高等教育土建类专业规划教材
卓越工程师系列

理论力学
学习指导与习题精解

LILUN LIXUE
XUEXI ZHIDAO YU XITI JINGJIE

主　编　张代全　刘筱玲　陈国平
副主编　李俊永　朱水文　姚哲芳

重庆大学出版社

高等教育土建类专业规划教材**卓越工程师系列**

理论力学学习指导与习题精解

LILUN LIXUE XUEXI ZHIDAO YU XITI JINGJIE

主　编　张代全　刘筱玲　陈国平

副主编　李俊永　朱水文　姚哲芳

安徽理工大学 藏書 图書馆

重庆大学出版社

内容提要

本书是与刘筱玲等主编的《理论力学》相配套的学习辅导教材，旨在帮助读者更好地理解和掌握主教材内容，从而更深入地理解理论力学的基本概念、基本理论和基本方法，并在此基础上进一步扩展和延伸知识面。每章都对主教材知识点内容进行了整理和归纳，对易出现的问题进行了分析，并结合例题进行了疑难解析。最后，针对每章的习题给出了详细的参考解答。

本书可以作为在校生学习理论力学课程的参考用书，也可为从事理论力学教学的老师、准备参加研究生入学考试的学生提供帮助。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学学习指导与习题精解 / 张代全，刘筱玲，陈国平主编. -- 重庆 ：重庆大学出版社，2020.1

高等教育土建类专业规划教材. 卓越工程师系列

ISBN 978-7-5689-1621-9

Ⅰ.①理…　Ⅱ.①张…②刘…③陈…　Ⅲ.①理论力学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 224791 号

高等教育土建类专业规划教材 · 卓越工程师系列

理论力学学习指导与习题精解

主　编　张代全　刘筱玲　陈国平

副主编　李俊永　朱水文　姚哲芳

责任编辑：王　婷　　版式设计：王　婷

责任校对：张红梅　　责任印制：张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：饶帮华

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023)88617190　88617185(中小学)

传真：(023)88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）

全国新华书店经销

重庆俊蒲印务有限公司印刷

*

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：11.75　字数：287 千

2020 年 1 月第 1 版　　2020 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5689-1621-9　定价：35.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题，本社负责调换

版权所有，请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书，违者必究

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

理论力学是工科院校的一门重要的技术基础课。为适应21世纪教学内容和体系的发展，诸多高校都编写了多版改革教材，也对课程的教学辅助书籍提出了新的、更高的要求。为适应这一形势的发展需要，我们编写了这本理论力学辅导书，旨在为学生学习和复习理论力学内容提供一本提纲挈领、启发思维的参考读物。

本书在章节安排上与主教材（《理论力学》，刘筱玲、陈国平主编，重庆大学出版社，2018年）保持一致。全书共分9章，各章均包括三部分：第一，学习指导部分，提炼和概括了基本要求、知识点和常见问题；第二，例题解析部分，以若干具有代表性的典型例题来阐述问题的分析思路和求解步骤；第三部分对应于主教材习题，给出了每道题的详细解题过程，着重于解题思路和分析讨论。

本书编写分工为：陈国平编写第1章，张代全编写第2章和第6章，刘筱玲编写第3章，李俊永编写第4章和第5章，朱水文编写第7章和第8章，姚哲芳编写第9章。全书由张代全、刘筱玲统稿、定稿，由陈国平审阅。

由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2019年6月

目　录

1

运动学基础

1.1 学习指导

▶1.1.1 基本要求

(1)利用矢量法、直角坐标法和弧坐标法熟练建立点的运动方程和轨迹方程。

(2)在矢量法、直角坐标法和弧坐标法的条件下,建立点的瞬时速度、加速度矢量的概念,掌握点的瞬时速度、加速度大小的计算。

▶1.1.2 知识点

1)自然法

动点的速度方向总是沿着轨迹的切线方向。用 v 表示动点沿轨迹运动速度的大小,则有 $v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$,可写作

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau}$$

由此可知:动点沿轨迹的速度大小,等于弧坐标对时间的一阶导数。当 $\frac{ds}{dt}>0$ 时,s 随时间的延续而增大,因此 $\boldsymbol{v}$ 指向 s 增加的一边,即 $\boldsymbol{v}$ 的指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相同;反之,当 $\frac{ds}{dt}<0$ 时,则 $\boldsymbol{v}$ 的指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相反。

2）**刚体的平动**

刚体平移时，其内所有各点的轨迹形状相同。在任一瞬时，各点具有相同的速度和相同的加速度。刚体的平移问题可归结为点的运动问题。

3）**刚体的定轴转动**

定轴转动刚体上一点 M 的**速度**

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=R\omega \qquad 即：v=R\omega$$

定轴转动刚体上一点 M 的加速度，包括圆周运动的切向加速度和法向加速度。

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}R\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha \qquad 即：a_\tau=R\alpha$$

转动刚体内任一点的切向加速度 a_τ 的大小等于刚体的角加速度 α 与该点到轴线垂直距离 R 的乘积，而 a_τ 的方向沿圆周的切线方向，即 a_τ 指向应与 α 的转向一致。

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2 \qquad 即：a_n=R\omega^2$$

式中：ρ 是曲率半径（对于圆，$\rho=R$）。

转动刚体内任一点的法向加速度 a_n 的大小等于刚体角速度 ω 的平方与该点到轴线的垂直距离 R 的乘积，而 a_n 的方向与速度 v 垂直并指向轴心 O。

点 M 的（全）加速度 a 的大小为：

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$$

▶1.1.3 常见问题

（1）掌握描述点的运动的矢量法、直角坐标法和弧坐标法，利用几何条件建立点的运动方程和轨迹方程。

（2）理解不同方法的速度、加速度矢量，以及之间的关系，熟练掌握使用不同方法计算各种运动状态下点的瞬时速度、加速度的大小。

1.2 例题解析

【例题 1.1】荡木用两条等长的钢索平行吊起，如图 1.1 所示。钢索长为长 l，单位为 m。当荡木摆动时，钢索的摆动规律为 $\varphi=\varphi_0\sin\frac{\pi}{4}t$。其中 t 为时间，单位为 s，转角 φ 的单位为 rad。试求当 $t=0$ 和 $t=2$ s 时，荡木的中点 M 的速度和加速度。

【分析】由于两条钢索 O_1A 和 O_2B 的长度相等，并且相互平行，于是荡木 AB 在运动中始终平行于直线 O_1O_2，故荡木作平动，且两根绳子分别作定轴转动。为求中点 M 的速度和加速度，只需求出 A 点（或 B 点）的速度和加速度即可。点 A 在圆弧上运动，圆弧的半径为 l。如

以最低点 O 为起点建立弧坐标系，规定弧坐标 s 向右为正。

【解】A 点的运动方程为

$$s = \varphi_0 l \sin \frac{\pi}{4} t$$

将上式对时间求导，得 A 点的速度

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{4} l \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} t$$

再求一次导，得 A 点的切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{16} l \varphi_0 \sin \frac{\pi}{4} t$$

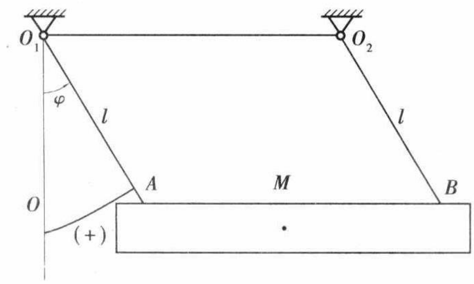

图 1.1　例题 1.1 图

A 点的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{\pi^2}{16} l \varphi_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t$$

代入 $t = 0$ 和 $t = 2$，就可求得这两瞬时 A 点的速度和加速度，即点 M 在这两瞬时的速度和加速度。计算结果列表如下：

T/s	φ/rad	v/(m·s^{-1})	a_τ/(m·s^{-2})	a_n/(m·s^{-2})
0	0	$\frac{\pi}{4}\varphi_0$(水平向右)	0	$\frac{\pi^2}{16}\varphi_0^2 l$(铅直向上)
2	φ_0	0	$-\frac{\pi}{16}\varphi_0 l$	0

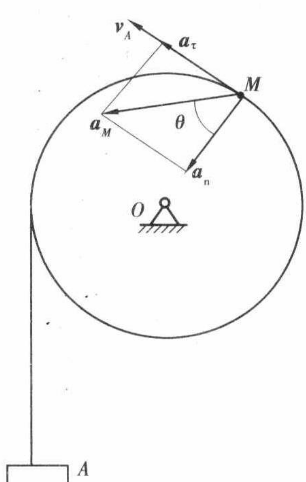

图 1.2　例题 1.2 图

【例题 1.2】滑轮的半径 $r=0.2$ m，可绕水平轴 O 转动，轮缘上缠有不可伸长的细绳，绳的一端挂有物体 A（如图 1.2 所示），已知滑轮绕轴 O 的转动规律 $\varphi=0.15t^3$，其中 t 以 s 计，φ 以 rad 计，试求 $t=2$ s 时轮缘上 M 点和物体 A 的速度和加速度。

【分析】此题先判定运动形式为定轴转动，且同一条绳子上的速度大小一样，则可以由转动的运动参数得到物块 A 的运动参数。

【解】首先根据滑轮的转动规律，求得它的角速度和角加速度为

$$\omega = \dot{\varphi} = 0.45t^2, \alpha = \ddot{\varphi} = 0.9t$$

代入 $t=2$ s，得：$\alpha=1.8$ rad/s^2，$\omega=1.8$ rad/s，

轮缘上 M 点上在 $t=2$ s 时的速度为 $v_M=r\omega=0.36$ m/s

加速度的两个分量

$$a_\tau = r\alpha = 0.36 \text{ m/s}^2, a_n = r\omega^2 = 0.648 \text{ m/s}^2$$

总加速度 a_M 的大小和方向

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0.741 \text{ m/s}^2, \tan\theta = \frac{\alpha}{\omega^2} = 0.556, \theta = 29°$$

1.3 习题详解

【习题 1.1】设动点从 x 轴上 O 点，按 $x=v_0t-2t^2$ 的规律运动，求动点速度为零的位置，动点回到 O 点时其速度的大小。

【解】对运动方程求导有：$\dot{x}=v_0-4t$

令 $\dot{x}=0$，有 $t=\dfrac{1}{4}v_0$，此时有 $x=v_0\times\dfrac{1}{4}v_0-2\times\left(\dfrac{1}{4}v_0\right)^2=\dfrac{1}{8}v_0^2$，此即为动点所处的位置；

此后动点将再向 O 点运动，由于动点的加速度为：$\ddot{x}=-4$，为常数，

动点再回到 O 点所经历的时间也是$\dfrac{1}{4}v_0$，

因此，从出发到再回到 O 点经历的总时间应为 $2t$，即$\dfrac{1}{2}v_0$。

代入方程可得，动点回到 O 点时的速度是：$\dot{x}=v_0-4\times\dfrac{1}{2}v_0=-v_0$。

【习题 1.2】一点按 $x=t^3-12t+2$ 的规律沿直线运动（其中 t 以 s 计，x 以 m 计）。试求：(1)最初 3 s 内的位移；(2)改变运动方向的时刻和所在位置；(3)最初 3 s 内经过的路程；(4)$t=3$ s时的速度和加速度；(5)点在哪段时间作加速运动，哪段时间作减速运动？

【解】(1)将 $t=3$ s 代入 $x=t^3-12t+2=7$ m（求得最初 3 s 内位移）

(2)对 x 求导有：$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12$（即速度为零时改变方向）

当速度为零时，有：$3t^2-12=0$，$t=2$ s（即经过 2 s 后速度为零）

$x=2^3-12\times2+2=-14$ m，此时位置坐标 $x=-14$ m

(3)在开始的 2 s 内：

$t=0$ 时，$x=2$ m

$t=2$ s 时，$x=-14$，路程为 16 m

$t=3$ s 时，$x=-7$，即 2 s 至 3 s 的路程为 7 m，总路程为 23 m

(4)速度方程为 $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12$

当 $t=3$ s 时，$v=3\times3^2-12=15$ m/s

加速度方程为 $a=\dfrac{dv}{dt}=6t$

当 $t=3$ s 时，加速度为 18 m/s^2

(5)因为加速度 $a=6t>0$，始终为 x 轴的正向。速度前 2 s 时与加速度方向相反，速度从 -12到 0，为减速运动；2 s 以后，速度与加速度方向相同，为加速运动。

【习题 1.3】分析下列论述是否正确：

(1)点作曲线运动时，加速度的大小等于速度的大小对时间的导数。

(2)点作直线运动时，法向加速度等于零。因此，若已知某瞬时点的法向加速度等于零，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

则该点作直线运动。

(3)点作曲线运动时,即使加速度的方向始终与速度方向垂直,点也不一定作匀速圆周运动。

【解】(1)错误。曲线运动时加速度有法向加速度和切向加速度两个分量,切向加速度的大小才是速度大小对时间的导数。

(2)错误。法向加速度在切向速度为零时也为零。

(3)正确。运动轨迹不一定是圆周。

【习题 1.4】设点作曲线运动,试问如图 1.3 所示的各种速度与加速度情形,哪些是可能的,哪些是不可能的？为什么？

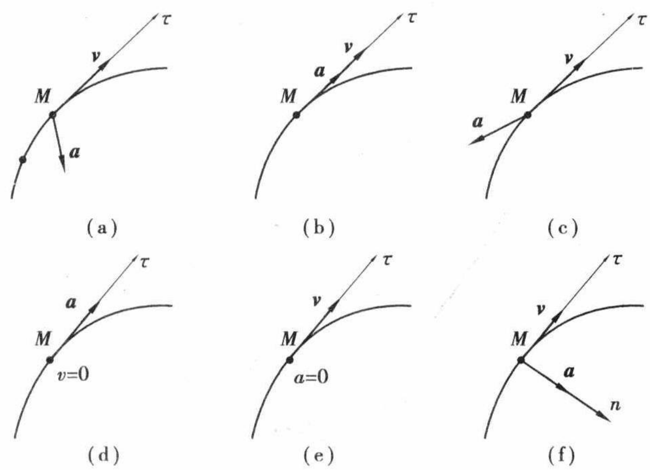

图 1.3　习题 1.4 图

【解】(a)可能,速度方向与切向加速度方向相反,减速运动;

(b)不可能,法向加速度为零的条件是速度为 0,或者作直线运动;

(c)不可能,法向加速度的方向要指向曲率中心;

(d)可能,速度为 0 的情况下法向加速度也为 0,点只有切向加速度;

(e)可能,加速度为 0,点保持匀速直线运动;

(f)可能,只有法向加速度,作匀速曲线运动。

【习题 1.5】已知动点的运动方程为 $y=bt,\varphi=ct$,b 和 c 均为常数,如图 1.4 所示。试分别用直角坐标和极坐标写出点的轨迹方程。

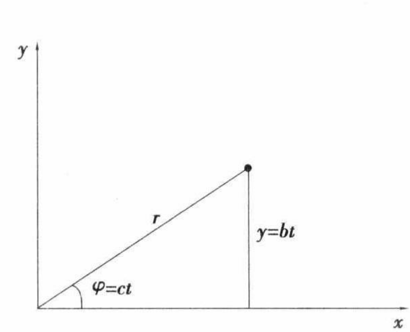

图 1.4　习题 1.5 图

【解】在直角坐标系中:$x=y\cot\dfrac{c}{b}y$

在极坐标系中:$r=\dfrac{y}{\sin\varphi}=\dfrac{bt}{\sin\varphi}=\dfrac{\varphi b}{c\sin\varphi}$

【习题 1.6】如图 1.5 所示,杆 AB 长 l,以等角速度 ω 绕点 B 转动,其转动方程为 $\varphi=\omega t$。而与杆连接的滑块 B 按规律 $s=\alpha+b\sin\omega t$ 沿水平一作谐振动。其中 a 和 b 均为常数。求点 A 的轨迹。

【解】应用直角坐标法,点 A 的运动方程为

$$x=a+b\sin\omega t+l\sin\omega t$$

$$y=-l\cos\omega t$$

轨迹可以表示为：$\dfrac{(x-a)^2}{(b-l)^2}+\dfrac{y^2}{l^2}=1$

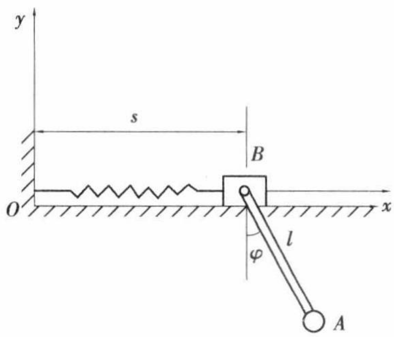

图 1.5　习题 1.6 图

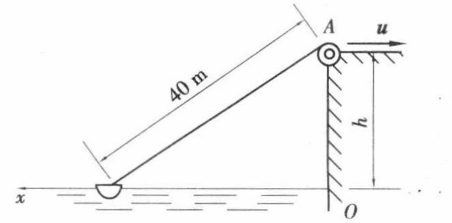

图 1.6　习题 1.7 图

【习题 1.7】如图 1.6 所示，从水面上方高 $h=20$ m 的岸上一点 A，用长 40 m 的绳系住小船。设以等速 $u=3$ m/s 拉绳。使船靠岸。问在 5 s 末船的速度多大？在 5 s 内船走了多少路程？

【解】由几何关系可得，船开始时距离岸边：$x=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{40^2-20^2}=20\sqrt{3}$ m；

5 s 以后，岸上的绳头向左移动了：

$$\Delta l = ut = 3\ \text{m/s}\times 5\ \text{s} = 15\ \text{m};$$

5 s 后河面上的绳索缩短为：

$$l-\Delta l = 40\ \text{m} - 15\ \text{m} = 25\ \text{m};$$

此时小船距离岸边：

$$x_t=\sqrt{(25\ \text{m})^2-(20\ \text{m})^2}=15\ \text{m};$$

5 s 小船移动的距离是：

$$\Delta x = x - x_t = 20\sqrt{3}\ \text{m} - 15\ \text{m} = 19.6\ \text{m};$$

小船的运动方程为：$x^2=(40-ut)^2-h^2$；

方程两边对时间求导，得：$2x\dot{x}=-2u(40-ut)$；

当 $t=5$ s 时，$x=15$，此时小船的速度为：

$$v=\dot{x}=-\frac{2u(40-ut)}{2x}=-\frac{2\times 3\ \text{m/s}\times(40\ \text{m}-3\ \text{m/s}\times 5\ \text{s})}{2\times 15\ \text{m}}=-5\ \text{m/s}，方向向左$$

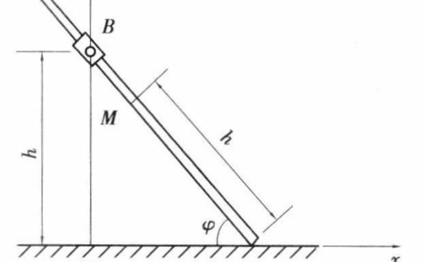

图 1.7　习题 1.8 图

【习题 1.8】一根杆子穿过可绕定点 B 转动的套管，杆的 A 端以匀速 c 沿固定水平直线 Ox 滑动。求杆上 M 点的运动方程和轨迹方程。设 $AM=OB=h$。

【解】(1)求 M 点的运动方程：

$$\begin{cases} x = ct - \dfrac{hct}{\sqrt{(ct)^2+h^2}} \\ y = \dfrac{h^2}{\sqrt{(ct)^2+h^2}} \end{cases}$$

(2)求 M 点的轨迹方程：

$$y = h\sin\varphi$$

$$x^2 = h^2(\cot\varphi - \cos\varphi)^2 = h^2(\cot^2\varphi + \cos^2\varphi - 2\cot\varphi\cos\varphi)$$

$$x^2 = \frac{h^4 - h^2y^2}{y^2} + h^2 - y^2 - \frac{2(h^3 - hy^2)}{y}$$

$$x^2y^2 = h^2(h^2 - y^2) + y^2(h^2 - y^2) - 2yh(h^2 - y^2)$$

$$x^2y^2 = (h^2 - y^2)(h - y)^2$$

$$(y^2 - h^2)(h - y)^2 + x^2y^2 = 0$$

【习题 1.9】曲柄 OB 的转动规律为 $\varphi = 2t$，它带动杆 AD，使杆 AD 上的 A 点沿水平轴 Ox 运动，C 点沿铅直轴 Oy 运动，如 $AB = OB = BC = CD = 12$ cm，求 D 点的轨迹方程，求并当 $\varphi = 45°$ 时杆上 D 点的速度。

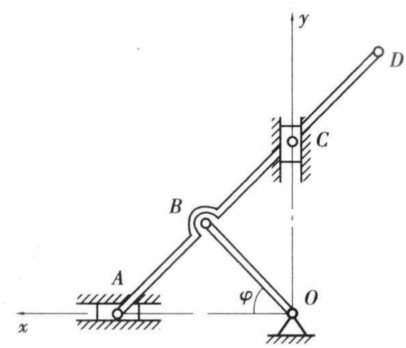

图 1.8　习题 1.9 图

【解】D 点的运动方程：

$$x = CD\cos\varphi = 12\cos 2t$$

$$y = AD\sin\varphi = 36\sin 2t$$

联立上述两式，消去 t 可得 D 点的轨迹方程如下：

$$\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1$$

D 点的速度：

$$v_x = \dot{x} = -24\sin 2t$$

$$v_y = \dot{y} = 72\cos 2t$$

当 $\varphi = 45°$ 时：$v_x = -12\sqrt{2}$ cm/s，$v_y = 36\sqrt{2}$ cm/s

【习题 1.10】刨床急回机构如图所示。r,h,H 均为已知，曲柄 OA 的转动规律为 $\varphi = \omega t$（ω 为常数）。求滑块 C 沿水平轨道滑动的速度和加速度。

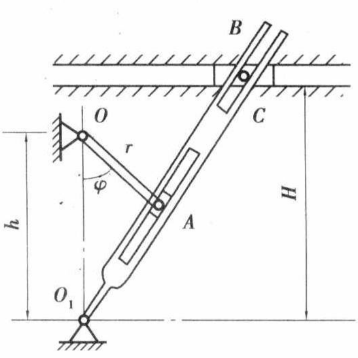

图 1.9　习题 1.10 图

【解】以 O_1 点为原点建立直角坐标系，滑块 C 的位置有 x 确定，根据三角比关系有：

$$\frac{r\sin\varphi}{x} = \frac{h - r\cos\varphi}{H}$$

C 的运动方程：$x = \dfrac{Hr\sin\omega t}{h - r\cos\omega t}$

C 点的速度为：$v = \dot{x} = \dfrac{rHw(h\cos wt - r)}{(h - r\cos wt)^2}$

C 点的加速度为：

$$a = \ddot{x} = \frac{-rHw^2(h^2 - 2x^2 + rh\cos wt)\sin wt}{(h - r\cos wt)^2}$$

【习题 1.11】若三级火箭在 A 点脱离时，其速度为 $u = 15\ 000$ km/h，脱离时速度与水平线夹角为 45°，然后在没有推力作用的情况下飞行到 B 点，到 B 点后发动机才打开。这时轨道与水平一的夹角为 20°。在从 A 点到 B 点这段时间间隔内，引力加速度的大小和方向均可认

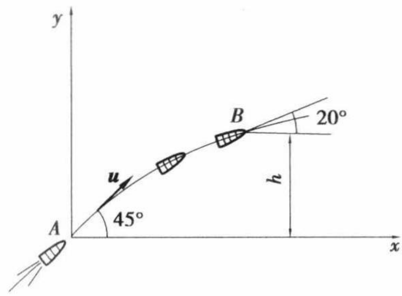

图 1.10　习题 1.11 图

为不变,可取 $g=9\ \mathrm{m/s^2}$。求从 A 点到 B 点所需的时间 t(这个时间对设计点火控制系统时有用),并求在这过程中高度的增量 h。

【解】在任一瞬时第三级火箭的加速度在 x,y 方向上的投影为:

$$a_x=0, a_y=-g$$

积分一次后,可得:

$$v_x=c_1, v_y=-gt+c_2$$

选第三级火箭刚脱离时的点 A 为初瞬时点,则有 $t=0$ 时:

$$v_{0x}=u\cos 45°, v_{0y}=u\sin 45°$$

把这个初始条件代入上式,可得:

$$v_x=u\cos 45°, v_y=-gt+u\sin 45°$$

设第三级火箭飞行到 B 点时速度为 v,则有:

$$v_{Bx}=v\cos 20°=v_x=u\cos 45°, v_y=v\sin 20°$$

因此可得:

$$v=\frac{u\cos 45°}{\cos 20°}=3\ 135\ \mathrm{m/s}$$

$$t=\frac{u\sin 45°-v\sin 20°}{g}=208\ \mathrm{s}$$

上升高度:

$$h=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2=ut\sin 45°-\frac{1}{2}gt^2=418\ \mathrm{km}$$

【习题 1.12】杆 AB 在半径等于 r 的固定圆环半面中以匀速度 u 沿垂直于杆本身的方向移动。求同时套在杆与圆环上的小环 M 的自然形式的运动方程及其速度。设初瞬时,小环 M 在大环的最高点 M_0 以后向右运动。

【解】由自然法有:$s=M_0M=r\varphi$

由于:$\cos\varphi=\dfrac{r-ut}{r}$

所以小环的自然运动方程为:

$$s=r\arccos\frac{r-ut}{r}$$

其速度为:
$$v=\dot{s}=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{r-ut}{r}}}$$

【习题 1.13】一点 M 由静止开始作匀速圆周运动。试证明该点的全加速度和切向速度的夹角 α 与经过的那段圆弧对应的圆心角 β 之间存在如下关系:$\tan\alpha=2\beta$。

【证明】设全加速度为 $\boldsymbol{a}$,则经过时间 t 后,动点 A 走过的弧长和速度分别是:$s=\dfrac{1}{2}a_\tau t^2$,

$v=a_\tau t$。

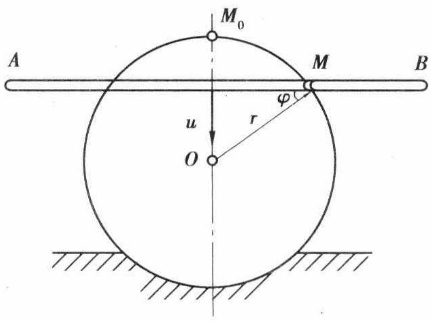

图 1.11　习题 1.12 图

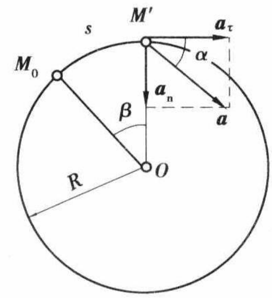

图 1.12　习题 1.13 图

动点 A 的法向加速度可表示为：

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(a_\tau t)^2}{R}=\frac{2sa_\tau}{R}$$

动点 A 的全加速度与切线间的夹角 α 可表示为：

$$\tan\alpha=\frac{a_n}{a_\tau}=\frac{2s}{R}=\frac{2R\beta}{R}=2\beta$$

证毕。

【习题 1.14】如图 1.13 所示，摇杆机构的滑杆 AB 在某段时间内以等速率 u 向上运动，试分别用直角坐标及自然法建立摇杆上 C 点的运动方程，并求此点在 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$时速度的大小(假设初瞬时 $\varphi=0$，摇杆长 $OC=\alpha$)。

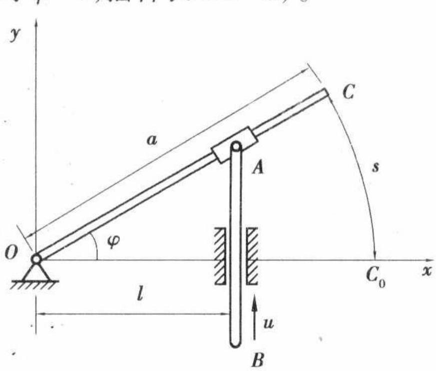

图 1.13　习题 1.14 图

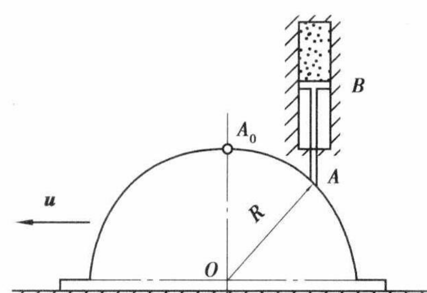

图 1.14　习题 1.15 图

【解】由自然法有：$s=a\varphi$，又 $\tan\varphi=\dfrac{ut}{l}$，所以自然运动方程为：$s=a\arctan\dfrac{ut}{l}$

$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，速度为：$v=\dot{s}=\dfrac{au}{l(1+\tan^2\varphi)}=\dfrac{au}{2l}$

直角坐标方程：

$$x_C=a\cos\varphi=\frac{al}{\sqrt{u^2t^2+l^2}}$$

$$y_C=a\sin\varphi=\frac{aut}{\sqrt{u^2t^2+l^2}}$$

【习题 1.15】如图 1.14 所示，半圆形凸轮以等速 $u=1$ cm/s 沿水平方向右运动，而使活塞杆 AB 沿铅直方向运动。当运动开始时，活塞杆 A 端在凸轮的最高点上。如凸轮的半径 $R=8$ cm，求活塞 B 相对于地面和相对于凸轮的运动方程和速度。

【解】(1)A 相对于地面运动，直角坐标系固连在地面上。则 A 的运动方程为：

$$x=0, y=\sqrt{R^2-v_0^2t^2}=0.01\sqrt{64-t^2}\ (0\leqslant t\leqslant 8)$$

A 的速度为：

$$v_x=\dot{x}=0,\ v_y=\dot{y}=-\frac{0.01t}{\sqrt{64-t^2}}\ \text{m/s}$$

A 相对于凸轮的运动为圆周运动，其自然方程为：

$$s_r=r\arcsin\frac{ut}{r};\ v_r=\frac{8}{64-t^2}$$

【习题 1.16】点 M 沿一平面上的曲线轨迹运动，其速度在 y 轴上的投影在任何时刻均为常数 c。试证明在此情形下，加速度的值可用 $a=\dfrac{v^3}{c\rho}$ 表示，式中 v 为速度，ρ 为曲率半径。

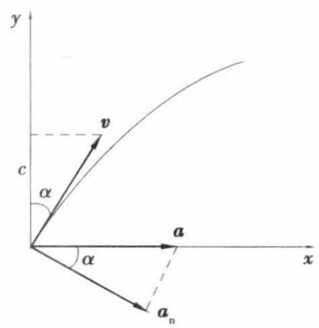

图 1.15　习题 1.16 图

【证明】方法(1)：设全加速度为 a，法向加速度为 a_n，依题意有矢量关系图：

根据几何关系有：$a\cos\alpha=a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$v\cos\alpha=c$

所以有：$a=\dfrac{v^2}{\rho\cos\alpha}=\dfrac{v^3}{c\rho}$，证毕。

方法(2)：已知 $a_x^2+a_y^2=a^2$，由于 $a_y=0$，所以 $a_x^2=a^2$，$a_x=a$

又：$v_x^2+v_y^2=v_x^2+c^2=v^2$

两边对时间求导，有：$2v_xa_x+0=2va_\tau$，$\dfrac{v_x}{v}=\dfrac{a_\tau}{a_x}$

而：$a_\tau^2+a_n^2=a_\tau^2+\dfrac{v^4}{\rho^2}=a^2$

将 $a_\tau^2=\dfrac{v_x^2}{v^2}a_x^2=\dfrac{v_x^2}{v^2}a^2$ 代入，有：$\dfrac{v_x^2}{v^2}a^2+\dfrac{v^4}{\rho^2}=a^2$

将 $v_x^2=v^2-c^2$ 代入，得证：$a=\dfrac{v^3}{c\rho}$。

【习题 1.17】炮弹的发射角为 α，初速度为 v_0，空气阻力略去不计。试求炮弹在其速度与水平线成 θ 角处的法向加速度、切向加速度以及轨迹在该点的曲率半径。

【解】由题意有矢量关系图，根据几何关系有：

$$a\cos\theta=a_n, a\sin\theta=a_\tau$$

又因 $a=g$，所以有：

$$a_n=g\cos\theta, a_\tau=g\sin\theta$$

因为 $v_x=v_0\cos\alpha=v\cos\theta$

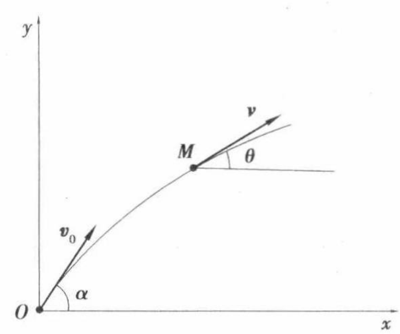

图 1.16　习题 1.17 图

所以 $v=\dfrac{v_0\cos\alpha}{\cos\theta}$,同时 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$,因此该处的曲率半径为:$\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{\left(\dfrac{v_0\cos\alpha}{\cos\theta}\right)^2}{(g\cos\theta)^2}=\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g^2\cos^4\theta}$

【习题 1.18】已知某动点用极坐标表示的运动方程为:$\rho=3+4t^2$,$\varphi=1.5t^2$。求 $\varphi=60°$ 时点的速度与加速度。ρ 的单位为 m,φ 的单位为 rad,t 的单位为 s。

【解】

因为:$\varphi=60°=\dfrac{60\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}\approx 1\ \text{rad}$,而 $\varphi=1.5t^2$,所以 $t=0.7$ s

已知:$s=\rho\cdot\varphi$

因此:$v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\rho\cdot\varphi)=\dfrac{d}{dt}[(3+4t^2)\cdot 1.5t^2]=\dfrac{d}{dt}(4.5t^2+6t^4)=9t+24t^3=14.5$ m/s

所以有:$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=42.3$ m/s^2,$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=9+72t^2=44.28$ m/s^2

即:$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=61.2$ m/s^2

【习题 1.19】如图 1.17 所示的曲柄滑杆机构中,滑杆有一圆弧形滑道,其半径 $R=100$ mm,圆心 O_1 在导杆 BC 上。曲柄长 $OA=100$ mm,以等角速度 $\omega=4$ rad/s 绕轴 O 转动。求导杆 BC 的运动规律,以及当曲柄与水平线间的交角为 30° 时,导杆 BC 速度和加速度。

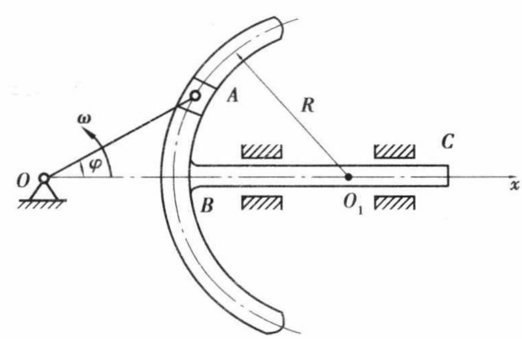

图 1.17　习题 1.19 图

【解】t 瞬时:

滑块的 x 坐标:

$$x=OA\cos\varphi=OA\cos\omega t$$

O_1 的坐标 x

$$x_{O_1}=2\cdot OA\cos\omega t=0.2\cos 4t$$

$$v_{BC}=\dot{x}_{O_1}=0.8\sin 4t$$

$$a_{BC}=\dot{v}_{BC}=3.2\cos 4t$$

$\varphi=30°$ 时

$$v_{BC}=0.4\ \text{m/s}$$

$$a_{BC}=1.6\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$$

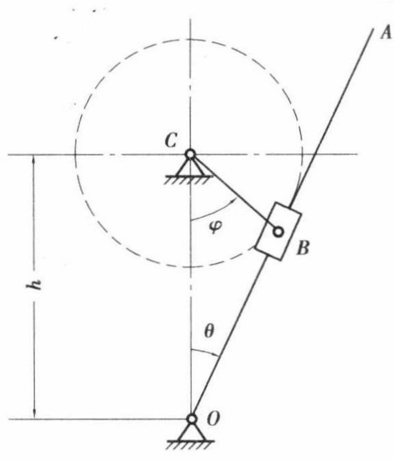

图 1.18　习题 1.20 图

【习题 1.20】如图 1.18 所示,曲柄 CB 以等角速度 ω_0 绕轴 C 转动,其转动方程为 $\varphi=\omega_0 t$。滑块 B 带动摇杆 OA 绕轴 O 转动。设 $OC=h$,$CB=r$,求摇杆的转动方程。

【解】由于 $r\sin\varphi=(h-r\cos\varphi)\tan\theta$

有 $\tan\theta=\dfrac{r\sin\varphi}{h-r\cos\varphi}=\dfrac{r\sin\omega t}{h-r\cos\omega t}$

其 OA 杆的转动方程为:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com