

普通高等教育“十三五”系列教材

有限单元法 原理与计算

主编 周道传



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”系列教材

有限单元法 原理与计算

主编 周道传



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

·北京·

内 容 提 要

本书按照由浅入深和循序渐进的原则,详细介绍了有限单元法的基本理论和计算,内容包括平面三角形单元、平面矩形单元与六结点三角形单元、平面等参单元、高次等参单元、空间问题及薄板弯曲问题的有限元计算,以及基于位移变分方法和加权残值法的有限元基本理论。

本书作为有限单元法的课程教材,在编写过程中结合了编者多年来的教学经验和授课心得,突出了对计算能力的培养。因此在计算求解的思路、方法和步骤上都进行了细致的编排和详细的介绍,能让学生听得懂,记得住,掌握得牢。结合计算例题、课后习题和计算机语言编程,对学生的计算能力进行重点培养和锻炼,可取得较好的教学效果。

本书可作为高等学校水利、土木、材料、机械、船舶等专业的研究生教材,也可以作为力学类专业的本科生教材,并可供高等学校相关专业教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限单元法原理与计算 / 周道传主编. -- 北京 :
中国水利水电出版社, 2020.5
普通高等教育“十三五”系列教材
ISBN 978-7-5170-8573-7

I. 有... II. 周... III. ①有限元法—高等学校—
教材 IV. ①0241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第107879号

书 名	普通高等教育“十三五”系列教材 有限单元法原理与计算 YOUXIAN DANYUANFA YUANLI YU JISUAN
作 者	周道传 主编
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 11.75印张 293千字
版 次	2020年5月第1版 2020年5月第1次印刷
印 数	0001—1500册
定 价	32.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前言

本书出版的初衷是给土木工程专业的学生提供一本适用的有限单元法课程教材，同时本书也适用于高等学校水利、材料、机械、船舶、工程力学等相关专业的本科生和研究生培养。

全书共分8章，第1章介绍弹性力学基础知识和有限单元法基本概念等；第2章以平面三角形单元为例，详细介绍应用有限单元法求解平面问题的完整过程和计算细节，给出了每一部分求解内容的计算机程序，第2章是全书的重点内容，需要牢固掌握；第3章介绍平面矩形单元与六结点三角形单元的有限单元法计算，是学习等参单元和高次等参单元的基础；第4章介绍平面等参单元的计算，内容包括四结点任意四边形单元和高次等参单元的计算，给出了高斯数值积分计算方法，并介绍了变结点等参单元有限单元法计算列式；第5章介绍空间问题的有限单元法；第6章、第7章分别介绍基于位移变分方法和加权残值法的有限元理论；第8章介绍薄板弯曲问题的有限单元法。

本书系统全面地介绍了有限单元法基本理论，着重强调对计算能力的培养，在主要章节都辅以计算例题和习题，通过例题讲解和习题练习，巩固理论知识内容，提高学生动手计算能力；主要章节的计算部分，都有配套的计算机程序语言，培养学生编程计算能力。

由于编者水平有限，书中不妥或疏漏之处在所难免，欢迎广大师生和读者提出宝贵的修改意见和建议。

作者

2019年12月

目录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 有限单元法的发展	1
1.2 弹性力学基础知识	2
1.3 弹性力学基本方程及矩阵表示	7
1.4 有限单元法的概念与基本理论	14
1.5 拉格朗日插值方法	18
习题	20
第 2 章 平面三角形单元	22
2.1 单元划分与计算网络的自动生成	22
2.2 位移模式与解答的收敛性	24
2.3 等效结点荷载计算	30
2.4 单元分析	34
2.5 整体分析	44
2.6 支承条件的引入	47
2.7 整体刚度矩阵的一维压缩存储及程序	55
2.8 等效结点荷载列阵的形成程序	60
2.9 线性代数方程组的解法及程序	62
2.10 有限单元法计算总结及程序流程图	68
2.11 有限单元法计算结果的整理	69
习题	72
第 3 章 平面矩形单元与六结点三角形单元	74
3.1 矩形单元	74
3.2 矩形单元计算程序	79
3.3 面积坐标	80
3.4 六结点三角形单元	83
习题	89

第 4 章 平面等参单元	90
4.1 四结点任意四边形等参单元	90
4.2 平面等参单元的数学分析	93
4.3 平面等参单元的有限元计算	97
4.4 高斯数值积分计算方法	102
4.5 等参变换条件和等参单元的收敛性	109
4.6 高次等参单元	112
4.7 变结点等参单元的统一列式	117
习题	120
第 5 章 空间问题的有限单元法	122
5.1 空间四面体单元	122
5.2 体积坐标	128
5.3 高次四面体单元	128
5.4 空间六面体等参单元及位移模式	130
5.5 空间等参单元的数学分析	133
5.6 变结点空间等参单元的统一列式	137
习题	141
第 6 章 基于位移变分方法的有限元理论	142
6.1 弹性体的形变势能	142
6.2 虚位移原理	145
6.3 最小势能原理	148
6.4 利用最小势能原理推导几类问题的平衡条件	151
6.5 位移变分近似解法	155
6.6 位移变分近似解法应用于平面问题	157
6.7 利用变分原理推导平面问题有限元计算公式	159
第 7 章 基于加权残值法的有限元理论	164
7.1 微分方程的等效积分格式	164
7.2 加权残值法基本概念	164
7.3 加权残值法基本解法	165
7.4 最小二乘配点法	170
7.5 由加权残值法推导单元刚度矩阵	172
第 8 章 薄板弯曲问题的有限单元法	174
8.1 薄板小挠度弯曲问题的基本理论	174
8.2 矩形板单元	176
8.3 矩形板单元位移模式	177
8.4 矩形板单元的有限元计算列式	179
参考文献	182

第 1 章 绪 论

1.1 有限单元法的发展

通过对结构力学课程的学习，可以了解和掌握杆系结构内力的计算。然而，现实世界中，除了桁架结构可以简化为杆系结构进行计算外，大部分的结构都是连续体，比如楼板、剪力墙、大坝及基础平台等，对于这样的连续体结构，如何进行内力和变形计算呢？显然，结构力学的知识还不足以进行这样的计算，于是，需要学习有限单元法。

有限单元法概念的出现可以追溯到 1943 年，柯朗 (R. Courant) 首次提出“单元”的概念，定义了三角形区域上的分片连续函数，采用最小势能原理研究了圣维南扭转问题。1954—1955 年，阿吉里斯 (J. H. Argriss) 发表了关于结构分析矩阵方法的论文，并于 1960 年出版了《能量原理与结构分析》一书，对弹性结构的能量原理进行分析和研究。该书成为结构矩阵位移法的经典著作。1955 年，特纳 (M. J. Turner) 和克拉夫 (R. W. Clough) 采用自然离散的方法分析飞机结构的受力，将飞机结构分割成多个三角形和矩形单元，每一个单元用单元的结点力与结点位移相联系的单元刚度矩阵来表征，把矩阵位移法的思想应用于解决弹性力学平面问题，随后提出了用直接刚度法集合有限元的整体方程组。1960 年，克拉夫在研究平面弹性问题的论文中首次提出了“有限单元法”的名称。

20 世纪 60 年代，许多学者，如梅劳斯 (R. J. Melosh)、贝赛林 (J. F. Besseling)、琼斯 (R. E. Jones)、卞学璜、赫尔曼 (L. R. Herrmann)、毕奥 (M. A. Biot)、普拉格 (W. Prager)、董平等，为各种不同变分原理的有限元模型研究做出了贡献。

有限单元法的方程不一定都建立在变分原理的基础上。1969 年，奥登 (J. T. Oden) 从能量平衡原理出发，成功地给出了热弹性问题有限元分析的方程组。斯查勃 (B. A. Szabo) 和李 (G. C. Lee) 在 1969 年利用伽辽金法得到了平面弹性问题的有限元解。

从单元的类型而言，有限单元法已从一维的杆单元、二维的平面单元发展到三维的空间单元、板壳单元、管单元等，从常应变单元发展到高次单元。1966 年，欧格托蒂斯 (B. Ergatoudis)、艾路斯 (B. M. Irons) 和泽凯维奇 (O. C. Zienkiewics) 为等参数单元的发展奠定了基础，使计算精度有较大提高，并可适用于各种复杂的几何形状和边界条件。

有限单元法起源于结构分析，被广泛应用到各种工程和工业领域，成为解决数学物理方程的普遍方法。现在有限单元法已经广泛应用于固体力学、流体力学、传热学、电磁学、声学、生物力学等各个领域，能求解杆、梁、板、壳、块体等各类单元的弹性（线性和非线性）、黏弹性和弹塑性问题（包括静力和动力问题），各类场分布问题（流体场、温度场、电磁场等的稳态和瞬态问题），水流管路、电路、润滑、噪声以及固体、流体、温度相互作用的问题。随着现代力学、计算数学和计算机技术的发展，有限单元法作为一个

具有坚实理论基础和广泛应用效力的数值计算工具，将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身也将得到进一步的发展和完善。

1.2 弹性力学基础知识

在有限单元法中要经常用到弹性力学的基本方程和与之等效的变分原理，因此，在学习有限单元法之前，需要先学习弹性力学的基础知识。

1.2.1 弹性力学基本假设

弹性力学是研究弹性体在外界因素作用下产生应力、应变和位移的分布规律的学科。与材料力学、结构力学的研究对象不同，弹性力学的研究对象是非杆状结构，即连续弹性体结构，如板、壳、块体以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构。为了将这些研究对象抽象为理想模型，弹性力学对研究对象做出如下基本假设。

1. 完全弹性假设

弹性力学的研究对象是完全弹性体，所谓的完全弹性体，是指假设在引起其变形的外界因素消除之后，能完全恢复原状而没有任何残余形变的物体，又称为弹性体。这样，弹性体在任一瞬间的形变就完全取决于它在这一瞬间所受的外力，而与它过去的受力历史无关。这样，物体的变形完全符合胡克定律，即形变与引起形变的应力成正比的关系，两者之间是成线性关系的。弹性常数 E 、 G 、 μ 与受力历史无关，不随应力或形变的大小而变化。由材料力学可知，塑性材料物体，在应力未达到屈服极限之前是近似的完全弹性体；脆性材料物体，在应力未超过比例极限之前，也是近似的完全弹性体。

2. 连续性假设

假设完全弹性体是连续的，即整个弹性体的体积都被组成这个物体的介质所填满，没有任何空隙。这样，弹性力学中的各种已知量和未知量，比如应力、形变和位移等才可能是连续的，都可以用位置坐标的连续函数来表示。通过这些函数也可以求所需要的各阶导数，来满足计算的需要。事实上，一切物体都是由微粒组成的，严格来说都不符合这个连续性的假定。但是，从统计平均的观点来看，微粒大小以及各微粒之间的距离要远小于物体的几何尺寸，因此，关于物体连续性的假设又是合理的，不会引起显著的误差。

3. 均匀性假设

假设完全弹性体是均匀的，即整个物体是由同一类型的均匀材料组成的。这样，整个物体的所有部分都具有相同的物理性质，物体的物理参数（如弹性常数 E 、 G 、 μ ）与位置坐标无关，不随位置坐标的变化而发生改变。根据这个假设，在研究中就可以取弹性体中任一部分（或任意一点）来研究，然后把分析结果用于整个物体。实际工程结构当然不是这样，例如，混凝土由砂、石、水泥构成，各点材料常数不完全相同。但是，每一种材料的粒径远远小于物体几何尺寸，而且在物体内均匀分布，从宏观意义上说，这个物体就可以被当作是均匀的。

4. 各向同性假设

假设物体在不同的方向上具有相同的物理性质，因而物体的弹性性质在所有方向上都

相同。这样，物体的弹性常数 E 、 G 、 μ 才不会随着方向的变化而改变，可以在任意方向建立坐标系来研究物体的应力、形变和位移变量。实际上，单晶体是各向异性的，木材和竹材也是各向异性的，实际工程构件在不同方向的弹性存在差异。按照宏观统计的观点，在进行弹性力学分析时，可以将其当作各向同性来对待。

凡是符合上述 4 个假设的物体，均可称为理想弹性体。此外，还需要对物体的变形状态作小变形假定。

5. 小变形假设

所谓小变形假设，指的是假设在力和温度变化等外界因素作用下，整个物体中所有点的位移远小于物体原来的尺寸，因而，应变分量和转角都远小于 1。应用小变形假设，可使计算得到显著的简化。例如，在建立物体变形之后的平衡微分方程时，就可以用变形以前的尺寸代替变形以后的尺寸，而不考虑由变形引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角的二次和更高次幂或二次乘积以上的项，使得到的关系式都是线性的，这样弹性力学的几何方程和物理方程就都可以简化为线性方程求解。小变形假设又称为几何线性假设。通过这个假设，弹性力学问题都可转化为线性问题，从而可以应用叠加原理求解。

因此，弹性力学所研究的问题都是理想弹性体的小变形问题，属于线弹性力学范畴。

1.2.2 弹性力学基本概念

弹性力学的研究对象都是超静定结构的理想弹性体，需要从静力学、几何学和物理学三方面入手，建立平衡微分方程、几何方程和物理方程。在介绍这三大方程之前，需要对弹性力学的基本概念有所了解。

1. 外力

作用于物体上的外力可以分为 3 种类型，分别是体力、面力和集中力。

(1) 体力。体力是指分布在物体内部所有质点上的力，又称为体积力，如重力、惯性力和电磁力等。一般来说，弹性体内各质点所受的体力是不相同的。为了明确任意一点 P 的体力大小和方向，引入体力集度的概念，如图 1.1 所示。在 P 点取一微小体积，记为 ΔV ，各点所受外力在该微小体积内的合力为 ΔF ，则平均集度为 $\frac{\Delta F}{\Delta V}$ 。当微小体积不断缩小，逐渐收拢到 P 点时，则 ΔV 和平均集度 $\frac{\Delta F}{\Delta V}$ 都不断变化而最后趋于 P 点，成为一个

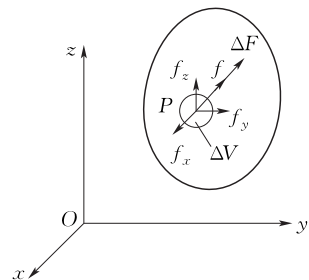


图 1.1 体力集度

极限矢量 f 。这个极限矢量 f 就是 P 点的体力集度，即 $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f$ 。

体力集度 f 表明了 P 点体力的大小、方向和作用点。体力集度是矢量，记为黑体字母 f 。将体力沿着 3 个坐标轴 x 、 y 、 z 分解，可得到它在 3 个坐标轴上的投影，分别为 f_x 、 f_y 、 f_z ，称为 f 的 3 个体力分量。它们是标量，其正负号以与坐标轴正向相同为正，相反为负。体力及其分量的量纲是 $ML^{-2}T^{-2}$ ，单位是 N/m^3 ，体力集度可以表示为 $f = f_x i + f_y j + f_z k$ ，或

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (1.1)$$

注意：本教材为了区分矢量和标量，矢量字母用黑体，标量不用黑体。 i 、 j 、 k 表示坐标单位矢量，上标 T 表示矩阵的转置。

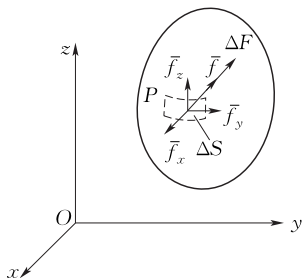


图 1.2 面力集度

(2) 面力。面力是指分布在物体外表面上的外力，又称为面积力，如风力、大气压力、流体压力、接触力等。面力在各表面点上也是各不相同的。如图 1.2 所示，面力同样是用其集中程度来表示，是任一点面力平均集度的极限，即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{\mathbf{f}} \quad (1.2)$$

这个极限矢量 $\bar{\mathbf{f}}$ 就是 P 点所受面力的集度。矢量 $\bar{\mathbf{f}}$ 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 \bar{f}_x 、 \bar{f}_y 、 \bar{f}_z 称为在 P 点的面力分量。面力分量以与坐标轴正向相同为正，相反为负。面力及其分量的

量纲是 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ ，单位是 N/m^2 或 Pa 。面力集度可以表示为 $\bar{\mathbf{f}} = \bar{f}_x \mathbf{i} + \bar{f}_y \mathbf{j} + \bar{f}_z \mathbf{k}$ 或

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{f}_z \end{Bmatrix} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y \quad \bar{f}_z]^T \quad (1.3)$$

(3) 集中力。集中力指集中作用于物体上一点的外力，在有限单元法的等效结点荷载计算中要用到集中力的概念。

2. 应力

物体在外界因素（外力、温度变化等）作用下，其内部各部分之间要产生相互的作用力，这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间相互作用的力，称为内力。如图 1.3 所示，假定弹性体内任意一点 P ，使截面 $m-n$ 通过 P 点，将弹性体分为 A 和 B 两部分， B 部分对 A 部分的作用力在 P 点附近微小面积 ΔS 上的合力为 ΔF 。和面力的集度定义相类似，当 ΔS 不断缩小，收拢到 P 点时，极限矢量 \mathbf{p} 就是物体在截面 $m-n$ 上 P 点的应力，即

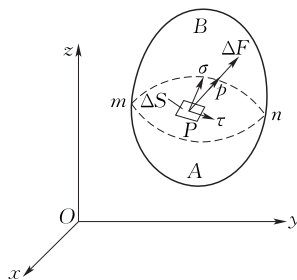


图 1.3 应力的定义

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \mathbf{p} \quad (1.4)$$

因为 ΔS 是标量，所以，应力 \mathbf{p} 的方向就是 ΔF 的极限方向。任一截面上的全应力 \mathbf{p} ，可以沿坐标轴分解为 p_x 、 p_y 、 p_z 三个分量，即 $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$ 。另外， \mathbf{p} 也可沿截面 $m-n$ 的法线方向及微分面方向进行分解，分别用 σ 和 τ 来表示，分别代表截面的正应力和切应力，切应力又被称为剪应力，如图 1.3 所示。应力及其分量的量纲是 $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ ，单位是 N/m^2 或 Pa 。

3. 一点的应力状态

通过物体内任意一点，可以作无数个不同方向的微分面，因此，凡是提到应力，必须要指出是对物体哪一点，并通过该点的哪一个微分面来说的。显然，对相同一点，不同微分面上的应力一般来说是不同的。所谓一点的应力状态，指的是物体内同一点各微分面上的应力情况。研究一点的应力状态，对研究物体的强度是十分重要的。

为了分析一点的应力，首先来分析通过一点的各直角坐标面上的应力分量。在物体内一点 P 取出一个微小的正平行六面体，如图 1.4 所示。正平行六面体的棱边分别平行于 3 个坐标轴，长度分别是 $PA = dx$, $PB = dy$, $PC = dz$ 。它的 6 个面的外法线都是沿着坐标轴方向的。凡外法线沿坐标轴正方向的，该面称为正坐标面或正面；凡外法线沿坐标轴负方向的，该面称为负坐标面或负面。每一个面上的全应力 \mathbf{p} 都可以分解为一个正应力和两个切应力。例如，用 σ_x 表示作用在外法线沿着 x 轴的面上沿着 x 方向的正应力， τ_{xy} 表示作用于外法线沿着 x 轴的面上沿着 y 方向的切应力， τ_{xz} 表示作用于外法线沿着 x 轴的面上沿着 z 方向的切应力，其余面上的正应力和切应力以此类推。

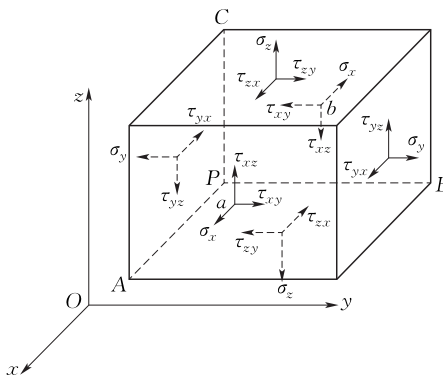


图 1.4 正平行六面体的应力分量

由于应力和内力都是成对出现的，在弹性力学中，应力的正负号是这样规定的：凡作用在正坐标面上的各应力，以沿坐标轴正向为正；凡作用在负坐标面上的各应力，以沿坐标轴负向为正，反之都为负。可见，图 1.4 中的各个应力分量均是正号。

这样，就得到了任意一点 P 的 3 个微分面上的 9 个应力分量。只要知道一点的 9 个应力分量，根据几何关系和平衡关系，就可以求出该点各个微分面上的应力。也就是说，9 个应力分量将完全确定一点的应力状态。将这 9 个应力分量写为矩阵的形式，得到应力矩阵 σ ，为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

在式 (1.5) 中，6 个切应力之间存在两两相等的关系。例如，连接六面体前后两个面中心点，可得到直线 ab ，以直线 ab 为矩轴，可以列出力矩平衡方程，得

$$2\tau_{yz} dz dx \frac{dy}{2} - 2\tau_{zy} dy dx \frac{dz}{2} = 0$$

同样，可以列出其余两个相似的方程，经过计算，得到

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.6)$$

式 (1.6) 就是切应力互等定理，即：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，切应力符号的两个下标字母可以对调。这样，6 个切应力分量可以缩减为 3 个切应力分量，应力矩阵 σ 可以缩减为应力列阵，记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (1.7)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力列阵或应力向量，它是一个 6×1 的列向量，已知一点的应力列阵，就可以求出经过该点的任意微分面上的正应力和切应力。

因此，上述 6 个应力分量可以完全确定一点的应力状态。

4. 形变

形变指的是物体形状的改变。物体的形状可以用它各部分的长度和角度来表示，因此，物体的形变可归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在某一点 P 的形变状态，在这一点沿着坐标轴 x 、 y 、 z 的正方向取 3 条微小的线段 PA 、 PB 、 PC ，如图 1.4 所示。物体变形以后，这 3 条线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。单位长度上的线段的收缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为线应变，亦称正应变；各线段之间直角的改变量，用弧度表示，称为切应变，亦称剪应变。正应变用字母 ϵ 表示，例如， ϵ_x 表示 x 方向上的线段 PA 的正应变，其余以此类推；切应变用字母 γ 表示，例如， γ_{yz} 表示 y 和 z 两个正方向的线段（即 PB 、 PC ）之间直角的改变量，其余以此类推。线应变以伸长为正，缩短为负；切应变以直角减小为正，直角增大为负。正应变和切应变都是无量纲的量。

可以证明，在物体的任意一点，如果已知 ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 这 6 个直角坐标方向线段的应变分量，就可以求得经过该点的任意线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变量。这 6 个应变分量记为应变列阵或应变向量 $\boldsymbol{\epsilon}$ ，即

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \quad (1.8)$$

和应力列阵一样，应变列阵 $\boldsymbol{\epsilon}$ 也是一个 6×1 的列向量。已知一点的应变列阵，就可以求出经过该点任意线段的正应变以及经过该点任意两个线段之间的切应变。因此，上述 6 个应变分量可以完全确定一点的形变状态。

5. 位移

物体在发生变形过程中，各点都会有位置的移动，称为位移。位移是矢量，物体内任意一点的位移，用它在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示，位移分量以沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为负。位移及其分量的量纲是 L ，单位是 m 。位移也可用列向量来表示，记为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [u \quad v \quad w]^T \quad (1.9)$$

一般来说，弹性体内的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量在弹性体内各点是不同的，它们都是空间位置坐标的函数。

1.3 弹性力学基本方程及矩阵表示

弹性力学的研究方法是在弹性体内部区域 V 上分别建立平衡微分方程、几何方程和物理方程，在边界 S 上建立应力边界条件和位移边界条件，然后，在边界条件下求解上述 3 个微分方程组，得出物体应力、应变和位移的解答。本节介绍平衡微分方程、几何方程和物理方程及这些方程的矩阵表示。

1.3.1 平衡微分方程

在弹性体内任取一点 P ，取出一个微小的正平行六面体，如图 1.5 所示。正平行六面体的棱边分别平行于三个坐标轴，长度分别是 $PA = dx$ ， $PB = dy$ ， $PC = dz$ 。在微元体的 6 个微分面上作用着内力，各由一个正应力和两个切应力表示。

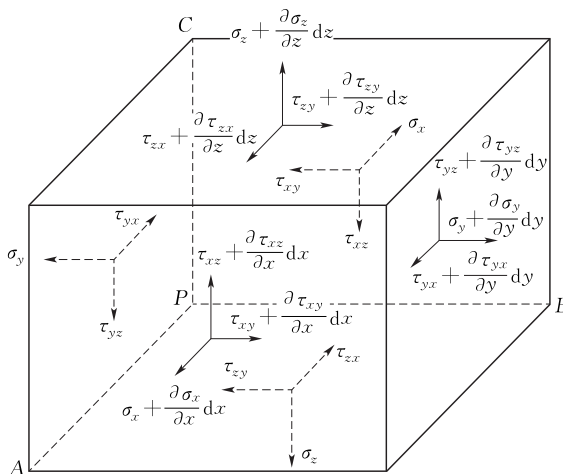


图 1.5 正平行六面体上的应力分布

一般来说，应力分量是空间位置坐标 x 、 y 、 z 的函数，因此，作用于两个相对面上的应力分量不相等而具有微小的差量。例如，设作用于后面的正应力是 σ_x ，则对于前面的正应力，由于 x 坐标改变为 $x+dx$ ，按照连续性的基本假定，将 $\sigma_x(x+dx)$ 用泰勒级数展开式表示，得到 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots$ ，略去二阶及二阶以上的微量后，前面的正应力变成 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 。同理，可以得到前面的切应力，分别为 $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ 和 $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$ ；也可以得到其他面上的应力分量，如图 1.5 所示。因为六面体体积是微小的，所以，各个面上的应力被认为是均匀分布的，其合力作用点位于该面的中心。同理，六面体

的体力也是均匀分布的，体力的合力作用点在体积的中心。

于是，以 x 轴为投影轴，列出投影轴上的力的平衡方程，即 $\Sigma F_x = 0$ ，可得到

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{yx} dzdx \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + f_x dxdydz = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

将式 (1.10) 两边同时除以 $dxdydz$ ，化简得到

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (1.11)$$

类似地，分别以 y 轴、 z 轴为投影轴，可列出投影轴上的力的平衡方程，即 $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$ 。重复上述计算过程，可以得到

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (1.13)$$

同时注意到， $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ， $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ ，代入式 (1.11) ~ 式 (1.13)，可得到弹性体内任一点的平衡微分方程，为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

平衡微分方程给出了弹性体内任一点的体力和应力分量的平衡关系，又称为纳维叶 (Navier) 方程。平衡微分方程用矩阵表示为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

式中： \mathbf{L} 为微分算子矩阵； $\boldsymbol{\sigma}$ 为前述的应力列阵，见式 (1.7)； \mathbf{f} 为体力列阵，或称为体力向量。

由式 (1.14) 和式 (1.15) 可得

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^T \quad (1.17)$$

由式 (1.16) 可得到

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

对于平面问题，有

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (1.20)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = [f_x \quad f_y]^T \quad (1.21)$$

可见， \mathbf{L}^T 是一个 3×6 的矩阵， \mathbf{L} 是一个 6×3 的矩阵， $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个 6×1 的列阵， \mathbf{f} 是一个 3×1 的列阵。对应平面问题，上述矩阵的元素都有所缩减。平衡微分方程及相应矩阵的元素都要熟记，后面会经常用到。

1.3.2 几何方程

几何方程是从几何学的角度研究物体变形和应变之间的关系，因为并不涉及产生变形的原因和物体的物理性能，因而几何方程对一切连续介质都是适用的。以微元体 $dV = dx dy dz$ 为例，将微元体投影到坐标面 xOy 上，得到矩形平面微元，如图 1.6 所示。

设边长 $PA = dx$ ， $PB = dy$ 。在弹性体发生变形后， P 点移动到 P' 点， PP' 的平面位移可以沿坐标轴分解为 u 和 v 两个分量，就是 P 点在 xOy 平面的两个位移分量。由 A 、 B 和 P 之间的坐标关系及连续函数 u 和 v 的泰勒展开，得到 A 点

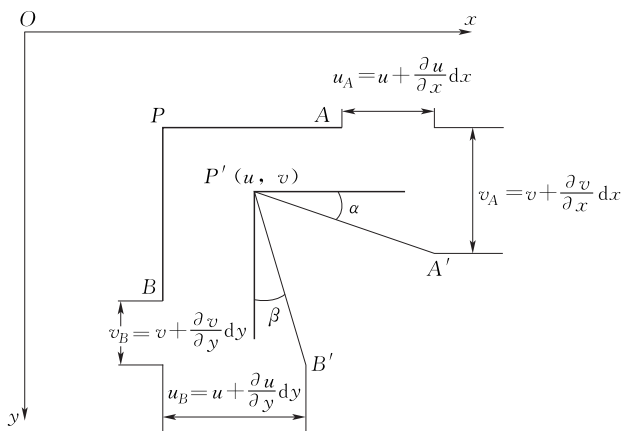


图 1.6 投影到坐标面 xOy 上的平面微元

和 B 点的位移, 分别是

$$u_A = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v_A = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (1.22)$$

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v_B = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (1.23)$$

因此, dx 和 dy 的相对伸长及它们之间的直角的减小量为

$$\epsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} \approx \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.24)$$

$$\epsilon_y = \frac{P'B' - PB}{PB} \approx \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.25)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - u}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.26)$$

式 (1.24) ~ 式 (1.26) 即是 xOy 平面方向的几何关系。

同理, 将上述方法向 xOz 和 yOz 坐标面方向推广, 得到类似的几何关系。经过整理, 去掉重复的表达式, 得到弹性体内任一点的应变与位移关系, 即几何方程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

几何方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (1.28)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变列阵, 或称为应变向量, 见式 (1.8); \mathbf{u} 为位移列阵, 或称为位移向量, 见式 (1.9)。

对于平面问题, 有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1.29)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [u \quad v]^T \quad (1.30)$$

式 (1.27) 又称为柯西 (Cauchy) 方程。

1.3.3 物理方程

物理方程是建立弹性体中应力和应变关系的方程。理想弹性体在小变形情况下, 应力和应变之间是线性关系, 即服从广义胡克定律。广义胡克定律有两种表示形式, 每种形式都含有 6 个方程式, 第一种形式是用应力来表示应变, 为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

式中: E 为拉压弹性模量, 简称为弹性模量; G 为剪切弹性模量, 又称为切变模量或刚量模量; μ 为材料泊松比, 它表示材料单向拉压时, 横向正应变和轴向正应变的比值。

E 、 G 、 μ 是由实验测定的材料性能常数, 它们之间满足下列关系式:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.32)$$

将式 (1.31) 的上面三式相加, 可得到 $\sigma_y + \sigma_z$ 的表达式, 再代入式 (1.31) 的第一个式子, 可解出 σ_x , 就可以得到广义胡克定律的第二种表示形式, 即用应变来表示应力, 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G\epsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

式中: λ 、 G 为拉梅 (Lame) 常数。

G 的表达式见式 (1.32), λ 的表达式为

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu} \quad (1.34)$$

物理方程用矩阵可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (1.35)$$

式中: \mathbf{D} 为弹性矩阵, 它是一个对称矩阵。

\mathbf{D} 的表达式为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1.36)$$