

初等数学核心素养发展丛书

丛书主编 马志平

高中数学 思想方法

认知升级，学会思考
让数学研究有章可循

主 编 李文臣
副主编 吕 鹏 蔡 镇



HIGH SCHOOL
MATHEMATICS



中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

初等数学核心素养发展丛书

丛书主编 马志平

高中数学思想方法

认知升级,学会思考,让数学研究有章可循

主 编 李文臣

副主编 吕 鹏 蔡 镇

中国海洋大学出版社

· 青 岛 ·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学思想方法 / 李文臣主编. — 青岛 : 中国海洋大学出版社, 2019. 3

ISBN 978-7-5670-1880-8

I. ①高… II. ①李… III. ①中学数学课—教学研究—高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 252333 号

高中数学思想方法

认知升级,学会思考,让数学研究有章可循

出版发行	中国海洋大学出版社	
社 址	青岛市香港东路 23 号	邮政编码 266071
网 址	http://pub.ouc.edu.cn	
出 版 人	杨立敏	
责任编辑	孟显丽 刘宗寅	
电 话	0532-85901092	
电子信箱	1079285664@qq.com	
印 制	青岛国彩印刷有限公司	
版 次	2019 年 11 月第 1 版	
印 次	2019 年 11 月第 1 次印刷	
成品尺寸	170 mm×230 mm	
印 张	16.75	
字 数	270 千	
印 数	1~5000	
定 价	45.00 元	
订购电话	0532-82032573(传真)	

发现印装质量问题,请致电 0532-58700168,由印刷厂负责调换.

编委会

主 编 李文臣

副主编 吕 鹏 蔡 镇

编 委 钟 鸣 曹成俊 林桂礼

冯丽萍 常发友 张文澜

致读者

笛卡尔说：“数学是知识的工具，亦是其他知识工具的源泉。”华罗庚说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”由此可见，数学的地位与学好数学的重要性。

很多人对于学好数学有以下三种观点：一是认为掌握好数学的基础知识和基本方法，在此基础上练好基本技能（俗称“三基”），就算学好数学了，研究综合问题，只是上述基本要素的简单连接和组合而已；二是认为数学能力主要靠解综合题来体现，而解综合题的方法只能靠“闯”，只要锲而不舍地反复试探，只要有足够坚强的意志和不懈的毅力，即便是在黑暗之中摸索，也肯定会获得最后的成功；三是认为解数学题的一些具体规律是存在的，如对代数、三角、解析几何和立体几何中的一些习题能总结出它们的题型特征与解法特征，而这些规律之外的一般性规律是不存在的，因此只能靠多“刷题”来学好数学。

以上三种观点都有一定的道理，但也都存在一些偏颇。辩证地分析数学学习，我们提出以下三点看法。

1. “三基”是根本，是“金字塔”的基础，它们就像是盖大楼用的预制件。不过，“盖大楼”——学数学只有“预制件”是不够的，还有个如何拼装的问题（即一般性的数学思想方法）。

2. 解题过程中，试探是必要的，但要讲究方法、尊重规律，要有目标和方向，要坚持一定的原则；单纯地闯，也有可能成功，但是偶然性太大、效率很低。因此，要始终保持清醒的头脑，提高思维的自觉性，克服思维的盲目性。就像军人作战一样，不仅仅要有过硬的基本功，还要有相当的战术素养，更要有长远的战略谋划。

3. 多刷题就可以学好数学，这是历史上“题海战术”的翻版，是一种最低效的学习方法。数学学习能力可以在数学学习实践中自发形成，但是，这是一个漫长的过程。事实上，靠刷题来学习数学是十分不科学的。



本书将在如何科学有效地提高数学学习效率方面给出比较详尽的论述。

基于此,对于学好数学,有以下两点建议供大家参考。

1. 具体的解题方法具有鲜明的特征,便于操作和应用,但它们只是解题规律的“一招一式”。对这些具体方法的运用能力是在数学基础知识学习基础上形成的初级数学能力。任何事物的发展都有更一般的规律,它们适用范围广泛,具有普遍指导意义。能揭示数学规律的就是数学思想方法,对数学思想方法的理解、掌握是学好高中数学的根本保证。

只掌握具体的解题方法,对数学能力提高的作用是有限的。只有运用数学思想方法认识数学及其发展变化规律,才能“看见树木便知森林,遇到江河便见大海”。

2. 和科学研究一样,研究数学问题仅靠自己的聪明才智是不够的,还要有科学的方法;即便是解题中的创新,也不是仅靠一时的灵感产生的,而是有章可循、有法可依的。理解和尊重前人留给我们的宝贵数学财富,才能使我们的创新真正插上成功的翅膀;这些财富不仅仅是数学知识,还包括众多经典的、科学的、行之有效的数学思想方法。这种认识,才是科学辩证的数学发展观的体现。

本书在编写体例上,放弃了传统的按部就班的问题解答方式,而是采用了探究方式,重在揭示数学问题的探究过程和思考方式,力求重现数学探究过程中的各种心理反应。我们倡导“做数学”的理念,让你亲临其境,动脑、动手与动脑,全身心参与阅读、研究过程,学会思考,掌握科学有效的数学思想方法。这些,就是编写本书的主要目的。

祝广大读者掌握科学的数学思想方法,游刃有余地学好高中数学,发展数学学科的核心素养。

李文臣

2019年8月

目 录

第一章	数学方法	(1)
第一节	配方法	(2)
第二节	基本量法与消元意识	(10)
第三节	换元法	(21)
第四节	待定系数法	(33)
第五节	作差法(比较法)	(46)
第六节	放缩法	(62)
第七节	反证法	(76)
第八节	数学归纳法	(88)
第九节	综合法与分析法	(102)
第二章	数学思想	(115)
第一节	函数与方程思想	(117)
第二节	数形结合思想	(151)
第三节	分类讨论与整合思想	(189)
第四节	等价转化思想	(218)

第一章 数学方法

数学方法是指在数学研究中,即发现问题、提出问题、分析问题、解决问题(包括数学内部问题和实际应用问题)的过程中,所采用的各种特定的方式、手段、途径等,如配方法、待定系数法、基本量法、标准化法、消元法、换元法、作差法、放缩法、反证法、数学归纳法等.

数学方法是解决数学问题的常规策略和基本方法,是数学思想的具体体现,是初等数学学习的重要基石之一.

数学的基本方法有明确的指向性,它以具体的数学知识为载体,又高于具体的数学知识.一般来说,数学方法对于解决相应的数学问题呈现出非常明确且相对稳定的结构特征和解法特点,可操作性强,比较容易把握.使用数学方法解决问题,可以使数学探究过程简洁、高效.

知识的获得过程并非学习者被动接受知识的过程,而是学习者以已有的认知结构为基础对认知结构进行能动构建的过程.所有的数学观念,都是在螺旋式上升的过程中完善起来的.对于数学方法的学习和应用,一方面有利于对数学知识发生、发展过程的提炼、抽象、概括和升华,有利于对数学规律形成理性认识;另一方面是使对数学的认识再上一个新的台阶,为理解高层次的数学思想奠定坚实的基础.从以上两个方面来看,数学的基本方法在数学学习中具有承上启下的作用,意义重大.另外,学习和运用数学方法,可以领悟数学的真谛,懂得数学的价值,使数学研究有章可循、有法可依、少走弯路.因此,学会用科学的数学方法去思考和解决问题是十分必要的.



第一节 配方法

小明参加学校的数学竞赛培训班,开始很顺利,可是最近遇到了一道让他十分纠结的习题:求所有 k 的值,使得关于 x 的方程 $2x^2 - 2(k-5)x - 3k + 31 = 0$ 的根皆为整数.

百思不得其解之后,按照老师的提示,他对配方法做了全面的学习,最后豁然开朗.

对于上述习题,你可以放手一试;如果不成,你可以研读一下本节的所有内容,或许会有意外收获.此题的答案在本节的最后.

在欧洲,从古埃及巴比伦时代直至中世纪,人们对一元二次方程的研究一直局限于几种比较特殊的形式.贵族们的聚会上,往往会出现关于一元二次方程的展示和比赛.在当时,谁能解出几个一元二次方程便是一种荣耀,甚至异国贵族之间的书信也经常有讨论一元二次方程的内容.这说明当时对数学问题的研究已经成了贵族之间秀智商和炫耀文化的资本.欧洲工业革命的成功,实际上也是爱智求真的底层文化促进社会发展的光辉结晶.

公元820年,阿拉伯的阿尔·花刺子模(al-Khwārizmi, 783—850)出版了《代数学》一书.该书讨论了方程的解法,除了给出二次方程的几种特殊解法外,还第一次用配方法给出了一元二次方程的一般解法;承认方程有两个根(承认无理根存在但却未认识到有虚根存在),即由一般式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)可以变成配方式 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$,从而得到一元二次方程求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

随着无理数不断地被认可,开平方方法和求根公式不断受到普通学者的肯定.法国的韦达(1540—1603)通过配方式 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 直接开平方方法求出方程的解:如果右边是非负数,则方程有两个实根;如果右边是一个负数,则方程有一对共轭虚根.一元二次方程的求根公式在方程的系数为



有理数、实数、复数或是任意数域中适用.

韦达对一元二次方程的求根公式进行了进一步研究,发现了一元二次方程的根与系数的关系(韦达定理).

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ 的两根 x_1 和 x_2 有如下关系:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$$

配方法对二次函数的研究也有决定性作用:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=\dots$$

配方法主要明确了二次函数的最值和对应抛物线的顶点坐标、对称轴(对称轴原理在现行初中课本里面没有给出明确的解释,只是从图象上去感知). 应注意的是,在二次项系数为1的标准状态下,对于配方后的结果,首先要配备一次项系数的一半,然后配平常数项.

时至今日,配方法的作用已经远远超出了原来的范畴. 配方法一旦得以应用或者结合一下韦达定理,对很多数学问题往往会有意想不到的突破.

一、配方法会简化运算

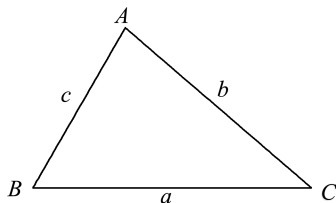
配方法运用得合理,会出现全新的结构特点. 抓住这些特点,可以发现解题的捷径,避开那些不必要的计算或者简化很多烦琐的运算.

配方法是对数学式进行一种定向变形的技巧. 通过配方后的新结构,可以更加清晰地观察到研究对象的性质和发展规律,取得化繁为简的效果,从而找到已知和未知之间的联系.

例1 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C , 其中 B 为 A, C 的平均数, 最大边, 最小边是方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两个根, 求 $\triangle ABC$ 的面积和周长.

探究: $2B=A+C$, 又 $A+B+C=180^\circ$, 所以 $B=60^\circ$, 最大边和最小边应该是另外两个角的对边 a, c .

方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两个根本来可以解出来, 但是它们太“复杂”了, 所以可以考虑运用韦达定理, “设而不求, 瞒天过海”: $a+c=9, ac=\frac{32}{3}$.



例1图①



如图,过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 直角三角形 ABD 中, 斜边等于 c , 所以 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $BD = \frac{1}{2}c$, 三角形的面积 $S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

要求周长, 只要搞定 B 的对边 b 即可.

请关注直角三角形 ACD , $CD = a - \frac{1}{2}c$.

由勾股定理可得:

$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}c\right)^2 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac = 81 - 32 = 49, b=7,$$

所以该三角形的周长为: $a+c+b=16$.

注意: 学了余弦定理, 你肯定会找到更简洁的方法.

不过, 这里还是要提醒一下: 何时使用韦达定理呢? 一般来说, 在遇到字母系数的一元二次方程, 或者尽管是数字系数但方程的解比较“复杂”的时候, 应该考虑使用韦达定理.

“设而不求”就像孙子兵法里的“瞒天过海”, 是一种比较高的技巧, 可以避免许多复杂的计算而直达解题目标. 本题中, 韦达定理和配方法为“设而不求”铺平了道路.

例 2 (1) 设 a, b, c, x, y, z 是正数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 10 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 40 \cdots \cdots \textcircled{2}$, $ax + by + cz = 20 \cdots \cdots \textcircled{3}$, 则 $\frac{a+b+c}{x+y+z} = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

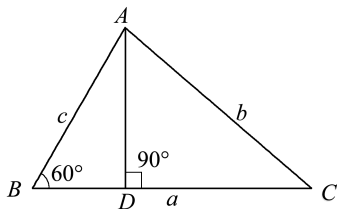
(2) 已知长方体的表面积为 11, 其 12 条棱的长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 (\quad) .

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{14}$ C. 5 D. 6

探究: (1) 观察结论, 我们可以猜测 a, b, c 与 x, y, z 可能有固定的倍数关系. 在此基础上, 我们尝试着对条件进行配方转化. 面对三个条件等式右边的非零数字, 可以在左边配方、右边为零这两方面进行兼顾.

$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2} - \textcircled{3} \times 4$ 可得 $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 4by - 4cz = 0$,

即 $(2a-x)^2 + (2b-y)^2 + (2c-z)^2 = 0$, 所以 $x=2a, y=2b, z=2c$,



例 1 图②



所以答案为 C.

(2) 引进字母, 将其转换成一个纯数学问题.

$$\text{设长方体长、宽、高分别为 } x, y, z, \text{ 则 } \begin{cases} 2(xy+yz+xz)=11 \\ 4(x+y+z)=24 \end{cases}.$$

三个未知数两个方程. 自由度告诉我们, 一般来说, 该方程组没有特定的解, 而结论对角线长为 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 兼顾条件和结论的结构特征, 可以发现条件的发展方法.

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+xz)} = \sqrt{6^2 - 11} = 5.$$

说明: 对于上述两个例题, 由于有意识地使用了配方法, 解答过程既简单又优美.

配方法需要合理运用“裂项”与“添项”以及“配”与“凑”的技巧, 从而完成配方. 有时也将配方法称为“凑配法”. “凑配法”不能仅仅靠试探, 综合考察条件和结论的特征并且将二者兼顾起来, 可以有效地避免变换的盲目性.

配方法使用的最基本的依据是完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 灵活运用这个公式, 可以得到各种基本配形式, 如:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab;$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab = (a-b)^2 + 3ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2];$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \cdots$$

结合其他数学知识和性质, 还有另外的一些配形式, 如:

$$1 + \sin 2\alpha = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2;$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2, \text{ 等等.}$$

例 3 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$ 的值.

探究: 该题结论复杂, 所以可以从转化结论开始解答.

$$\text{原式} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1.$$

转化结论到此结束, 下面据此发展条件, 把条件等式两边同时除以 x , 可得 $x + \frac{1}{x} = 3$, 所以原式 = 8.



让难度再上一个台阶.除了使用刚才的配方法(从结论出发)之外,你完全可以从单一的发展条件一直通往结论.“发展”是一种数学研究原则,只不过发展条件的时候一定要结合结论的需要.

例 4 x 是方程 $x^2 - 13x + 1 = 0$ 的根,则 $x^4 + x^{-4}$ 的个位数字为_____.

探究:发展条件: $x + \frac{1}{x} = 13$,

转化结论: $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right]^2 - 2 = 167^2 - 2 = 26\ 887$,所以个位数字是 7.

例 5 $f(x) = a^x$,比较 $f\left(\frac{p+q}{2}\right)$ 与 $\frac{f(p)+f(q)}{2}$ ($p \neq q$) 的大小.

探究:比较大小的通法是作差法.

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) - \frac{f(p)+f(q)}{2} = a^{\frac{p+q}{2}} - \frac{a^p + a^q}{2} = \frac{2a^{\frac{p+q}{2}} - a^p - a^q}{2}.$$

把分数指数幂转化成我们更加熟悉的根式,可能更容易带来突破.

$$\text{上式} = \frac{2\sqrt{a^p a^q} - a^p - a^q}{2} = -\frac{(\sqrt{a^p} - \sqrt{a^q})^2}{2} < 0, \text{所以 } f\left(\frac{p+q}{2}\right) < \frac{f(p)+f(q)}{2}.$$

说明:通分之后,你是否意识到:完全平方式可能就在你身边.这种比较大小的问题,最后往往能配成完全平方式.

你意识到该题的几何意义了吗?你画出指数函数图象,演示一下呗.

二、配方法会带来新的思路发展点

很多问题,当你一筹莫展的时候,求变几乎成为一种必然选项.那么,换个角度会怎样?一旦完成配方,问题的结构特点将变得更加明显.新的问题情境,一定会激发起你的数学冲动和换位思考.

例 6 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对应边分别是 a, b, c , 且 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, 判断 $\triangle ABC$ 的形状并证明.

探究:只要问题中出现二次三项式的类似结构,配方法往往是一种最合理的研究选项.

$$\text{由 } a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 可得 } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca,$$

$$\text{移项可得 } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0, \text{所以 } (a-b)^2 + (b-c)^2 +$$



$(c-a)^2=0$, 所以 $a=b=c$, $\triangle ABC$ 为等边三角形.

说明: 让交叉项的系数为 2, 更容易凑成完全平方式.

例 7 求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

探究: 化简是该题的基本方向, 降幂去分母应该是其主要方式, 配方就是降幂的好办法.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x} = \frac{1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{2 - \sin 2x} = \frac{4 - \sin^2 2x}{4(2 - \sin 2x)} \\ &= \frac{2 + \sin 2x}{4}. \end{aligned}$$

至此问题迎刃而解, 最终答案你自己写出来呗!

例 8 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求 a 的取值范围.

探究: “求 a 的取值范围”, 考虑到结论的需要, 往往需要得到关于 a 的不等式(组). 两个条件结合起来, 尽最大努力消去 b, c , 得到关于 a 的不等式, 利用均值不等式可能是解题的重要选项. 配方法可能大有用武之地.

$b+c=-a$, 所以第二条件可化为:

$$a^2 + (b+c)^2 = 1 + 2bc, \text{ 所以 } 2a^2 = 1 + 2bc \leq 1 + \frac{(b+c)^2}{2} = 1 + \frac{a^2}{2},$$

所以 $a^2 \leq \frac{2}{3}$, 从而 $-\frac{\sqrt{6}}{3} \leq a \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ (当且仅当 $b=c$ 时取等号, 此时结合两个条件可得 $b=c=-\frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$).

说明: 请看, 用配方法解该题, 将两个条件和一个结论完美地结合在了一起, 漂亮! 求某个元素的取值范围, 往往需要确定它受到的约束, 构建不等式(组).

例 9 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi), 2\cos \alpha \cos \beta + \cos 2\alpha + \frac{3}{2} = 0$, 这样的 α, β 存在吗? 如果不存在或者答案有无数组, 请说明理由; 如果答案是有限的, 请给出答案.

探究: 在前面的例题 2 里面就有类似的问题. 自由度的观点告诉我们, 如果未知数的个数多于方程的个数, 那么该问题往往是不确定的, 除非是一种极端情况, 比如方程 $x^2 + y^2 = 0$ 只有一组解 $x=y=0$.



$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, 出现了这种结构, 配方法便成为我们试探的首选.

$$\text{原条件可化为 } 2\cos \alpha \cos \beta + 2\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\text{配方可得 } 2\left(\cos \alpha + \frac{1}{2}\cos \beta\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 \beta = 0,$$

$$\text{所以 } 2\left(\cos \alpha + \frac{1}{2}\cos \beta\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2 \beta = 0.$$

这是我们期待已久的结论!

接下来的问题就很简单了.

$$\left(\cos \alpha + \frac{1}{2}\cos \beta\right)^2 = 0, \frac{1}{2}\sin^2 \beta = 0.$$

容易得到 $\beta = 0$ 时, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$; $\beta = \pi$ 时, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$.

说明: 配方往往是神来之笔! 它给我们打开了一个全新的思考空间.

还记得本节开始的那道竞赛题吗? 我们现在应该有相当的自信完成它.

例 10 求所有 k 的值, 使得关于 x 的方程 $2x^2 - 2(k-5)x - 3k + 31 = 0$ 的根皆为整数.

探究: 首先是否应该用韦达定理发展一下从而取得一点阶段性成果呢? 把能做的事情做好, 是做出一道难题的必要条件.

设原方程的两根为 x_1, x_2 , 则:

$$x_1 + x_2 = k - 5, x_1 x_2 = \frac{31 - 3k}{2}.$$

由于方程的根为整数, 所以 k 不仅为整数, 而且还是奇数.

$$\text{由求根公式得 } x = \frac{k - 5 \pm \sqrt{k^2 - 4k - 37}}{2}.$$

当我们面对一个复杂结构的时候, 耐心分析其结构特征、全力从中发现规律是唯一正确的选择.

方程的根为整数, 被开方数必须为正整数.

面对 $k^2 - 4k - 37$, 我们只能委托配方法.

$k^2 - 4k - 37 = (k - 2)^2 - 41 = n^2$ (引进新字母, 构建等式常常是一种发展方向).

让我们继续求变.

移项可得 $(k - 2)^2 - n^2 = 41$, 所以 $(k - 2 - n)(k - 2 + n) = 41$ ——质数,



所以 $\begin{cases} k-2-n=\pm 1, \pm 41 \\ k-2+n=\pm 41, \pm 1 \end{cases}$, 两式相加可得 $k=23$ 或 -19 .

说明: 变, 就会带来新发现. “发展是硬道理.” 坚持配方法, 引进字母, 建立方程, 这样一来, 走向成功的概率会大大增加.

本节的理论和问题充分说明: 配方法不仅可以简化运算, 而且会给我们开辟新的思考空间. 很多类似二次三项式的问题, 如果合理地使用配方法, 问题的解决几乎会成为一种必然!

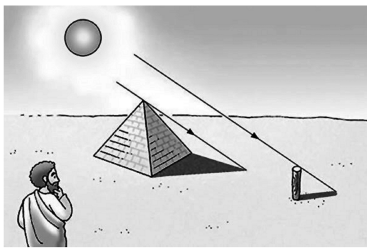


第二节 基本量法与消元意识

提及埃及这个神秘而又古老的国家,人们不约而同地会想到同样神秘的金字塔.泰勒斯游历埃及期间,看到人们都在看告示,告示上写着法老悬赏测量金字塔的高度.于是,他就去找法老……泰勒斯说只需要用一根木棍和一把尺子就能测量出金字塔的高度.他把木棍插在金字塔旁边,等木棍的影子和木棍一样长的时候,他量了金字塔影子的长度和金字塔底面边长的一半.把这两个长度加起来就是金字塔的高度了.在法老的请求下,他向大家讲解了如何从“影长等于身长”推测“塔影等于塔高”的原理.也就是今天所说的相似三角形定理.



金字塔



泰勒斯测金字塔高度

泰勒斯(希腊语:Θαλῆς, Thalês, 英语:Thales, 公元前约 624 年—约 546 年),希腊著名数学家和天文学家.数学上的泰勒斯定理和泰勒级数以他的名字命名.他是首次将一年的长度修定为 365 日的人.他亦曾准确地估量了太阳及月球的大小.

每个数学概念、定义、公式、定理都有对其起决定作用的量,即基本量.有很多数学题的解决都可归结到基本量上,找出基本量,从而应用这些基本量形成的系统来解决问题.在学习数学的过程中,我们会时常用到“木棍”和“尺子”这样的基本量.尽管人人都有这样的“基本量”,但也不是每个人都能测量金字塔的高度,所以在拥有基本量的同时还需要选择合适的方法.

数学题目中的元素可能有很多,若选择恰当的“基本量”并将所有元素都用基本量来表示,肯定会简化问题的运算,同时还便于发现和建立条件之间、条件和结论之间的联系,使得我们对数学问题的研究更有洞察力.

例 1 一个正数,其整数部分是它的小数部分与其本身的等比中项(其