普通高等教育"十三五"规划教材

医用高等数学

主　编　王培承　安洪庆
副主编　曹海霞　程秀兰
　　　　闵建中　苗巧云

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

编　委　会

主　编　王培承　安洪庆

副主编　曹海霞　程秀兰　闵建中

　　　　苗巧云

编　委　（以姓氏笔画为序）

　　　　王培承　孔雨佳　安洪庆

　　　　祁爱琴　杨　丽　闵建中

　　　　苗巧云　曹海霞　程秀兰

前　言

本书按照现行“医科(五年制)高等数学基本要求”，结合医学院校高等数学教学实际，由多所院校高等数学教学骨干联合编写而成.编者多年从事高等数学的一线教学工作，具有丰富的教学经验，对高等数学的框架体系和内容有着全面深入的了解，本书充分吸收了编者积累的教学经验和最新的教学改革成果.

本书力求深入浅出，紧密联系医药学实际，注重数学思想的渗透、科学抽象能力与空间想象能力的构建、逻辑推理能力以及数值计算能力的培养.编者在教材内容的选取上，既充分考虑21世纪医药学人才所应具备的高等数学素养，也充分考虑到医药类学生学习高等数学的实际困难，基本概念、基本理论描述力求通俗易懂，例题、习题配置力求恰当.全书共9章，内容包括：函数与极限，导数与微分，微分中值定理及导数应用，不定积分，定积分，多元函数微积分，常微分方程，线性代数，概率论.

本书可作为高等医学院校各专业本科学生学习高等数学的教材，教学中可根据各专业的需要，对本书内容作适当调整，也可供医药学硕士研究生学习高等数学使用，还可作为医药工作者的参考资料.

由于编者水平有限，书中如有不妥之处，恳请广大读者给予批评指正，提出宝贵意见.

编　者

2020年6月

目　录

第1章 函数与极限

学习目标

掌握 基本初等函数的性质及其图形;极限的四则运算法则;两个重要极限和求函数极限的方法.

熟悉 函数的概念;函数的基本性态;初等函数概念;复合函数的概念;极限概念;连续的概念;无穷小量、无穷大量的概念.

了解 间断点;无穷小的比较;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

函数是高等数学研究的主要对象,极限是研究函数的重要概念和方法,连续是描述函数的一个重要性态.本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的主要性质.

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

我们在研究某一实际问题的过程中,经常会遇到各种不同的量,如长度、重量、面积、温度、时间、距离等.其中有的量在过程中始终保持同一数值,称为**常量**(constant);有的量在过程中可取不同的数值,称为**变量**(variable).

定义 1.1 设 x 和 y 是同一过程中的两个变量,如果对于变量 x 的每一个允许的取值,按照一定的对应法则 f,变量 y 总有一个确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function),变量 x 称为**自变量**(independent variable),变量 y 称为**因变量**(dependent variable),f 称为对应规律,记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

D 是自变量 x 的所有允许值的集合,称为函数的**定义域**(domain).而因变量 y 的所有对应值的集合称为函数的**值域**(range),记为 R.

从函数的定义可知,函数的定义域和对应法则是决定函数的主要因素,当它们确定以

后，函数的值域也就相应地确定了.

在数学中，通常不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数，我们约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量取值的全体构成的集合.

例 1.1 婴儿的体重在 1～6 个月期间内可由如下经验公式确定：

$$y = 3 + 0.6x.$$

式中，x 为婴儿的月龄，是自变量；y 为婴儿的体重(kg)，是 x 的函数. 函数的定义域为 $[1, 6]$. 这是公式法表达的函数关系. 若不考虑该问题的实际意义，函数 $f(x) = 3 + 0.6x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

例 1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的高度为 h，运动规律为 $s = 0.5gt^2$，其中 g 为重力加速度，求函数 s 的定义域.

解 从抽象的算式看，t 可以取一切实数值，但考虑到实际意义，显然应有

$$t \geqslant 0 \quad 且 \quad 0 \leqslant s \leqslant h,$$

而 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$，故定义域为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

函数的表达方式通常有公式法、图像法和表格法，甚至可以用一段文字来表述.

例 1.3 某地区统计了 2001—2009 年猩红热的发病率. 可以看出，每一个年份 t，都有一个发病率 y 与之对应. 则称 y 是 t 的函数，其定义域为 2001—2009 年，用表格法表达的函数关系，见表 1.1.

表 1.1

t(年份)	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
y	0.64‰	0.92‰	1.64‰	4.05‰	4.21‰	4.17‰	3.57‰	5.61‰	9.16‰

1.1.2 分段函数

在生物、医学和工程技术等应用中，经常遇到一类函数，当自变量在不同范围内取值时，其表达式也不同，这类函数就是**分段函数**(piecewise function). 历史上最著名的**狄利克雷函数**就是一个分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是无理数}, \\ 1, & x \text{ 是有理数}. \end{cases}$$

例 1.4 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的**最大整数**，记作 $f(x) = [x]$. 例如，$[\pi] = 3$，$[\sqrt{3}] = 1$，$\left[\frac{2}{5}\right] = 0$，$\left[-\frac{2}{5}\right] = -1$，取整函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是整数集 Z，这是一个分段函数，它的图形是阶梯状的，如图 1.1 所示.

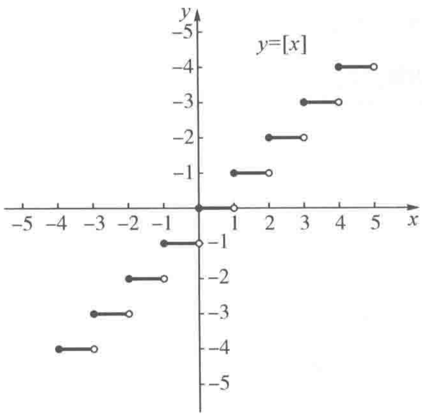


图 1.1

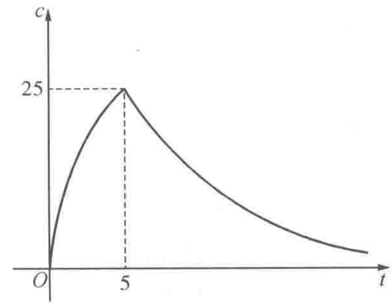


图 1.2

例 1.5　在生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$（mL）随时间 t(min) 变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t>5.\end{cases}$$

式中，k 为常数，这是一个分段函数，如图 1.2 所示.

1.1.3　复合函数

定义 1.2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或其子域上取值时，所对应的 u 值，使 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**(compound function)，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**(intermediate variable).

例 1.6　求由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v+\sin v$，$v=1-2x$ 构成的复合函数.

解　u 是 y 的中间变量，v 是 u 的中间变量，依次代入可得 $y=\mathrm{e}^{1-2x+\sin(1-2x)}$.

例 1.7　求由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数和由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数.

解　(1) 由函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数是 $y=(\sin x)^3$；

(2) 由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^3$ 构成的复合函数是 $y=\sin x^3$.

例 1.8　试分解复合函数 $y=\mathrm{e}^{\arcsin 3x}$.

解　该复合函数显然是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin v$ 和 $v=3x$ 复合而成.

例 1.9　试分解复合函数 $y=\lg[\tan(x^2+\arcsin x)]$.

解　该复合函数可分解成 $y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+\arcsin x$.

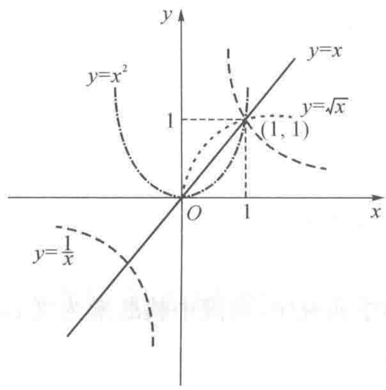
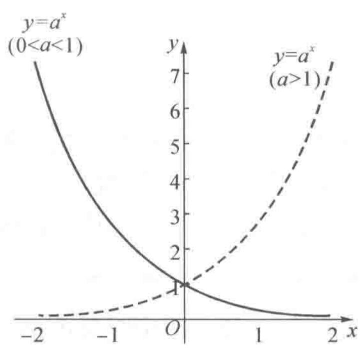
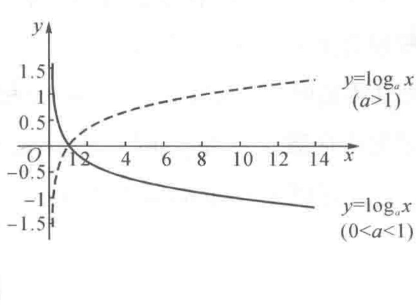
1.1.4　初等函数

1. 基本初等函数

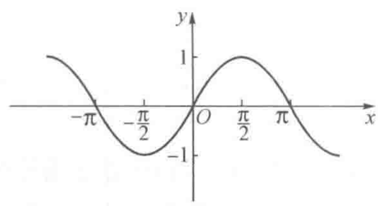
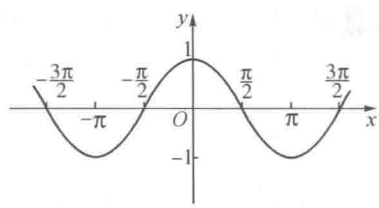
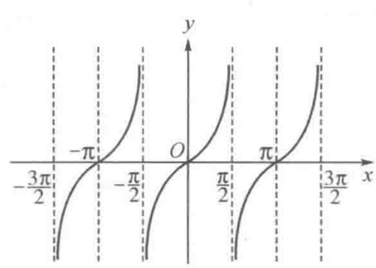
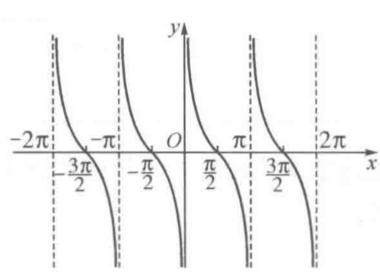
通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数统称为**基本初等函数**

(basic elementary function). 现将五种基本初等函数列于表 1.2.

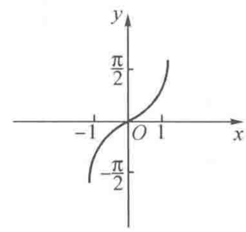
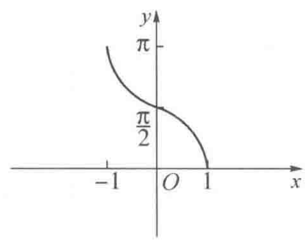
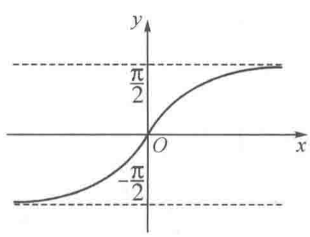
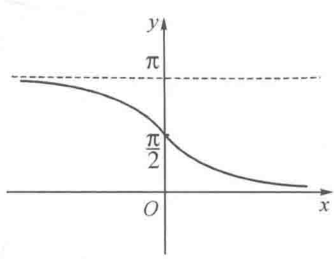
表 1.2　基本初等函数

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y=x^a$ (a 是实数, $a\neq 0$)	随 a 的不同, 函数的定义域不同, 但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过点 (1, 1), 在第一象限内. 当 $a>0$ 时, 为增函数; 当 $a<0$ 时, 为减函数
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0,\\ a\neq 1,\end{pmatrix}$ 且 a 是常数	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方, 且过点 (0, 1). 当 $0<a<1$ 时, 为减函数; 当 $a>1$ 时, 为增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0,\\ a\neq 1,\end{pmatrix}$ 且 a 是常数	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧, 且过点 (1, 0). 当 $0<a<1$ 时, 为减函数; 当 $a>1$ 时, 为增函数

（续表）

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，在 $(0,\pi)$ 内为减函数

(续表)

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加，奇函数，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少，值域为 $[0, \pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加，奇函数，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少，值域为 $(0, \pi)$

由表 1.2 可以清楚地看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其函数图形等.

2. 初等函数

定义 1.3 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合运算所构成的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**(elementary function). 例如，

$$y=\sqrt{e^x+\sin x},\quad y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$$

都是初等函数;分段函数虽不是初等函数,但在不同段内的表达式,通常用初等函数表示.

1.2　极限

1.2.1　极限的概念

对于函数 $y=f(x)$,在自变量的某个变化过程中(如 x 无限增大即 $x\to\infty$ 的过程或 x 无限接近于某一个常数即 $x\to x_0$ 的过程),如果对应的函数值无限接近于某一个常数,那么这个常数称为在自变量的这一变化过程中函数的极限,这个极限是由自变量的变化过程所决定的. 函数的极限主要研究以下两种情形:

1. 自变量趋向于无穷大时函数的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大时,若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋向于无穷大时的极限.

定义 1.4　若自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**(limit),记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\quad (当\ x\to\infty\ 时).$$

从几何意义上看,随着 x 绝对值的增大,曲线 $f(x)$ 与直线 $y=A$ 越来越接近,即对于任意的 $\varepsilon>0$,无论直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄,只要 x 离原点足够远,即 $|x|>M$,函数 $f(x)$ 的图形都在这个条形区域内,如图 1.3 所示.

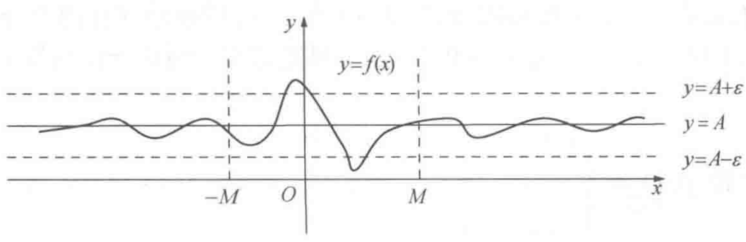


图 1.3

如果仅考虑 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$,那么可以类似地定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1.10　从几何意义上可知下列等式成立.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}3^x=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

2. 自变量趋向于定值时函数的极限

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义(在 x 点可以没有定义),若当 x 无论以怎样的方式趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 都趋近于常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极

限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (当\ x \to x_0\ 时).$$

注意 (1) 这里 $x \to x_0$ 的方式是任意的.

(2) 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限是否存在与函数在 x_0 点是否有定义无关.

反映在几何上，这个定义对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，无论直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，总能找到 x 的一个区域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，当 x 在这个区域内取值时，$f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad 即\ A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

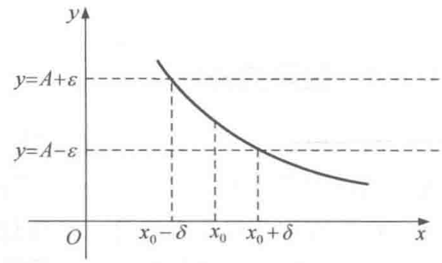


图 1.4

即在 x_0 的空心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内 $f(x)$ 的值全部落在如图 1.4 所示横条形区域内.

例 1.11 由定义及几何意义，易知 $\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1) = 1$.

可以看出，上述 x 以任意方式趋近于 x_0 的过程包括 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 和从 x_0 的右侧趋向于 x_0 两种情况. 当 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**(left-hand limit)，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0) = A$；同样，当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**(right-hand limit)，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

左极限和右极限统称为**单侧极限**. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在且相等. 这个结论常用于讨论分段函数在分段点处的极限.

例 1.12 设 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -\infty < x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

解 (1) 当 $x \to 0$ 时，因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x + 1) = 1 \quad 且 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0,$$

即

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

所以，$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

(2) 当 $x \to 1$ 时，因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

3. 极限存在的判别准则

定理 1.1(夹逼定理) 在同一极限过程中,若三个函数 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 之间满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$, 则

$$\lim f(x)=A.$$

定理 1.2(单调有界数列必有极限) 若数列 $\{x_n\}$ 单调并且有界,则 $\{x_n\}$ 一定有极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

1.2.2 极限的四则运算

定理 1.3(四则运算法则) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, A 和 B 为有限常数,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB$;

特别地,当 c, k 为常数时,有 $\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^k=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^k$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

该定理对数列的极限也是成立的,定理中 x 的变化趋势应为同一个变化趋势.

例 1.13 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}=\dfrac{-1}{-5}=\dfrac{1}{5}$.

例 1.14 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=\lim\limits_{x\to -1}x-1=-2$.

例 1.15 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6x+2}{2x^3+5x^2-1}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x+2}{2x^3+5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+6\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{2+5\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{2+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}=0.$$

1.2.3 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

例 1.16 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}$.

例 1.17 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

用这个重要极限求极限实际是求在某个极限过程中 $(1+\text{无穷小})^{\text{无穷大}}$ 的极限,但无穷大与无穷小的表达式应互为倒数.

例 1.18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}\cdot(-6)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-6}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{\frac{-x}{2}}\right]^{-6}=\mathrm{e}^{-6}.$$

例 1.19 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2)}{x^2-9}$.

解
$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x-2)}{x-3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\ln(x-2)$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\ln(x-2)^{\frac{1}{x-3}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\ln[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left\{\lim_{x\to 3}[1+(x-3)]^{\frac{1}{x-3}}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\ln\mathrm{e}=\frac{1}{6}.$$

例 1.20 当阿波罗 13 号登月失败回返地球时,空气净化器出现故障,三名宇航员利用身上的衣袜等纤维制品填充了一个长 30 cm 的圆柱形容器,抽动空气来吸收 CO_2,当空气中的 CO_2 浓度为 8% 时,在容器内通过 10 cm 厚度后浓度可降至 2%. 要求出口处的 CO_2 浓度为 1%,吸收层厚度至少为多少厘米?

解 假设气流每通过相同厚度的 Δx 便有相等比例的 CO_2 被吸收. 将厚度 x 分成 n 等份,每一份 CO_2 的吸收量与 $\frac{x}{n}$ 成正比,比例系数为 k. 在 $x=0$ 处 CO_2 的量为 M_0,则经过 n 层后为 $M_0\left(1-\frac{kx}{n}\right)^n$,要让每层的厚度尽可能小并趋于零,只要 $n\to\infty$,则经过 x 层后 CO_2 的量为

$$M(x)=\lim_{n\to\infty}M_0\left(1-\frac{kx}{n}\right)^n=M_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{kx}{n}\right)^{-\frac{n}{kx}}\right]^{-kx}=M_0\mathrm{e}^{-kx}.$$

当 $x=10$ 时,CO_2 浓度从 8% 降至 2%,即初始浓度的 $\frac{1}{4}$,这就是

$$M(10)=M_0\mathrm{e}^{-10k}=\frac{M_0}{4},$$

求得 $k=\frac{\ln 2}{5}$. 所以 CO_2 量与厚度 x 的关系式为 $M(x)=M_0\mathrm{e}^{-kx}$.

令 $M(x)=\frac{M_0}{8}$,可解出 $x=15$,即经过 15 cm 厚度后 CO_2 浓度可降为 1%. 同样可以验证,当 $x=30$,即容器被纤维制品填满时,舱内空气通过容器后 CO_2 的输出浓度为 $M(30)=0.001\,25$,已降至安全水平.

1.2.4 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 1.6 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时为**无穷小量**(infinitesimal),简称为无穷小.

定义中的 $x\to x_0$,可换成 $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ 等,当然函数 $f(x)$ 也可换成数列 x_n,此时 $x\to x_0$ 换成 $n\to\infty$.

无穷小量是以零为极限的变量,提到无穷小量时要指明自变量的变化过程,如 $\sin x$ 在 $x\to 0$ 时是无穷小量.

任意很小的数都不是无穷小量,但**零可以看作无穷小的常数**(也是唯一一个可看成无穷小的常数),因为常数的极限总是等于常数本身.

根据无穷小量的定义及极限的定义与运算法则,可知无穷小量有如下性质:

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2 有限个无穷小之积为无穷小.