^2 - 2yy' + x = 0$；　　（2）$xy''' + 2y'' + x^2 y = 0$；

（3）$(7x-6y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y = 0$；　　（4）$\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} + \rho = \sin^2\theta$；

（5）$L\dfrac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{C} = 0$.

2. 找出下面哪个函数是哪个微分方程的解.

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$　　（a）$y = 5x^2$

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$　　（b）$y = -x^2$

（3）$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$　　（c）$y = x^2$

3. 在下题中，验证后面给出的函数是前面微分方程的解.

（1）$(x-2y)y' = 2x - y$，$x^2 - xy + y^2 = c$.

（2）$(y')^2 + 4y = 0$，$y = \sin 2x$.

B 组

1. 求微分方程 $y' = 4x$ 的通解，并求出满足初始条件 $y|_{x=2} = 9$ 的特解.

2. 设曲线在点 (x, y) 处的切线斜率等于该点横坐标的平方，写出该曲线满足的微分方程.

3. 设曲线在点 (x, y) 处法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分，写出该曲线满足的微分方程.

8.2　可分离变量的微分方程与齐次方程

一、可分离变量的微分方程

首先，我们讨论一阶微分方程

$$y' = f(x,y)$$

的解法.

一阶微分方程有时也写成如下的对称形式

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0\,. \tag{8.15}$$

在方程（8.15）中，变量 x 与 y 对称，它既可以看作是以 x 为自变量、y 为未知函数的方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}(Q(x,y) \neq 0)\,,$$

也可看作是以 y 为自变量、x 为未知函数的方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}(P(x,y) \neq 0)$$

在 8.1 节的例 1 中，我们遇到一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

或将其变形为

$$\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

把上式两端同时积分，就可以得到这个方程的通解

$$y = x^2 + C$$

但并不是所有的一阶微分方程都能这样求解. 例如，一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2 \tag{8.16}$$

就不能像上面那样直接用两端积分的方法求出它的通解. 其原因是方程（8.16）的右端含有未知函数 y，不定积分

$$\int 2xy^2\mathrm{d}x$$

积不出来. 为了解决这个问题，我们在方程（8.16）的两端同时乘以 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y^2}$，使其变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2x\mathrm{d}x$$

这样，变量 x 与 y 已分离在等式的两端，然后两端积分得

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C \text{ 或 } y = -\frac{1}{x^2+C}\,. \tag{8.17}$$

其中 C 是任意常数.

可以验证，函数（8.17）确实满足一阶微分方程（8.16），且含有一个任意常数，所以它是方程（8.16）的通解.

一般地，如果一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \tag{8.18}$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程就称为**可分离变量的微分方程**.

假定方程（8.18）中的函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的，设 $y=\varphi(x)$ 是方程的解，将它代入方程（8.18）中，得到恒等式

$$g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x .$$

将上式两端积分，并由 $y=\varphi(x)$ 引进变量 y，得

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x .$$

设 $G(y)$，$F(x)$ 依次为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数，于是有

$$G(y) = F(x) + C , \tag{8.19}$$

因此，关系式（8.19）满足方程（8.18）. 反之，如果 $y=\varphi(x)$ 是由关系式（8.19）所确定的隐函数，那么在 $g(y)\neq 0$ 的条件下，$y=\varphi(x)$ 也是方程（8.18）的解. 事实上，由隐函数的求导法可知，当 $g(y)\neq 0$ 时，有

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(y)} = \frac{f(x)}{g(y)} .$$

这就表示函数 $y=\varphi(x)$ 满足方程（8.18）. 如果已分离变量的方程（8.18）中 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的，且 $g(y)\neq 0$，那么（8.18）式两端积分后得到的关系式（8.19），就用隐式给出了方程（8.18）的解，（8.19）式就叫作微分方程（8.18）的**隐式解**. 由于关系式（8.19）中含有任意常数，因此（8.19）式所确定的隐函数是方程（8.18）的通解，所以（8.19）式叫作微分方程（8.18）的**隐式通解**.

例 1　求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$$

的通解.

解　易知该方程是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x ,$$

两端同时积分，即

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x ,$$

得

$$\ln|y| = x^2 + C_1 ,$$

从而
$$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

又因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数，把它记作 C，便得到原方程的通解
$$y=Ce^{x^2}.$$

例 2 放射性元素铀由于不断有原子放射出微粒子而变成其他元素，在此过程中，铀的含量不断减少，这种现象叫作**衰变**. 由原子物理可知，铀的衰变速度与当时未衰变的原子含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间变化的规律.

解 易知，铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\dfrac{dM}{dt}$. 由于铀的衰变速度与其含量成正比，故可得到如下微分方程：
$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M. \tag{8.20}$$

其中 $\lambda(\lambda>0)$ 是常数，叫作**衰变系数**. λ 前带负号是由于当 t 增加时 M 单调减少，即 $\dfrac{dM}{dt}<0$.

由题易知，初始条件为
$$M\big|_{t=0}=M_0,$$

且方程（8.20）是可以分离变量的，分离变量后得
$$\frac{dM}{M}=-\lambda dt,$$

两端积分，即
$$\int\frac{dM}{M}=\int(-\lambda)dt,$$

以 $\ln C$ 表示任意常数，因为 $M>0$，得
$$\ln M=-\lambda t+\ln C,$$

即
$$M=Ce^{-\lambda t},$$

是方程（8.20）的通解. 将初始条件代入上式，解得
$$M_0=Ce^0=C,$$

故得
$$M=M_0e^{-\lambda t}.$$

由此可见，铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减.

二、齐次方程

如果一阶微分方程
$$y'=f(x,y)$$