概率与统计
导学教程

主编 / 陈仲堂

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

概率与统计导学教程

主　编　陈仲堂

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是按照国家对非数学类本科生概率论与数理统计课程的基本要求，配套陈仲堂、赵德平主编的教材《概率论与数理统计》（高等教育出版社）而编写的导学教程，是学习指导书.

全书分为七章：随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计. 按照讲课次序对每次课的教学内容进行了概括性总结，既有重点、难点，也有概念、性质、定理及公式的梳理，并配有同步习题.

本书可作为概率论与数理统课程的配套资料使用，也可为使用该教材的教师提供教学参考和依据.

图书在版编目（CIP）数据

概率与统计导学教程 / 陈仲堂主编. —北京：北京理工大学出版社，2020. 2

ISBN 978-7-5682-8138-6

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 022632 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 7. 25　　责任编辑 / 多海鹏
字　　数 / 172 千字　　文案编辑 / 孟祥雪
版　　次 / 2020 年 2 月第 1 版　2020 年 2 月第 1 次印刷　　责任校对 / 刘亚男
定　　价 / 25. 00 元　　责任印制 / 李志强

前 言

本书是配套陈仲堂、赵德平主编的教材《概率论与数理统计》（高等教育出版社）而编写的导学教程. 根据教学安排，其对每次课的教学内容进行了概括性总结，既有重点、难点，也有概念、性质、定理及公式的梳理，并配有同步习题，本书主要面向理工科院校的学生，既可作为概率论与数理统计课程的配套练习册，也可为使用该教材的教师提供教学参考.

编写本书，主要是为了满足广大工科、经济类、管理类等非数学专业的学生学习概率论与数理统计课程的需要. 编者期望本书能对提高概率与统计类课程的教学质量有所助益，帮助学生实现概率与统计类课程的学习目标.

本书按照讲课次序概括了该门课教学大纲所要求的全部知识点，并安排了相对应的练习题，题型包括填空题、选择题、计算题和证明题，习题选取以基础性习题为主，主要侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出教材重点、难点；同时，在本书中适当融入了一些以往的考研试题、提高能力试题及学生运用知识解决实际问题的习题，帮助学生掌握基础知识，培养学生素质，提高学生综合运用知识解决实际问题的能力.

本书第一章由隋英编写；第二章由李汉龙编写；第三章由闫红梅编写；第四章由郑莉编写；第五章由艾瑛编写；第六章由孙海义编写；第七章由刘丹编写. 全书由陈仲堂、孙常春统稿，由靖新、陈仲堂主审.

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，在此恳请广大读者给予批评和指正.

编 者

目　录

课程名称：　　　　　　　　　　学习时间：　　　　　　　　　年　月　日

<table>
<tr><td>授课章节</td><td colspan="2">第一章　随机事件及其概率
1.1 随机试验、样本空间及样本点
1.2 随机事件及其运算</td></tr>
<tr><td>目的要求</td><td colspan="2">了解随机试验、样本空间、随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算</td></tr>
<tr><td>重点难点</td><td colspan="2">事件之间的关系与运算</td></tr>
<tr><td colspan="2">

主要内容

一、随机试验、样本空间及样本点

(1) 随机试验. 在概率论中，将满足以下特点的试验称为随机试验：

① 可以在相同的条件下重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

(2) 样本空间：将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S.

(3) 样本点：样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

(4) 随机事件：把随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称为事件，通常记为：A，B，C，$\cdots$. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

(5) 基本事件：由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

(6) 必然事件：样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生，称为必然事件.

(7) 不可能事件：空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

二、随机事件的关系及运算

1. 随机事件的关系及运算的概念

设试验 E 的样本空间为 S，而 A、B、A_k(其中 $k=1, 2, \cdots$) 是 S 的子集.

(1) 事件的包含：事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$.

(2) 事件的相等：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

</td><td>

学习笔录：

</td></tr>
</table>

(3) 和事件：事件 A、B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A \cup B$.

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件.

(4) 积事件：事件 A、B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A \cap B$ 或 AB.

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件；称 $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的积事件.

(5) 差事件：事件 A 发生、事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A - B$，或 $A\overline{B}$.

(6) 互不相容(互斥) 事件：事件 A、B 不能同时发生，称事件 A 与事件 B 为互不相容(互斥) 事件，记作 $A \cap B = \varnothing$.

(7) 对立(逆) 事件：对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生，称事件 A 与事件 B 为对立(逆) 事件. A 的对立事件，记为 $\overline{A}$.

A 和 $\overline{A}$ 满足：$A \cup \overline{A} = S$，$\overline{AA} = \varnothing$，$\overline{\overline{A}} = A$.

2. 随机事件的关系及运算的性质

(1) 交换律：

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律：

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) 分配律：

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) 德・摩根律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

本次课作业

设 A，B，C 是三个随机事件，试用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

(1) 只有 A 发生；

(2) A 和 B 都发生而 C 不发生；

(3) A、B、C 都发生；

(4) A、B、C 至少有一个发生；

(5) 恰有一个事件发生；

(6) 不多于两个事件发生；

(7) 三个事件都不发生.

授课章节	第一章　随机事件及其概率 1.3 频率与概率 1.4 古典概型（等可能概型）	
目的要求	了解概率的定义，掌握概率的基本性质并应用其计算概率；掌握等可能概型的公式，会计算等可能概型的概率	
重点难点	应用概率的基本性质计算概率，计算等可能概型的概率	
主要内容		**学习笔录：**

一、概率

1. 概率

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为随机事件 A 的概率，且集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

（3）可列可加性：设 A_1，A_2，$\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，i，$j=1$，2，$\cdots$，则有：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

2. 概率的性质

（1）$P(\varnothing)=0.$

（2）若 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是两两互不相容的事件，则有：

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n)$$

（3）设 A、B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有：

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B) \geqslant P(A)$$

（4）对于任一事件 A，有 $P(A) \leqslant 1.$

（5）对于任一事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A).$

（6）对于任意两个事件 A、B，有：

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对于任意三个事件 A、B、C，有：

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

一般地，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，则有：

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

3. 和事件的概率常用结论

和事件的概率常用结论有：

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B\overline{A})=P(A)+P(B-A)$；

(2) $P(A\cup B)=P(B)+P(A\overline{B})=P(B)+P(A-B)$；

(3) $P(A\cup B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)$；

(4) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})$，$A$、$B$ 独立时.

4. 差事件的概率常用结论

差事件的概率常用结论有：

(1) 对任意事件 A、B，有 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$；

(2) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A-B)=P(A)$；

(4) $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$，A、B 独立时.

二、等可能概型

1. 等可能概型

如果随机试验 E 满足下列特点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性是相同的．这样的试验称为等可能概型，也称为古典概型.

若古典概型的样本空间 S 中包含的基本事件的总数是 n，事件 A 包含的基本事件个数是 m，则事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

2. 几何概型

古典概型是在有限样本空间下进行的，为了克服这种局限性，将古典概型推广为几何概型.

如果一个试验具有以下两个特点：

(1) 样本空间 S 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体)；

(2) 向区域内任意投一点，落在区域内任意点处都是“等可能的”.

那么，事件 A 的几何概率由下式计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{S\text{ 的计量}}$$

本次课作业

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，$P(AC)=P(BC)=0$，求 A、B、C 均不发生的概率.

2. 已知 A、B 两事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\ \overline{B})=q$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$、$P(\overline{A}B)$.

3. 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间的任意一间去住($n \leqslant N$)，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 个房间各住 1 人；

(2) 恰好有 n 个房间，其中各住 1 人.

4. 从 5 个数字 1、2、3、4、5 中等可能地、有放回地连续抽取 3 个数字，试求下列事件的概率：

(1) $A=\{3$ 个数字完全不同$\}$；

(2) $B=\{3$ 个数字不含 1 和 5$\}$；

(3) $C=\{3$ 个数字中 5 恰好出现两次$\}$；

(4) $D=\{3$ 个数字中至少有一次出现 5$\}$.

5. 将 3 个球随机地放到 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1、2、3 的概率.

6. 电话号码由 8 位数字组成，每个数字可以是 0，1，2，3，…，9 中任一数字，求电话号码由完全不同的数字组成的概率.

7. 从 1 ~ 100 的 100 个整数中随机地取一个数，求它能被 6 或 8 整除的概率.

8. 一批零件共有 100 个，次品率为 10%，从中连续取两次，每次取一件(不放回抽样)，求：

(1) 第二次才取到正品的概率；

(2) 第二次取到正品的概率.

9. 在长度为 c 的线段内任取两点将其分成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

课程名称：　　　　　　　　　　　学习时间：　　　　　　　　　年　月　日

授课章节	第一章　随机事件及其概率 1.5　条件概率与乘法公式
目的要求	了解条件概率的定义，掌握乘法公式，会应用全概率公式和贝叶斯公式
重点难点	利用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式计算概率

主要内容

学习笔录：

1. 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，则称：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率.

在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率为：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (P(B)>0)$$

2. 乘法公式

设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$，设 $P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$.

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则有：

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

3. 全概率公式

设试验 E 的样本空间 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$(其中 $i=1$，2，…，n)，则：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

称为全概率公式.

4. 贝叶斯公式

设随机试验 E 的样本空间 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0$(其中 $i=1$，2，…，n)，则：

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为贝叶斯公式.

本次课作业

1. 计算以下问题.

(1) 已知 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(B\mid A)$.

(2) 已知 $P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求 $P(B\mid A\cup\bar{B})$.

2. 掷三枚骰子，已知得到的三个点数不同，求其中含有 1 点的概率.

3. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随意地拨最后一个数，求：

(1) 不超过三次拨通电话的概率；

(2) 已知最后一个数字是奇数，求不超过三次拨通电话的概率.

4. 一批同样规格的零件是由甲、乙、丙三个工厂生产的，三个工厂的产品数量分别是总量的20%、40%、40%，并且已知三个工厂的产品次品率分别为5%、4%、3%. 今任取一个零件，求：

(1) 它是次品的概率是多少；

(2) 发现它是次品，则该产品由甲工厂生产的概率.