普通高等教育“十三五”规划教材

离散数学

LISAN SHUXUE

江 雪 帅天平 全 辉 主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

离散数学

江　雪　帅天平　仝　辉　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

离散数学这门课程主要介绍离散数学各个分支的基本概念、基本理论和基本方法。通过该课程的训练，可以提升学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，并让他们了解离散数学在计算机等学科中的作用，为以后从事相关工作和研究打下坚实基础。

本书较为系统地介绍了计算机科学与技术等相关专业所必需的离散数学知识，全书共 9 章。第 1 章介绍集合与逻辑；第 2 章介绍二元关系与函数；第 3 章介绍算法；第 4 章介绍密码与数论；第 5 章介绍计数；第 6 章介绍归纳法与递推关系；第 7 章介绍图论；第 8 章介绍特殊的图——树；第 9 章介绍网络流与匹配。各章之后配有适当难度的习题，便于学生课后练习。

本书可以作为高等院校计算机科学与技术、软件工程、通信工程等相关专业的教材，也可以作为考研学生及计算机工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 江雪，帅天平，仝辉主编. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2019.6

ISBN 978-7-5635-5730-1

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①江…②帅…③仝… Ⅲ. ①离散数学一高等学校一教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 103423 号

书　　名：离散数学
作　　者：江　雪　帅天平　仝　辉
责任编辑：刘　颖
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11.75
字　　数：283 千字
版　　次：2019 年 6 月第 1 版　2019 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5730-1　　定价：29.00 元

前　　言

20 世纪 70 年代初期，随着计算机科学的发展，逐步建立了离散数学这一门新兴的工具性学科。离散数学以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。近年来，计算机科学与技术飞速发展，对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深入的影响。离散数学，作为计算机科学与技术的数学基础，更加显示出其重要性。离散数学不仅是计算机科学基础理论的核心课程，也是人工智能的数学基础之一。离散数学这门课程与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、数据库、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络、算法分析、电路分析与逻辑设计等理论课程联系紧密，是这些课程的先修课程。通过离散数学课程的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础。

本书是编者在给北京邮电大学的本科生讲授“离散数学”和“离散计算技术”课程的基础上，根据工科学生特别是计算科学与技术专业学生的特点，借鉴其他教材的长处和国外教材的特色编写而成。内容包括了离散数学中比较基础的部分，主要包括：数理逻辑、集合论、图论初步。①数理逻辑是逻辑学的一个核心内容，它是研究思维形式及思维规律的基础，是研究推理规律的科学。数理逻辑是用数学方法，即引入符号体系，来表达和研究推理的规律。②集合论的起源可以追溯到 19 世纪末期，德国数学家康托尔发表了一篇关于无穷集合论的文章，奠定了集合论的基础。集合不仅可以用来表示数及其运算，更可以用于非数值信息的表示和处理。集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域中得到了广泛的应用。③图论是离散

数学的重要组成部分，是近代应用数学的重要分支。1736 年瑞士数学家欧拉发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》，标志着图论的诞生。作为描述事务之间关系的手段和工具，图论在许多领域，如计算机科学、物理学、化学、运筹学、信息论、控制论、网络通信、社会科学以及经济管理、军事、国防、工农业生产等领域，都得到广泛的应用。另外，在众多应用中，图论自身也得到了迅猛发展。

全书共 9 章。第 1 章是集合与逻辑；第 2 章是二元关系与函数；第 3 章是算法；第 4 章是密码与数论；第 5 章是计数；第 6 章是归纳法与递推关系；第 7 章是图论；第 8 章是树；第 9 章是网络流与匹配。第 1～3 章由江雪编写，第 4 章由仝辉编写，第 6 章由仝辉和帅天平共同编写，第 5 章和第 7～9 章由帅天平编写。全书由江雪整理并统稿。

本书主要内容在北京邮电大学多次讲授，反复修改，但由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2018 年 10 月

目　　录

第1章

集合与逻辑

第1章从集合讲起，集合是一些对象不计顺序的汇集。离散数学研究诸如图和布尔代数等对象。本章介绍集合的术语和记号。逻辑是研究推理的科学，关心的是推理是否正确，也就是说关心的是语句之间的关系而不是语句本身的内容。逻辑是阅读和推导证明的基础。

1.1 集　合

集合在数学领域具有无可比拟的特殊重要性。集合论的基础是由德国数学家康托尔在19世纪70年代奠定的，经过一大批卓越的科学家半个世纪的努力，到20世纪20年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位，可以说，现代数学各个分支的几乎所有成果都构筑在严格的集合理论上。

集合是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总成的全体，这些对象称为该集合的元素。例如，26个英文字母的集合；52张扑克牌的集合；坐标平面上点的集合等。

若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于集合 A，记作 $x\in A$。若 x 不是集合 B 的元素，则称 x 不属于集合 B，记作 $x\notin B$。例如，

$$A=\{x,\{y,z\},y,\{\{z\}\}\}$$

这里，$x\in A$，$\{y,z\}\in A$，$y\in A$，$\{\{z\}\}\in A$，但 $z\notin A$，$\{z\}\notin A$。要注意$\{\{z\}\}$是 A 的元素，而 z 不是 A 的元素。

集合有三种表示方法。

(1) 列举法。列举法就是将集合的元素逐一列举出来的方式。例如，

$$A=\{1,2,3\}$$

(2) 描述法。设集合 S 是由具有某种性质 P 的全体元素所构成的，则可以采用描述集合中元素公共属性的方法来表示集合：$S=\{x\mid P(x)\}$。例如，

$$B=\{x\mid x\text{ 是正整数}\}\tag{1.1.1}$$

这里，集合 B 指由所有正整数构成的集合，即 $B=\{1,2,3,\cdots\}$。"|"称为集合建构符，表示"条件是"，因此式(1.1.1)可以读作"B 是所有 x 组成的集合，条件是 x 是正整数"。这里，把 B 中元素必须满足的性质放在"|"符号之后。

(3) 文氏图(Venn图)。Venn图给出了集合的形象化表示，用一条封闭的曲线内部表

示一个集合。在 Venn 图中,用矩形表示全集,用圆表示全集的子集,如图 1.1.1 所示。

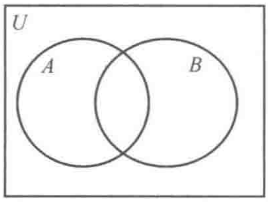

图 1.1.1　文氏图

文氏图可以表示集合运算的结果。例如,在图 1.1.2 中,阴影部分分别表示集合 A 和集合 B 的并集、交集和差集。

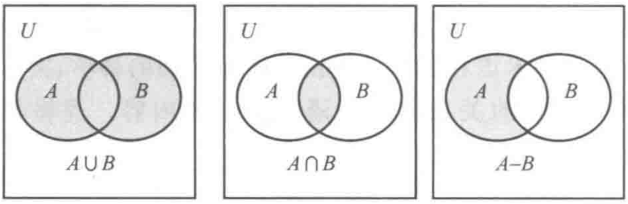

图 1.1.2　集合 A 和集合 B 的并集、交集和差集

此外,有些集合可以用一些特定符号表示,比如,

N:非负整数集合或自然数集合{0,1,2,3,…}

$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$:正整数集合{1,2,3,…}

Z:整数集合{…,−1,0,1,…}

Q:有理数集合

$\mathbf{Q}^+$:正有理数集合

$\mathbf{Q}^-$:负有理数集合

R:实数集合(包括有理数和无理数)

$\mathbf{R}^+$:正实数集合

$\mathbf{R}^-$:负实数集合

C:复数集合

$\varnothing$:空集(不含有任何元素的集合),$\varnothing=\{\ \}$

集合中的元素有以下三个特征。

(1) 确定性(集合中的元素必须是确定的)。

(2) 互异性(集合中的元素互不相同)。例如,集合{1,2,3}和{1,2,2,3}是同一个集合,虽然第二个集合中的元素 2 重复出现,但只被算作一个元素。

(3) 无序性(集合中的元素没有先后之分)。例如,集合{3,4,5}和{3,5,4}是同一个集合。

设 X 和 Y 是两个集合。

如果 X 和 Y 的元素相同,则称集合 X 与 Y 相等,记为 $X=Y$。如果 X 和 Y 满足:

- 对于任意的 x,如果 $x\in X$,则 $x\in Y$,
- 对于任意的 x,如果 $x\in Y$,则 $x\in X$,

则称 X 与 Y 相等,记为 $X=Y$。

如果 X 与 Y 不相等，则记为 $X \neq Y$。

如果 X 的每个元素都属于 Y，则称 X 是 Y 的子集，记为 $X \subseteq Y$，即如果对于任意的 $x \in X$，有 $x \in Y$，则 $X \subseteq Y$。例如，$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$。

根据上面的定义可以看出，$X=Y$，即有 $X \subseteq Y$ 且 $Y \subseteq X$。

如果 X 是 Y 的子集，并且 X 不等于 Y，则称 X 是 Y 的真子集，记为 $X \subset Y$。

例 1.1.1 令 $A=\{1,3,2\}$，$B=\{1,2,3,2\}$，$C=\{1,3\}$，则有 $A=B$，$C \subseteq A$，$C \subset A$，即 A 与 B 相等，C 是 A 的子集，并且是 A 的真子集。

定义 1.1.2 集合 X 中的元素个数，称为集合 X 的**势**，其中 X 是一个有限集，记为 $|X|$。

例 1.1.3 令集合 $A=\{1,2,3\}$，则 $|A|=3$，即集合 A 的势为 3。

定义 1.1.4 集合 X 的所有子集组成的集合，称为集合 X 的**幂集**，记为 $P(X)$。

例 1.1.5 令 $A=\{1,2,3\}$，则 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。此外，$|A|=3$，$|P(A)|=8$。

从例 1.1.5 看出，$|A|=3$，$|P(A)|=2^3$。事实上，对于幂集，可以证明如下结果。

定理 1.1.6 如果 $|X|=n$，则

$$|P(X)|=2^n, \quad n \geqslant 0$$

该定理可以用数学归纳法进行证明。

对于集合，可以进行并、交、补等基本运算，得到新的集合。

定义 1.1.7 设 X 和 Y 为两个集合。

(i) 集合

$$X \cup Y=\{x \mid x \in X \text{ 或 } x \in Y\}$$

称为 X 与 Y 的**并集**，即由所有在 X 中或在 Y 中的元素组成的集合。

(ii) 集合

$$X \cap Y=\{x \mid x \in X \text{ 且 } x \in Y\}$$

称为 X 与 Y 的**交集**，即由所有在 X 中并且在 Y 中的元素组成的集合。

(iii) 集合

$$X-Y=\{x \mid x \in X \text{ 且 } x \notin Y\}$$

称为 X 与 Y 的**差集**，即由所有在 X 中且不在 Y 中的元素组成的集合。

(iv) 给定全集 U 和 U 的一个子集 X，集合 $U-X$ 称为 X 的**补集**(或余集)，记为 X^c 或 $\overline{X}$。

从上面的定义可以看出，$X \cup Y$ 由 X 或 Y 中的元素构成，$X \cap Y$ 由 X 和 Y 中的公共元素构造，$X-Y$ 由属于 X 但不属于 Y 的元素构成。

例 1.1.8 令 $A=\{a,c,d\}$，$B=\{b,d,e\}$，则 $A \cup B=\{a,b,c,d,e\}$，$A \cap B=\{d\}$，$A-B=\{a,c\}$，$B-A=\{b,e\}$。

注意：$A-B \neq B-A$。

定理 1.1.9 令 U 是全集，A,B,C 是 U 的子集，则有下列性质成立。

(i) 结合律

$$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$$

(ii) 交换律

$$A \cup B=B \cup A, \quad A \cap B=B \cap A$$

(iii) 分配率

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

(iv) 同一律

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap U=A$$

(v) 补余律

$$A\cup\overline{A}=U,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing$$

(vi) 幂等律

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$$

(vii) 零率

$$A\cup U=U,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$$

(viii) 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A$$

(ix) 双重否定律

$$\overline{\overline{A}}=A$$

(x) 零一律

$$\overline{\varnothing}=U,\quad \overline{U}=\varnothing$$

(xi) 德摩根(De Morgan)律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

定义 1.1.10 以集合为元素的集合称为**集族**。

如果 $X\cap Y=\varnothing$,则集合 X 和 Y 不相交。如果集合 X 和集合 Y 是集族$\mathcal{S}$中的任意两个元素,且 X 和 Y 不相交,则称集族$\mathcal{S}$两两不相交。

例 1.1.11 $\mathcal{S}=\{\{a,c\},\{x,y\},\{1,2,3\}\}$ 是一个集族,并且集族$\mathcal{S}$两两不相交。

定义 1.1.12 集族$\mathcal{S}$的并集是由所有属于$\mathcal{S}$中某个集合 X 的元素构成的集合,即

$$\bigcup\mathcal{S}=\{x\mid x\in X,\text{对某个 } X\in\mathcal{S}\}$$

定义 1.1.13 集族$\mathcal{S}$的交集是由所有属于$\mathcal{S}$中每个集合 X 的元素构成的集合,即

$$\bigcap\mathcal{S}=\{x\mid x\in X,\text{对每个 } X\in\mathcal{S}\}$$

根据定义可以看出,集族的并集和交集其实是两个集合的并和交运算的推广。例如,令

$$\mathcal{S}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$$

则

$$\bigcup\mathcal{S}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid(x\in A_1)\vee(x\in A_2)\vee\cdots\vee(x\in A_n)\}$$
$$\bigcap\mathcal{S}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid(x\in A_1)\wedge(x\in A_2)\wedge\cdots\wedge(x\in A_n)\}$$

上述的并和交可以记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

进一步地,并和交运算可以推广到无穷多个集合的情况:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

定义 1.1.14 令$\mathcal{S}$表示由集合 X 的非空子集构成的集族，如果集合 X 的每个元素属于且仅属于$\mathcal{S}$的一个元素，则$\mathcal{S}$称为集合 X 的一个**划分**。

根据定义知，如果$\mathcal{S}$是 X 的一个划分，则$\mathcal{S}$是两两不相交的，且$\bigcup \mathcal{S} = X$。

例 1.1.15 令 $X = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$，则

$$\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

是 X 的一个划分。

定义 1.1.16 集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**笛卡尔积**定义为由所有有序 n 元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构成的集合，其中 $x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n$，并记为 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$。特别地，集合 X 与 Y 的笛卡尔积 $X \times Y$ 为所有有序对(x, y)构成的集合，其中 $x \in X, y \in Y$。

需注意有序 n 元组和 n 个元素的集合的区别，对于有序对(x, y)，当 $x \neq y$ 时，$(x, y) \neq (y, x)$，而对于集合$\{x, y\}$，当 $x \neq y$ 时，$\{x, y\} = \{y, x\}$。

对于任意集合 A，根据定义有

$$A \times \varnothing = \varnothing \quad \varnothing \times A = \varnothing$$

根据集合的势的定义不难推出，如果$|A| = m, |B| = n$，则$|A \times B| = mn$。

例 1.1.17 $A = \{a, b\}, B = \{0, 1, 2\}$，则

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$$
$$B \times A = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

从上例可以看出，在一般情况下，笛卡尔积的运算不满足交换律：

当 $A \neq \varnothing$ 且 $B \neq \varnothing$ 且 $A \neq B$ 时，

$$A \times B \neq B \times A$$

此外，笛卡尔积的运算不满足结合律：

当 $A \neq \varnothing$ 且 $B \neq \varnothing$ 且 $C \neq \varnothing$ 时，

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

笛卡尔积的运算对并和交运算满足分配率：

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

下面验证：$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$，其余的等式可以类似验证。

对任意的(x, y)，

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in A \times (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge y \in (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

因此 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

习　题

1. 用列举法表示下列集合。

(1) $A=\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $2<x<9\}$;

(2) $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$;

(3) $C=\{(a,b) \mid a,b\in\mathbf{Z}$ 且 $|a|<2, 0<b<3\}$。

2. 给定全集 $U=\{x \mid x\in\mathbf{Z}, |x|<10\}$, $A=\{1,2,7,8\}$, $B=\{-5,-6,7,8\}$, $C=\{-5,0,1\}$, 用列举法写出下列集合,并写出它的势。

(1) $A\cap B$;

(2) $B\cup C$;

(3) $A-C$;

(4) $\overline{B}$;

(5) $C\cup\varnothing$;

(6) $A\cap(B\cup C)$;

(7) $(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{C}-A)$;

(8) $(A\cup B)-(C\cap B)$。

3. 画出文氏图,并用阴影标记所给集合。

(1) $B\cup C$;

(2) $A\cup(B\cup C)$;

(3) $\overline{B}\cup C$;

(4) $\overline{A}$;

(5) $B\cap(\overline{C\cup A})$;

(6) $B\cup(B-A)$。

4. 设 $A=\{x,y\}$, $B=\{a,c,e\}$, 用列举法写出下列集合。

(1) $A\times B$;

(2) $B\times A$;

(3) $A\times A$;

(4) $B\times B$。

5. 设 $X=\{1,2\}$, $Y=\{\mathrm{y}\}$, $Z=\{\mathrm{b},\mathrm{c}\}$, 用列举法写出下列集合。

(1) $X\times Y\times Y$;

(2) $Z\times X\times Y$;

(3) $X\times Y\times Z$;

(4) $Z\times X\times Y\times Y$。

6. 判断下列每小题中的两个集合是否相等。

(1) $\{1,2,2,3\}$, $\{1,2,3\}$;

(2) $\{1,1,2\}$, $\{2,2,1\}$;

(3) $\{x \mid x^2=1\}$, $\{1,-2\}$;

(4) $\{x \mid x$ 是实数且 $0<x\leqslant 3\}$,$\{1,2,3\}$。

7. 判断下列语句是否正确。

(1) $\{a\}\in\{a\}$;

(2) $a\in\{a\}$;

(3) $\{a\}\subseteq\{a\}$;

(4) $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$。

8. 写出 $\mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$的所有元素。

9. 设集合 X、Y 和 Z 是全集 U 的任意子集,判断下列语句是否正确,并说明原因。

(1) $(X-Y)\cap(Y-X)=\varnothing$;

(2) $Z\subseteq X$ 或者 $X\subseteq Z$;

(3) $\overline{X\cap Y}\subseteq X$;

(4) $X\times(Y\cup Z)=(X\times Y)\cup(X\times Z)$。

1.2 命　　题

逻辑是所有数学推理的基础,对计算机的设计、人工智能、计算机程序设计、程序设计语言及计算机科学的其他领域,逻辑都有实际的应用。逻辑是研究推理的数学分支,而推理由一系列陈述句组成。例如,“因为今天下雨,所以我不跑步”是一个陈述句,并且这里的“今天下雨”和“我不跑步”也是两个陈述句。这些语句或者为真,或者为假,这种非真即假的陈述语句称为命题。

定义 1.2.1 一个具有唯一真值的陈述句称为**命题**。

根据定义,要判断一个语句是否为命题,需要验证:它是否是陈述句;它是否有唯一真值。

例 1.2.2 判断下列语句是否为命题。

(1) π 是无理数。

(2) 2008 年元旦是星期一。

(3) 火星上有水。

(4) 请勿吸烟。

(5) $x>10$

(6) $\sqrt{8}$ 大于 3 吗?

(7) 今天天气真好啊!

解 语句(1)是陈述句,并且为真,所以是命题。

语句(2)是陈述句,可以查到 2008 年元旦是星期二,所以这句话为假,是命题。

语句(3)是陈述句,虽然至今还不知道火星上是否有水,但火星上是否有水是客观存在的,只是目前人类还不知道而已,也就是说,这句话的真值是唯一的,所以它是命题。

语句(4)是祈使句,不是陈述句,所以不是命题。

语句(5)根据 x 的取值情况,可以为真,可以为假。例如,如果 $x=12$,则语句为真;如果 $x=2$,则语句为假。所以它不是命题。

语句(6)是疑问句,不是陈述句,所以不是命题。

语句(7)是感叹句,不是陈述句,所以不是命题。

在本书中,用小写英文字母(如 p,q,r,s 等)表示命题,用 T 表示真(true),用 F 表示假(false),于是命题的真值为 T 或 F。例 1.2.2 中的语句可以进行符号化,如

p:π 是无理数。

其中,p 为形式语言,"π 是无理数"是自然语言。

在自然语言中,经常会出现"非""和/且""或""如果……,则……""当且仅当",这些词称为联结词,不过自然语言中的联结词有时具有二义性,因此在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义,并且将它们符号化。

定义 1.2.3 令 p 为命题,p 的**否定**是命题"非 p",记为 $\neg p$。符号 $\neg$ 称为否定联结词。规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

定义 1.2.4 令 p 和 q 为命题。复合命题"p 与 q"称为 p 和 q 的**合取**,记为 $p \wedge q$。符号 $\wedge$ 称为合取联结词。规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 和 q 同时为真。

定义 1.2.5 令 p 和 q 为命题。复合命题"p 或 q"称为 p 和 q 的**析取**,记为 $p \vee q$。符号 $\vee$ 称为析取联结词。规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 和 q 同时为假。

定义 1.2.6 令 p 和 q 为命题。复合命题"如果 p,则 q"称为**条件命题**,或 p 和 q 的蕴涵式,记为 $p \rightarrow q$。其中 p 称为假设或前件,q 称为结论或后件,符号 $\rightarrow$ 称为蕴涵联结词。规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

定义 1.2.7 令 p 和 q 为命题。复合命题"p 当且仅当 q"称为**双条件命题**,或 p 和 q 的等价式,记为 $p \leftrightarrow q$。符号 $\leftrightarrow$ 称为双向蕴涵联结词或等价联结词。规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 和 q 同时为真或同时为假。

以上定义了 5 个最基本、最常用的逻辑联结词,其中 $\neg$ 为一元联结词,其余 4 个为二元联结词,根据定义,它们的真值可以由表 1.2.1 和表 1.2.2 所示真值表给出。

表 1.2.1 联结词 $\neg$ 的定义

p	$\neg p$
T	F
F	T

表 1.2.2 联结词 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ 的定义

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

注意条件命题 $p \rightarrow q$ 在假设 p 为假时,$p \rightarrow q$ 为真,称为默认为真或空虚真。例如,考虑条件命题

如果太阳从西边升起,则水往高处流。

因为"太阳从西边升起"是假的,使得上述条件命题默认为真。为了进一步理解为什么 p 为假时,$p \rightarrow q$ 定义为真,考虑下面的例子:

$$对所有的实数\ x,若\ x>0,则\ x^2>0 \tag{1.2.1}$$

容易知道,上述语句为真。如果令 p 表示 $x>0$,q 表示 $x^2>0$,则无论 x 取哪个实数,命题

$$如果\ p,则\ q \tag{1.2.2}$$

都为真。①若 $x=1$,则 p:$1>0$ 和 q:$1^2>0$ 都为真,并且由条件命题的定义,命题(1.2.2)为真。②若 $x=-1$,则 p:$-1>0$ 为假,但 q:$(-1)^2>0$ 为真,要使得这种情况下命题(1.2.2)为真,必须将条件命题在 p 为假,q 为真的情况下,定义为真。③若 $x=0$,则 p:$0>0$ 和 q:$0^2>0$ 都为假,要使得这种情况下命题(1.2.2)为真,必须将条件命题在 p 为假,q 为假的情况下,定义为真。

例 1.2.8 将下列命题符号化。

(1) 小明爱唱歌或爱画画。

(2) 小明是初三一班的学生或是初三二班的学生。

(3) 今天天很冷,并且还下雨。

(4) 如果小明努力学习,他将成为一名好学生。

(5) 天一刮风,雾霾就散了。

(6) 小明去过法国的充分条件是他去过埃菲尔铁塔。

(7) 今天下雪的必要条件是今天很冷。

解 (1) 令 p:小明爱唱歌,q:小明爱画画,则符号化为 $p \vee q$。

(2) 根据语句,可以看出小明或者是初三一班的学生,或者是初三二班的学生,但不能同时是两个班的学生,语句(2)中的“或”是排斥或。因此令 p:小明是初三一班的学生,q:小明是初三二班的学生,则符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$。

(3) 令 p:今天天很冷,q:今天下雨,则符号化为 $p \wedge q$。

(4) 令 p:小明努力学习,q:小明将成为一名好学生,则符号化为 $p \rightarrow q$。

(5) “一……就……”相当于“如果……,则……”。因此令 p:天刮风,q:雾霾散了,则符号化为 $p \rightarrow q$。

(6) 充分条件是指可以保证某结果的条件。因此,语句(6)等价于

如果小明去过埃菲尔铁塔,则他去过法国。

令 p:小明去过埃菲尔铁塔,q:小明去过法国,则符号化为 $p \rightarrow q$。

(7) 必要条件是得到某结果所必需的条件。因此,语句(7)等价于

如果今天下雪,则今天很冷。

令 p:今天下雪,q:今天很冷,则符号化为 $p \rightarrow q$。

例 1.2.9 将下列命题符号化,并指出它们的真值。

(1) $3+3=6$,并且巴黎是英国的首都。

(2) $5>9$,或者 9 是奇数。

(3) 如果 7 是素数,则 14 是素数。

(4) $\sqrt{5}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

(5) 纽约不是美国的首都。

解 (1) 令 p:$3+3=6$,q:巴黎是英国的首都,则语句(1)符号化为 $p \wedge q$。由于 p 为真,q 为假,所以 $p \wedge q$ 为假。

(2) 令 p:$5>9$,q:9 是奇数,则语句(2)符号化为 $p \vee q$。由于 p 为假,q 为真,所以 $p \vee q$ 为真。