GAODENG YINGYONG SHUXUE LILUN YU YINGYONG YANJIU

高等应用数学理论与应用研究

时耀敏◎著

哈爾濱工業大學出版社

高等应用数学理论与应用研究

时耀敏　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从高等应用数学基础理论与应用和教学模式两个方面，结合我国高等教育发展现状，秉承不断改革创新的理念，本着培养学生的素质和提高能力的目的，对高等应用数学的基本内涵和思想方法的研究进行了详细介绍.

本书进行了改革创新尝试，具有鲜明的特点，可供高职高等院校各专业的高等数学课程使用，也可作为需要高等数学知识的相关科技人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学理论与应用研究/时耀敏著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.8

ISBN 978-7-5603-8451-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①时… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第171488号

策划编辑 闻 竹
责任编辑 闻 竹
封面设计 盛世博睿文化
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本 710mm×1000mm 1/16 印张 12.25 字数 266千字
版　　次 2020年6月第1版 2020年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-8451-1
定　　价 60.00元

前　言

高等应用数学课程在高职高等院校人才培养方案的实施中具有不可替代的作用，教材建设是课程建设的重中之重.

本书以注重基础，加强应用，强化能力为指导思想，在内容编排上力求体现科学性与实用性和谐统一，从高等教育人才培养的需求出发，以“培养高端应用型专门人才”为目标，充分考虑专业实际和发展需求.本书的主要特点：①突出应用，增加了实用性和趣味性；②突出重点，以点带面；③突出数学思想和方法，突出它们对分析问题、解决问题的普及与借鉴作用；④突出综合知识的讲述；⑤突出教学方法和模式的重要性.

本书从高等应用数学基础理论与应用和教学模式两个方面，结合我国高等教育发展现状，秉承不断改革创新的理念，本着培养学生的素质和提高能力的目的，对高等应用数学的基本内涵和思想方法的研究进行了详细介绍.主要内容包括函数极限及其应用研究、导数与微分及其应用研究、积分及其应用研究、空间解析几何初步研究、行列式与矩阵及其应用研究、二重积分及其应用研究、层次分析法与模糊综合评价法在第三方物流项目招投标中评标应用研究、多种教学法在高职高等数学教学中的应用、高职高等数学教学中教学工作改革研究等.

本书进行了改革创新尝试，具有鲜明的特点，可供高职高等院校各专业的高等数学课程使用，也可作为需要高等数学知识的相关科技人员的参考用书.

本书在撰写的过程中，参考了许多同人的相关作品，在此，对相关作者表示衷心的感谢.

著　者

2019 年 3 月

目　录

第一篇　高等应用数学基础理论与应用篇

第一篇

高等应用数学基础理论与应用篇

第一章　函数极限及其应用研究

第一节　分段函数、需求函数与供给函数的分析

一、分段函数

(一)函数的概念与基本初等函数

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某种对应关系 f，都有确定的数值 y 和它对应，那么 y 就称为定义在数集 D 上的关于 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，数集 D 称为函数的定义域，当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的定义域

求函数的定义域，一般应根据具体函数表达式考虑以下六点.

(1)在分式表达式中，分母不能为零；

(2)在根式表达式中，负数不能开偶次方根；

(3)在对数表达式中，真数不能取零和负数，底数大于零且不等于 1；

(4)在三角函数表达式中，$k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 不能取正切，$k\pi(k\in \mathbf{Z})$ 不能取余切；

(5)在反三角函数表达式中，要符合反三角函数的定义域；

(6)若函数表达式中同时含有分式、根式、对数式或反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　　(2) $y=\lg\dfrac{x}{x-1}$.

解 (1)要使函数有意义，必须满足$\begin{cases}4-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}$解得 $x>-2$ 且 $x\neq 2$，所以函数的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，必须满足$\dfrac{x}{x-1}>0$，解得 $x>1$ 或 $x<0$，所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，我们才认为这两个函数是相同的.

例如，函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$ 是两个相同的函数. 又如，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 是两个不同的函数.

3. 邻域

定义 2 设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，称 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径；将 a 的 δ 邻域的中心 a 去掉后得 a 的 δ 空心邻域，记为 $U^{\circ}(a,\delta)$，即

$$U^{\circ}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

点 a 的 δ 邻域及点 a 的 δ 空心邻域有时又分别简记为 $U(a)$ 与 $\mathring{U}(a)$.

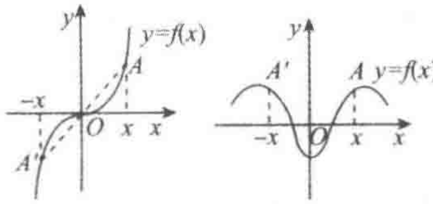
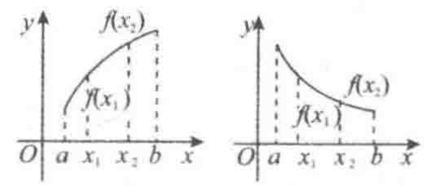
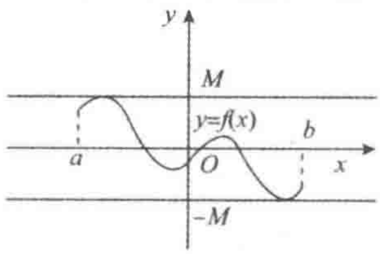
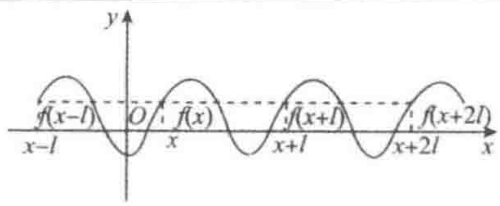
4. 函数的表示法

常用的函数表示法有公式法(解析法)、表格法和图像法三种. 有时，一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示. 例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x\geqslant 0,\\ -x,x<0\end{cases}$是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 在定义域的不同范围内用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

5. 函数的几种特性

我们已学过函数的四种特性，即奇偶性、单调性、有界性、周期性，将这四种特性做归纳，如表 1－1 所示.

表 1—1

特性	定义	几何特性
奇偶性	如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对任意的 x，如果 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数；如果 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数	 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称
单调性	对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，如果 $f(x_1)<f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；如果 $f(x_1)>f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少	 单调增函数的图像沿 x 轴正向上升；单调减函数的图像沿 x 轴正向下降
有界性	对于任意的 $x\in(a,b)$，存在 $M>0$，有 $\|f(x)\|\leqslant M$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；如果这样的数 M 不存在，那么 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界	 区间 (a,b) 内的有界函数的图像全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
周期性	对于任意的 $x\in D$，存在正数 l，使 $f(x+l)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，l 称为这个函数的周期	 一个以 l 为周期的周期函数的图像在定义域内每隔长度为 l 的区间上有相同的形状

6. 反函数

定义 3　设函数 $y=f(x)$，它的定义域是 D，值域为 M，如果对值域 M 中任意一个值 y，都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的 x 值与之对应，由此得到以 y 为自变量的函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

在习惯上，自变量用 x 表示，函数用 y 表示，所以又将它改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

由定义可知，函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域分别是其反函数 $y=f^{-1}(x)$

的值域和定义域.函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

例 2 求函数 $y=3x-2$ 的反函数.

解 由 $y=3x-2$ 解得 $x=\dfrac{y+2}{3}$,将 x 与 y 互换,得 $y=\dfrac{x+2}{3}$,所以 $y=3x-2(x\in\mathbf{R})$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+2}{3}(x\in\mathbf{R})$.

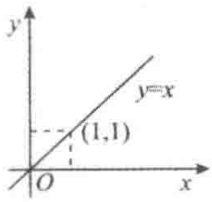
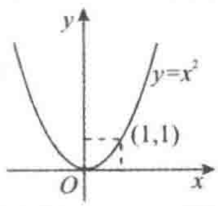
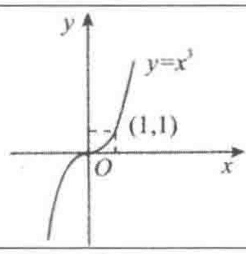
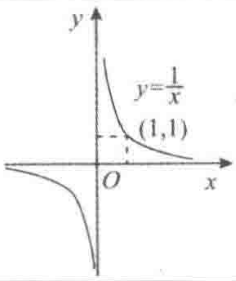
另外,函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

7. 基本初等函数

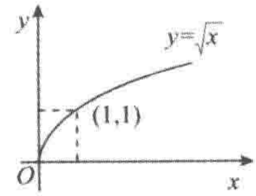
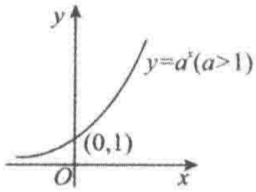
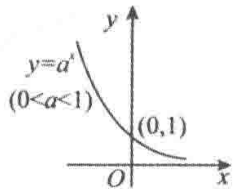
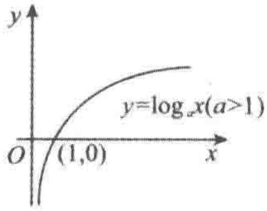
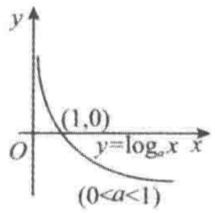
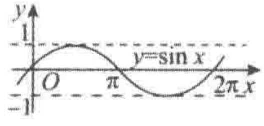
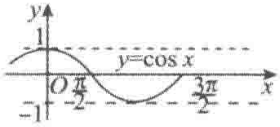
幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和特性列表,如表 1-2 所示.

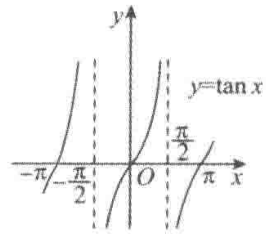
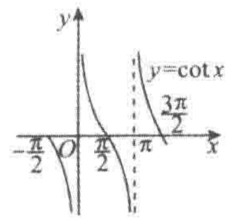
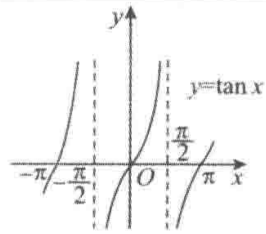
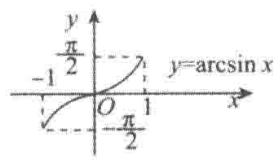
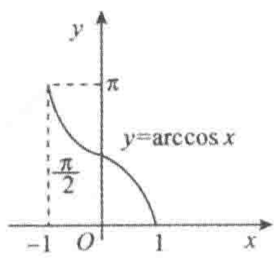
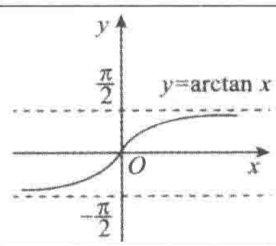
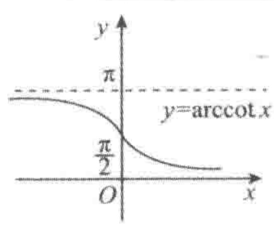
表 1-2

	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[0,+\infty)$		偶函数,在 $(-\infty,0)$ 内单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数,在 $(-\infty,0)$ 内单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

续表

	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$， $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$， $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$

续表

	函数	定义域与值域	图像	特性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$， $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$， $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$， $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

学习反三角函数，关键是对反三角函数符号的理解，比如对 $\arcsin\frac{1}{2}$ 的理解：①它表示一个角，这是对它定性的认识；②它表示一个在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的角，这是对它范围的认识；③它表示一个正弦值为 $\frac{1}{2}$ 的角，这是对它定量的认识. 综合以上三个方面的认识，最后得出它的唯一值，即 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. 这种理解，越来越具体，越来越明确，越来越深刻，这是破解难点的方法，即“将难点分解，各个击破”，这也是一种重要的学习方法.

8. 复合函数

定义 4 设 y 是 μ 的函数 $y=f(\mu)$，而 μ 又是 x 的函数 $\mu=\varphi(x)$，其定义域为数集 A. 如果在数集 A 或 A 的子集上，对于 x 的每一个值所对应的 μ 值，都能使函数 $y=f(\mu)$ 有定义，那么 y 就是 x 的函数，这个函数称为函数 $y=f(\mu)$ 与 $\mu=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 μ 称为中间变量，其定义域为数集 A 或 A 的子集.

例如，$y=\tan^2 x$ 是由 $y=\mu^2$ 与 $\mu=\tan x$ 复合而成的函数；函数 $y=\ln(x-1)$ 是由 $y=\ln\mu$ 与 $\mu=x-1$ 复合而成的函数，它们都是 x 的复合函数.

注意 (1)不是任何两个函数都可以复合成一个函数. 例如 $y=\arcsin\mu$ 与 $\mu=2+x^2$ 就不能复合成一个函数.

(2)复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如 $y=2^{\mu}$，$\mu=\sin\nu$，$\nu=\frac{1}{x}$，由这三个函数可得复合函数 $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$，这里 μ 和 ν 都是中间变量.

例 3 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$； (2) $y=\arcsin(\ln x)$； (3) $y=e^{\sin x^2}$.

解 (1) $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{\mu}$ 与 $\mu=1+x^2$ 复合而成.

(2) $y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin\mu$ 与 $\mu=\ln x$ 复合而成.

(3) $y=e^{\sin x^2}$ 是由 $y=e^{\mu}$，$\mu=\sin\nu$，$\nu=x^2$ 复合而成.

9. 初等函数

定义 5 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤所构成，并能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=\ln\cos^2 x$，$y=\sqrt[3]{\tan x}$，$y=\frac{2x^3-1}{x^2+1}$，$y=e^{2x}\sin(2x+1)$ 都是初等

函数.

初等函数的定义,明确指出是用一个式子表示的函数,如果一个函数必须用几个式子表示时,它就不是初等函数.例如,$g(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1,\\1+x,x>1\end{cases}$就不是初等函数,而称为非初等函数.

例 4 某运输公司规定货物的吨千米运价为:在 a 千米以内,每千米 k 元;超过 a 千米时,超过部分每千米 $\frac{4}{5}k$ 元.求运价 m 与路程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可列出函数关系如下:

$$m=\begin{cases}ks,0<s\leqslant a,\\ka+\frac{4}{5}k(s-a),s>a.\end{cases}$$

这里运价 m 和路程 s 的函数关系是用分段函数表示的,定义域为$(0,+\infty)$.

例 5 某地方政府要对本地居民中无固定工作收入的人按月发给每人每月不超过 500 元的救济金,某人每工作一小时可挣 20 元,每月工作时长可以自主掌握,试对以下两种不同收入支持计划进行分析.

计划一:只对无任何工作收入的人每月发放 500 元救济金.如果领取者获得工作收入,无论多少都停止救济金支付.

计划二:对无固定工作收入的人每月发放 500 元救济金.如果领取者获得工作收入,则首先将其收入的一半用于偿还政府的救济金,直到偿还全部 500 元为止.

解 设 y 为月收入,t 为工作时间(单位:h).

计划一:$y=\begin{cases}500,t=0,\\20t,t>0,\end{cases}$如图 1-1 所示.

计划二:$y=\begin{cases}500+10t,t\leqslant 50,\\20t,\quad t>50,\end{cases}$如图 1-2 所示.

计划一的特点是“全部或者没有”,即要么得到全部救济金,要么得不到任何救济金.身处这个计划的人如果每月工作不到 25 个小时就不如不工作,这可以看成计划对工作的惩罚机制.从数学角度看,是因为在 t=0 处的值大于函数在 0<t<25 的值.

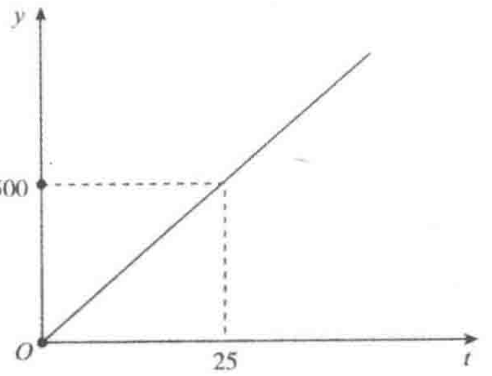


图 1—1

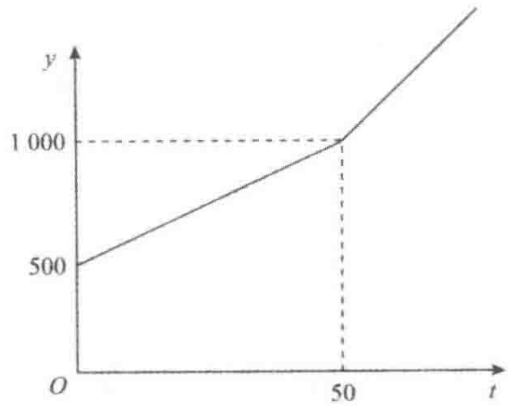


图 1—2

计划二可以反映出“多劳多得”的公平分配原则，因为收入函数是随工作时间单调增加的，努力工作的结果是在改善工作者经济状况的同时降低了政府援助计划的成本.

二、需求函数与供给函数

引例 某种商品的需求函数是 $Q=200-5P$，供给函数是 $S=25P-10$，求该商品的市场均衡价格和市场均衡商品量.

在实际应用中，通常用一些比较简单的初等函数，如线性函数、幂函数或指数函数近似表示需求函数和供给函数，市场均衡价格和市场均衡商品量则是供给量等于需求量得到的价格和需求量.

下面就讲一下需求函数与供给函数. 需求是指在一定价格条件下消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量. 如住房、汽车、家用电器等产品需求量，都与价格关系密切. 供给是指在一定价格条件下生产者愿意出售并且有可供出售的商品量. 目前，国家正在进行供给侧改革. 中国人出国旅游狂购马桶盖、奶粉等，国内近几年粗钢供应过剩，粗钢价格接近“白菜价”，而精钢、特钢则需要大量进口.

(1)需求函数. 若以 P 表示商品价格，Q 表示商品需求量，则 Q 是 P 的函数 $Q=f(P)$，称为需求函数. 一般来说，商品价格低则需求量大，价格高则需求量小，因此需求函数 $Q=f(P)$ 是单调减函数. 单调函数的反函数仍为单调函数，$Q=f(P)$ 的反函数 $P=P(Q)$ 也称为需求函数. 常用的需求函数有如下几种.

线性函数：$Q=b-aP$，$a>0$，$b>0$；