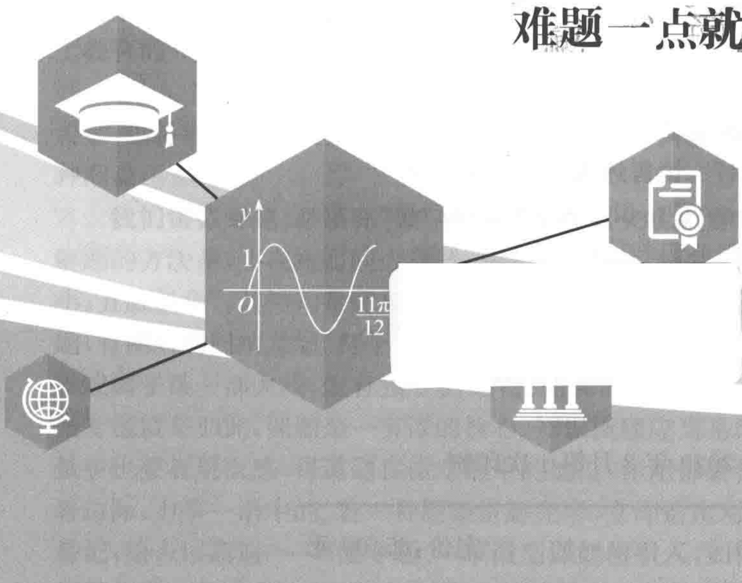
李正兴 著

李正兴 高中数学微专题

思想方法篇

微专题，点石成金，

难题一点就透，引领解题高手！



上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

总序

一

《李正兴高中数学微专题》系列共8册，约500节微型课程，四百万字，近日将由上海社会科学院出版社陆续推出. 这8个分册依次为《思想方法篇》《压轴题攻略篇》《代数篇》《几何篇》《妙思巧解篇》《一题多解篇》《一题多变篇》《战略战术篇》.

为什么要推出篇幅如此浩大，类型又更显丰富的系列丛书？与我近二十年来出版的二十套六十余本教辅书有哪些不同？或者说这套新书有些什么鲜明的特色？可以这样说：**我过去的写作采用的大都是“宏观叙事”的写作风格**，一本书分若干章，每章若干节或若干讲，以每一节或每一讲为“叙事”单位，通常一节或一讲包含联系较为紧密的若干知识点，多种解题方法. 以《高中数学专题精编》为例，每讲由“知识储备”“双基回眸”“例题精讲”“易错警示”“链接高考”“专项训练”6个方面实施“推进式”辅导，如果以此安排一次讲座，通常需要3小时以上；又比如我著的红蓝宝书以及《知识点梳理·精讲·贯通》系列，每讲除了“知识储备”“双基回眸”“经典例题”3部分之外还加入了“疑难解析”“常规解法与妙思巧解”“真题导读”“试题猜想”“实战演练”5个部分，这种“宏观叙事”的写法当然是需要的，是对教材体系的深度解读，重视知识之间的交汇与解题方法的广阔展示. 也只有“宏观叙事”才能把一个较大的专题讲深讲透. 这类书可以慢慢细读品尝，自有其存在的功效，不必限定在短时间内完成. 从另一个方面来看，当前培训市场新生事物不断涌现，一是线上教育的开发，通常一节视频直播30分钟到45分钟，时间太长大脑容易疲劳，效果不一定好；二是人工智能与教育的结合正在蓬勃兴起，如松鼠AI智适应教育主张对知识的拆分要细，难易的分级层次要多，课题势必朝微小的方向发展，微专题设计课堂教学将成为一种潮流.

我们讲微专题，必须在“微”字上花工夫. 首先课题要小，课题太大必然是知识容量大，解题的方法多，要在短时间内讲透、讲到位是不可能的. 但作为一节微课，我们说“麻雀虽小，五脏俱全”，其结构是完整的，教育目标是明确的. 有知识点，有由浅入深的3～5道例题，有课后的归纳总结. 打个比方，一节好的微课，是一部大戏的一个折子戏，虽然这个折子戏属于某一部大戏，但有独立的结构、明确的中心、完美的呈现，具有独特的欣赏价值. 微专题就是如此，课题是一节课的核心，知识梳理应当是简洁的，甚至只给出关键词，例题虽少也要有层次感，每道题在微专题中的地位、作用都要作通盘考虑，分析切忌大而空，不着边际，力争一语中的. 若一种题型讲解完毕，立即给出对这类题型的归纳总结，语言简短易记，给人以启迪. 一个微专题、一节微型课如何引入，如何展开，知识层面上如何发散，如何抓住学生的注意力，如何激发学生的学习兴趣，课后如何精选少量习题巩固练习、检测反馈，都应作出独具匠心的安排. 如果说一节大课，一次讲座，3个小时好比一部大戏，是对

一个较大专题的宏大书写，那么一节微课是对一个小专题的精微呈现，一节微课，短短半个小时的视频直播，如同导演一出舞台剧，一部折子戏，序幕（通识）、情节展示（具有层次的典型例题）、高潮（精准的分析、讲解、具有节奏感的推进、恰到好处的简短总结、引人入胜的妙思巧解），一环紧扣一环，给人以美的享受（引领学生走向成功）. 以上所述，可以说是我撰写微专题系列的理念，由于是初创性的，大约500节微课，做到完美无缺也难，某些课还待不断修改打磨，正像一些优秀的折子戏往往需要很长时间的打磨才成为传世之作. 从微专题转换成微视频也有一个再创作的过程.

下面对八个分册逐一作出简短的介绍：

其一：《思想方法篇》十三章七十二讲. 我借用了《孙子兵法》十三篇，解题也如用兵，数学思想方法可以比喻为解题的兵法. 可以进一步说："知识"是基础，"方法"是手段，"思想"是深化，数学思想方法是解题的灵魂，是站在高处看问题，"一览众山小"，是居高临下、势如破竹.

第一章　分析与综合的思想方法三讲与"谋攻篇"相对应.
第二章　结构与模型的思想方法四讲与"虚实篇"相对应.
第三章　函数与方程的思想方法九讲与"作战篇"相对应.
第四章　变元与参数的思想方法五讲与"计篇"相对应.
第五章　数与形结合的思想方法十三讲与"形篇"相对应.
第六章　对称与对偶的思想方法二讲与"势篇"相对应.
第七章　转化与变换的思想方法十一讲与"九变篇"相对应.
第八章　化归与辩证的思想方法五讲与"军争篇"相对应.
第九章　特殊与一般的思想方法二讲与"九地篇"相对应.
第十章　整体与局部的思想方法四讲与"地形篇"相对应.
第十一章　分类与整合的思想方法十讲与"行军篇"相对应.
第十二章　归纳与类比的思想方法二讲与"火攻篇"相对应.
第十三章　演绎与推理的思想方法二讲与"用间篇"相对应.

其二：《压轴题攻略篇》三章五十讲，高考数学压轴题体现在数学解题能力与核心素养的考查上，需要解题者掌握"高处着眼、细微处入手"的功夫. 第一章，攻克压轴题的战略构想十讲，引导学生面对压轴题如何构造出一个解题计划的思路，从可以接近它的方向去攻击堡垒，对扑朔迷离的表象进行由表及里、去伪存真的分析、加工、改造，从不同方向探索，以不同的角度审视，在广阔的范围内选择运用解题的核心技巧. 如扎根基础、树上开花；解题要诀、谋定后动；聚焦题根、举一反三；发散思维、移花接木；活用策略、借石攻玉……掌握以上种种，对攻克压轴题如虎添翼. 第二章，攻克压轴题的战术提升十讲，优秀的解题者必须开拓视野，拓展知识面，注重解题方法的提升，激发迁移性思维与创造性思维，运用数学竞赛的特殊方法"攻城略地". 第三章，打响攻克压轴题的阵地战三大板块：函数与导数十一讲，数列与不等式八讲，解析几何十一讲，共三十个微专题. 对近几年高考中出现的压轴题进行了系统的整理，精选了其中最为典型的问题进行分析归类，选例紧扣课题，每题给出解题策略和尽可能的多种解法，并给出1～2道发散训练题，让学生趁热打铁、巩固升华.

其三:《代数篇》五十讲、其四:《几何篇》四十讲,合计九十个微专题,是高中数学的核心专题,充分呈现最重要的核心通识通解.课题的确定完全依据今年秋季在全国范围内正式使用的人教A版高中数学必修课程与选修课程,与新高考改革全面接轨,这九十讲立足基础、阶梯上升,体现核心素养,注重能力提升,以“怎样解题”为切入点(也是向解题大师G.波利亚致敬),点面结合、深入浅出,典型例题2～3道,易错警示1道、剑指难题1道、巩固练习2～3道,一个小时内既讲透课题,又及时反馈.这两本的特色是阶梯建构,既尊重学习者的个体差异、认知规律,又注重挖掘潜力、激发兴趣,其中易错警示的安排帮助学生寻找本专题中的易错点,努力对常见的解题误区和错因进行入木三分的剖析,知其因,懂其果,引以为戒,防患于未然,在正面分析典型例题的基础上进行及时的查漏补缺,突破瓶颈状态,消灭低级错误,正如堵塞不畅的河道只有加以疏通才能通畅无阻、一泻千里,这一步工作做好、做到位,是短时期内提高成绩的有效途径.剑指难题选例大多是具有综合性和创新精神的精彩好题,讲透这类题,使整节微课进入高潮!

其五:《妙思巧解篇》,撰写的主旨是:突破常规,轻松超越.数学是一个由无数问题组成并进行研究的学问,解题术的探究永远是数学学习中的宝藏,本篇的精彩之处就在于每道例题既给出常规解法,又给出妙思巧解(有时提供多种),数学思维应当是发散性的、批判性的、具有创造性的,解题之前对问题精到的分析总是“大处着眼,小处入手”,这“大处着眼”就是通过发散性思维、批判性思维、创造性思维寻求破解之道,产生奇思妙想,妙思巧解是数学智慧的精彩之果,对难题的“智取”比“常规”更富有数学灵动的特点.

其六:《一题多解篇》,G.波利亚说:“从理解题目到构思一个解题方案也许是漫长的曲折的过程.事实上,解答一个题目的主要成就在于构思一个解题的方案.”我认为G.波利亚的说法可作这样的改变,即解答一个题目尝试构思若干个解题的方案,好题往往可以从多个角度入手,设问形式灵活的题目总会有多种解题方法与之匹配,那么如何才能构思多个解题方案呢?由于看同一个问题的角度可以不同,思维中脑海里涌现出来的相关知识点也会不同,而知识之间常常是交错联结,互相渗透,于是各种思路就会涌现出来,一题多解也就产生了.我希望学生在复习的过程中首先要把知识点梳理清楚,构建知识网络图;然后逐步学会从不同的角度看待同一个问题,寻求解决问题的多种途径,尝试采用若干不同的解法;再进行比较研究,各种解法或简洁或繁杂,或直接或曲折,从而找出最为简洁明了的解法.当然也有可能一个问题的不同解法各有妙处,比如对空间图形的研究,有立体几何的一套解法,也有空间向量的一套解法,自成体系,各有千秋,难说谁优谁劣.总而言之,善于发散思维,掌握一题多解,即是基本能力,基本技巧的实战演习,也是解题能力的升华.可以用钱锺书的诗作这样的比喻:碰到难题好比“云深难觅处,河浅亦迷津”,必须设法解决它,“那得五丁开路手,为余凿梦两通连”,一旦思路来了,解法如潮涌动,“滂沛挥刀流不断,奔腾就范隘而妨”,求学问的哲理大致如此!只有打好扎实的数学基础,重视解题方法的研究,困难隔不断你的解题思路,灵感使你进入腾飞状态,“方法每前进一步和每上一个台阶一样,它会为我们展开更为广阔的视野,因而看到前所未有的现象”(巴甫洛夫).希望本篇助你成为“武林高手”.

其七:《一题多变篇》,好的数学题往往紧扣数学概念的本质,为了加深对概念的深入理解,如果将典型性强的问题,通过变式,多角度、全方位挖掘概念的内涵,从而举一反三

解决一大批题目，有助于培养创新意识，提升数学核心素养. 我们把那些极具典型性的好题称之为“题根”或“母题”，以这些好题出发，通常会有几种变式形成“变式网络”，或改变“条件”看一看能否推出类似的结论；或在同样条件下，推究还会推出怎样的新结论；或变一下问题的“规则”，使原问题突显创新的成分. 寻求“题根”与“变式”、“母题”与“子题”是数学教育的一抹亮色. 当然所谓“变式”或“子题”与“题根”或“母题”必然有一条红线串起来，这条红线就是“变式网络”或“亲缘关系”，可以运用思维导图的模式呈现，科学性不容置疑，新颖性是“变式”或“子题”优劣的标志，适当变式，精而不泛.

其八：《战略战术篇》，它与《思想方法篇》相呼应，由于解题战略、战术枝繁叶茂、丰富多彩，故安排一百节微课，聚焦于解题的战略、战术和学科方法.

如何才能有效地破除题海战术，实现高效的数学学习呢？集中到一点就是教会学生解题的有效方法，教师应当有点石成金的手段，让学生掌握解题兵法，包括解题的战略构想、解题的战术运作、解题中数学思想领悟（在《思想方法篇》中详细介绍），解题中学科方法落实四大环节，解题术的研究领域极其丰富多彩，本篇选择其中最为重要的专题展开. 如数学解题、四大环节；审题、谋划、构思方案；实施方案、层层推进，关注联结、催生思路；联想生辉、触类旁通；重在构造、移花接木……又如进退自若、反客为主、正难则反、以奇制胜……又如等价转化法、参变分离法、顺推法、递推法、反证法……林林总总，归结到一点：数学解题必须迅速读懂题目，调动脑海中对数学知识、解题方法等信息的贮存，找到问题解决的主攻方向，总体把握、精准部署，向问题发出攻击令.

二

张中行先生在他的《顺生论》一书中有这样一段话：“生，来于天命，我们抗不了，于是顺. 顺之暇，我们迈出几步，反身张目，看看它的脸色，总比浑浑噩噩，交臂失之，或瑟瑟缩缩，不敢仰视，好一些吧？”把不得不顺应环境又向往入世、积极进取的儒生心态刻画得入木三分.

由于“文化大革命”打破了我高中毕业即考入高校求学的梦想，我这个 66 届高中生在经受了那个时代给青年人带来的苦难后，正逢中学缺少师资，终于从 1974 年开始到中学任教，开启了我数十年的教师生涯. 1977 年恢复高考进入上海师范大学数学系学习，毕业后名正言顺地当了高中数学教师，从走上三尺讲台至今度过了四十五个春秋，痛并快乐着. 只要时代给我们机会，我们一定会给时代抹上明亮的色彩，人的灵魂渴望向上，就像游子渴望回到故乡一样. 灵魂的故乡在非常遥远的地方，只要生命不止，它就永远在思念、在渴望，永远走在回乡的途中. 离开三尺讲台已有多年，我始终怀念在三尺讲台前挥洒的岁月. 四十多个春夏秋冬，我始终认为一个数学老师的成功莫过于让学生喜欢数学，感受串串枯燥的数字与冰冷的公式中蕴藏着如哲学般深刻的智慧和如文学般灵动的思想，体味数学的魅力. 我追求上课风趣幽默，言简意赅，详略得当，有点石成金的功夫. 对一些难题一点就破，把每节课讲得生动、活泼、易懂，以问题的情境作为教学的出发点，以娴熟的授课艺术感染、激励学生. 有关我上课的场景，有一位学生写过一篇很传神的短文，全文录于下面，也是对四十多年教学生涯的一种纪念.

吾师李公正兴传

某日．教室．

有一中年教师正在慷慨陈词，底下学生满堂，少有人离神．教师系上海人氏，操一口上海话，说得平平仄仄，抑扬顿挫，高声处若峻峰插天，低音时如陡坡接地，极富感染力．说到尽兴，老师独自嘿嘿而笑，学生哄堂大笑．整个教室笑意融融，竟胜似户外光景．此师动作亦很投入，时而拿出一些粉笔“排列组合”，时而举起双手当空了了勾画，常以手掌代替擦板，状极潇洒．快下课时，老师忘我，众目睽睽下，眉飞色舞，大谈其教学生涯．众生愕然，继而善意一笑，依然凝神细听．

呜呼，似这等真性情、全身心投入教学之老师，诚少见矣．其言行也怪，其童心未泯，其授课认真，皆非世俗标准所能衡量也！

此师，则李公正兴也．其人冠绝天下；其课亦横盖当世．

有些课只为给旁人看，或专供领导查阅、观赏．便有子只把备课当成差使，照抄教参教案，对教材教法学法一无所知，待到上课，便抱教参、教案读．有师若此必无心于学生，影响教学效果，亦不利学生的发展，所培养者仅一批死记硬背的“机器”，“索然无味”矣．

李公不然．其备课认真慎重，对教材、教法、学生、学法等方面了若指掌，在课堂教学中随机应变、左右逢源，极致发挥教师之本，使其讲授妙趣横生．

其课何优耶？

一、深厚思想．

备课时端正思想，乃成事保证．备课只为上好课、优化教学质量．李公对备课有了正确的思想认识，故而备课认真．

二、钻研教材．

李公酷爱钻研教材、资料．其饱览教材及各地各校的参考资料，可谓“胸有教材”．李公更是立于整体深入地了解教材内容体系，确定教学重、难点，化教材为己用，以臻自如．

三、了解学生．

了解学生方能因材施教！而李公不但了解学生的知识技能、学习习惯，以拟订相应教法、学法，更于课余与学生打成一片，了解诸生的生活习惯等，可谓“身体力行”．

四、选择教法．

前苏联教育家孔德拉狄克有言：“教学成败取决于教师能否妥善选择教法；知识的明确性、具体性、根据性、有效性、可信性，有赖于对教学方法的有效利用．”李公正是根据教学内容和教学实际，进行教法的选择、创造，以寻适于本班学生的教学方法．教学重在教法，要以法导学．

此，即吾师李公正兴也．

——颜佳琪

虽然有些话语讲得过了，但确实反映了学生出自内心的一些感受．

（原文见上海人民出版社 2004 年本人所著《新课标高考数学攻略》代序“一个高中班级数学教学过程的剖析”．）

三

退休已进入第十二个年头，却仍然是整天忙忙碌碌，但内心是安静的，人生最好的境界是丰富的安静，正如哲学家周国平所言："安静，是因为摆脱了外界虚名浮利的诱惑. 丰富，是因为拥有了内在精神世界的宝藏.""你的身体尽可以在世界上奔波，你的心情尽可以在红尘中起伏，关键在于你的精神中一定要有一个宁静的核心."他还说："尽管世上有过无数片叶子，还会有无数片叶子. 尽管一切叶子终将凋落，我仍然要抽出自己的绿芽."这些话语与我的内心是非常合拍的，在物欲横流的人世间以平静的心态坚持做对社会有价值的事情，这种坚持与名利无关，名够累人，利也不缺. 进取也罢，退隐也罢，都逃不脱时光的变迁，与其退隐，不如进取，退隐自守，清静无为，不是我欣赏的人生哲学. 一个人的精神财富是以他的心灵为仓库的. 今天我们大谈"你幸福了吗?"对我而言，能静心地把四十余年的教学经验和知识传授给那么多学生，可以称得上是幸福了！孔子曰："士不可以不弘毅，任重而道远，仁以为己任，不亦重乎？死而后已，不亦远乎？"人生在世，既能站得正，又能跳得出，这是一种很高的境界，要完全做到唯有看轻沉浮荣枯，当然很难，但应尽力去做. 当下我的生活基本上由两件事组成：一是读书、授课、写作、教研，既发挥余热，又有益于社会，从中获得心灵的享受；另一是亲情和友情，从中获得生命的享受. 我相信，大自然提供的只是素材、家庭幸福是人生坚实的依靠，这是阳光下绵亘着人生简朴的幸福. 浩渺宇宙，一个生灵与另一个生灵的相遇总是千载一瞬，每当出版一部书，我想到的是要感谢我的家人.

钱锺书诗云："眼犹安障长看雾，心亦悬旌不待风."人生最美好的享受都依赖于心灵的能力. 虽心空万物却执着顽强，洒脱空灵却进退有度，仰望上苍是缅怀人世，俯视当下则勇往直前. 当一件工作完成，一本书收尾之际，我又在思考下一步：要抓紧读些什么书？规划再写一本怎样的书？是教辅，还是对自己钟情的数学文化、数学哲学作出深入的研究？还是其他？每当看到书房的书架上还有许多先哲的书没有看完，总会伤感人生苦短，暗下决心抽时间与先哲对谈. 读书、写作、研究，这是我的精神家园，书房、书桌、讲台是我安身立命的阵地，灵魂敞亮，你的老年人生就有了明灯和方向.

六州歌头——述怀

霜雪染发，落日夕阳红，述而斋，北窗下，清晖共，勤耕耘.
案上稿盈尺，渐升起，涓流积，沧溟水，拳石垒，泰山耸.
四千万言，廿部六十册，笑对晚风，人生苦与乐，尽在不言中.
岁月匆匆，白头翁，忆少年时，狂来笔、青春梦，豪情涌.
"文革"乱、神州坠、道难通，影朦胧.
小平扭乾坤，启高考，情意浓.
攻数理、授《九章》，心晶莹.
收得桑榆，满山桃李拥，暮敲晨钟.
浩然吟啸客，老眼望山川，漠漠苍穹.

四

年过七十，应该到了打扫战场的年龄，今年推出的两套书，一套是由上海科学普及出版社出版的“李正兴高中数学系列”：《高中数学核心解题技巧 120 讲》《高中数学红宝书——知识点梳理·精讲·贯通》《高中数学蓝宝书——实践必考点、破解压轴题》；另一套就是上海社会科学院出版社推出的《李正兴高中数学微专题》系列，这应该是我从事高中数学教学与研究总结性的著作. 忙忙碌碌的日子应该结束了，我应当安静下来“准备回家”，以一颗澄明的心抹去人世间泼过来的污秽，笑着面对人世间的不公正，留下的是温馨与美好. 我很欣赏王国维的诗句：“起看月中霜万瓦，卧闻风里竹千竿.”“奇峰颇欲作人立，乔木居然阅世新.”我也一直用他的诗句“那能白首下书帷”自励，但是我明白了“白首终得下书帷”. 四十五年了，在高中数学教育领域，我努力了，我的灵性和思想的傲骨曾经开出忧世且向善的花. 至少有百万高三学生用过我的书，这就够了，鲜花烂漫终会凋零！不是吗？

为我的最后一部作品填词一首.

金缕曲

——题《高中数学微专题》系列丛书

白发染双鬓，案台上，文稿盈尺，汗牛充栋.
八大本微型专题，思想方法技巧，细钩画，文思泉涌.
五色尚存生花笔，多与变，妙思来称雄，攻压轴，墨舞动.
青春岁月争锋，助学子，代数几何，梳理贯通.
四十载讲台挥洒，一亩三分耕耘，君应记，我心晶莹.
传道授业解惑事，势与术，闯关凭借神功，战略篇，波涛閲.

最后我要感谢我的妻子杨蕙芬，没有她的支持，我的 4000 多万字的专著是不可能写出来的. 我还要感谢上海社会科学院出版社的王芳主任和何红燕编辑，她们为我的书的出版付出了很多，她们也是数学教育战线上勤奋耕耘的战士.

限于本人水平，疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正，合作交流.

李正兴
于海上述而斋

前言

数学在其漫长的发展过程中不仅建立起了严密的知识体系，而且形成了一整套行之有效的思想方法. 数学思想方法是数学解题通法的概括和提升，制约着数学活动中主观意识的指向，可见数学思想是数学的核心，掌握了数学思想方法一定会大幅度提升解题能力与核心素养.

从某种意义上讲，数学问题的解决是矛盾的解决，而数学思想方法的运用可以使矛盾的解决更为顺畅、简洁.

“分析与综合”，重点介绍了“由因导果”“从果溯因”“因果夹击”3 种解答推理题的基本方法.

“结构与模型”，介绍了针对问题的背景结构特征. 通过观察、联想、恰当地构造出熟知的数学模型的路线图.

“函数与方程”一章把函数、数列、解析几何、立体几何融为一体，突出这一重要思想在解题中的作用，并重点分析构造函数或构造方程或使问题中的函数与方程的特征显化的技巧.

“变元与参数”，正如 G. 波利亚指出：“引入辅助元是引人注目的一步，人的高明之处就在于他碰到一个不能克服的障碍时，他会绕过去，当原来的问题看起来似乎不好解时，就会想出一个合适的辅助问题，构想一个辅助问题是一项重要的思维活动”，本章把重点放在辅助元的引入以及在解题中的作用，论述变元与参数的解题策略.

“数与形的结合”这一章突出“以形助数”“以数辅形”的辩证关系，重点放在“以数辅形三大法宝”“以形助数的两大抓手”上，力求使读者耳目一新.

“对称与对偶”介绍了利用图像的对称性，数学概念中某些命题的对称性，代数式的对偶特征解题的技巧，体现了数学中的美学思想.

“转化与变换”这一章把重点放在转化与变换是一种击破问题的策略上，推出了十大问题：正与反、分解与组合、多元与一元、静止与运动、新知识与旧知识、数与形、高维向低维、高次向低次、命题之间以及知识板块之间的转化与变换.

“化归与辩证”体现在解题中的互变、对立统一、一分为二等哲学思想的渗透.

“特殊与一般”的重点是一般问题的特殊化. 正如希尔伯特指出的在讨论数学问题时，“我们相信特殊化比一般化起着更为重要的作用”，G. 波利亚则把特殊化称为“获得发现的伟大源泉”.

“整体与局部”强调由“局部”到“整体”是一种重要的解题策略. 站在整体的立场上，从问题的整体考虑，综观全局研究问题，通过研究整体结构、整体形式来把握问题的本质，从中找到快捷解决问题的途径.

“分类与整合”这一章以知识板块作为每一讲的标题，同时又介绍了简化和避免分类

讨论的技巧.

“归纳与类比”帮助我们从固有的思维模式中解放出来，启发我们通过探求和归纳找到问题的共同属性，通过类比获得结论的更新或再生新结论，归纳与类比可以促进思维的流畅、扩大想象空间，体现创新精神.

“演绎与推理”是两大类解题的“诺亚方舟”，其重要性不言而喻.

总之，思想方法十三章七十二讲是解题的“孙子兵法”，本书把高中数学问题解决中的谋略做了一个总的“盘点”.

聚焦数学思想方法——它是探索创新的沃土，是提升学习能力的原动力. 数学家怀特海曾经这样告诫我们：“许多数学家知道他们所研究的东西的细节，但对表述数学学科的哲学特征却毫无所知.”数学家冯·诺伊曼说：“尽管数学家的家谱是悠久而又朦胧的，但是数学思想是起源于经验的，这些思想一旦产生，这个学科就以特有的方式存在下去. 和任何其他学科，尤其与经验学科相比，数学可以比作一种创造性的，又几乎完全受审美动机控制的学科.”对于数学思想方法在数学发展中的作用，数学教育家 M. 克莱因有这样一段生动的表述：“数学思想的波涛不断地拍击岩石的海岸，海岸阻止了它们顺利、安静地进入它们欲拥抱的大地，然而，数世纪的拍击甚至侵蚀大块大块的花岗岩，从而开辟了包围新领域的途径.”

数学解题中的美感只留给欣赏她的人. 杜甫诗云：“野色更无山隔断，山光直与水相通.”王国维用诗词来讲述如何做学问的三境界：“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望断天涯路”，此第一境界也；“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，此第二境界也；“众里寻她千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”，此第三境界也. 面对“冰冷的美丽”（数学教育家弗赖登塔尔语）的数学题，解题者要将“火热的思考”（同上）提高到“数学思想方法”的高度，要有意识地画龙点睛，适时点拨数学思想方法，逐渐地建立模型来领悟数学思想方法，这是成为解题高手的必经之路.

CONTENTS 目录

第一章 分析与综合的思想方法

第 一 讲 以分析法为主导解、证数学问题 …… 2
第 二 讲 以综合法为主导解、证数学问题 …… 5
第 三 讲 以分析、综合两法兼用解、证数学问题 …… 9

第二章 结构与模型的思想方法

第 四 讲 构造函数、方程、不等式模型,巧用结构思想解题 …… 15
第 五 讲 构造解析几何模型,巧用结构思想解题 …… 18
第 六 讲 构造数列、排列组合和概率模型,巧用结构思想解题 …… 23
第 七 讲 构造几何、向量模型,寻求简捷解法 …… 27

第三章 函数与方程的思想方法

第 八 讲 构造函数,运用函数性质解题 …… 34
第 九 讲 构造方程,运用方程理论解题 …… 37
第 十 讲 函数与方程、不等式之间的相互转化 …… 40
第十一讲 待定系数法、换元法、转换法是运用函数与方程思想方法解题过程中的三大法宝 …… 45
第十二讲 联用函数与方程思想方法 …… 50
第十三讲 运用函数与方程思想解三角问题 …… 56
第十四讲 运用函数与方程思想解数列问题 …… 60
第十五讲 运用函数与方程思想解解析几何问题 …… 64
第十六讲 运用函数与方程思想解立体几何问题 …… 69

第四章 变元与参数的思想方法

第十七讲 运用辅助元法巧解数学题 …… 76
第十八讲 三角换元——三角学的智慧之果 …… 80
第十九讲 变元四大策略:均值代换、和差代换、倒置代换、常值代换 …… 87

第二十讲　参变分离——一种“反客为主”的解题法 …… 90
第二十一讲　参数思想解题是个“好念头” …… 95

第五章 数与形结合的思想方法

第二十二讲　实现数形结合的关键是转化 …… 104
第二十三讲　数形转化和知识板块之间的转化相交融 …… 108
第二十四讲　以数辅形三大法宝(代数法、解析法、向量法) …… 111
第二十五讲　以形助数两大抓手(利用函数图像,揭示内在几何意义) …… 115
第二十六讲　以形助数还要抓住形的动态过程 …… 119
第二十七讲　数形兼顾、相互补充 …… 122
第二十八讲　“构造法”是数形结合的桥梁 …… 125
第二十九讲　数形结合研究函数的性质 …… 129
第三十讲　数形结合解不等式 …… 135
第三十一讲　数形结合解函数零点(方程根)的问题 …… 139
第三十二讲　数形结合解三角问题 …… 145
第三十三讲　数形结合解平面向量问题 …… 150
第三十四讲　数形结合解解析几何问题 …… 156

第六章 对称与对偶的思想方法

第三十五讲　运用“对称变换”的思想方法解题 …… 162
第三十六讲　构造“对偶式”,巧解数学问题 …… 168

第七章 转化与变换的思想方法

第三十七讲　正与反的转化与变换 …… 173
第三十八讲　一般与特殊的转化与变换 …… 176
第三十九讲　有限与无限之间的转化与变换 …… 180
第四十讲　多元与一元的转化与变换 …… 183
第四十一讲　常量与变量的转化与变换 …… 185
第四十二讲　相等与不等之间的转化与变换 …… 188
第四十三讲　数与形的转化与变换 …… 192
第四十四讲　高维向低维的转化与变换 …… 194
第四十五讲　高次向低次的转化与变换 …… 198
第四十六讲　新知识向旧知识的转化与变换 …… 200
第四十七讲　命题之间的转化与变换 …… 204

第八章 化归与辩证的思想方法

第四十八讲　纵向化归解题法 …… 210

第四十九讲　横向化归解题法 …… 216
第 五 十 讲　同向化归解题法 …… 218
第五十一讲　逆向化归解题法 …… 220
第五十二讲　互变思想在解题中的运用 …… 222

第九章　特殊与一般的思想方法

第五十三讲　特殊化法求解填空题、选择题 …… 227
第五十四讲　运用特殊与一般的辩证关系优化解题方法 …… 230

第十章　整体与局部的思想方法

第五十五讲　整体与局部 …… 237
第五十六讲　整体代换法 …… 239
第五十七讲　整体处理法 …… 241
第五十八讲　构造整体法 …… 245

第十一章　分类与整合的思想方法

第五十九讲　分类讨论是一种重要的解题策略 …… 251
第 六 十 讲　运用分类讨论法解含参数函数、方程、不等式问题 …… 255
第六十一讲　运用分类讨论法解三角函数问题 …… 260
第六十二讲　运用分类讨论法解复数、平面向量问题 …… 264
第六十三讲　运用分类讨论法解数列问题 …… 267
第六十四讲　运用分类讨论法解排列组合、二项式定理问题 …… 272
第六十五讲　运用分类讨论法解概率问题 …… 275
第六十六讲　运用分类讨论法解解析几何问题 …… 278
第六十七讲　运用分类讨论法解立体几何问题 …… 281
第六十八讲　简化和避免分类讨论的途径 …… 285

第十二章　归纳与类比的思想方法

第六十九讲　运用类比思想和方法求解推广性问题 …… 290
第 七 十 讲　用不完全归纳法猜想，以完全归纳法证明猜想 …… 295

第十三章　演绎与推理的思想方法

第七十一讲　合情推理与演绎推理 …… 303
第七十二讲　直接证明与间接证明 …… 307

第一章

分析与综合的思想方法

数学被尊崇为严谨科学的典范，在数学证明题中体现得更为充分，一个命题或一个有待证明的数学问题，通常都是由条件和结论两方面构成的，解题过程一般总是有正、逆两种不同的思维方向. 一是从条件出发推导出结论的思维过程(由因导果)，称之为综合；二是从结论出发逆向追溯到结论的条件(从果溯因)，称之为分析. 从论证的思维方向和表述形式，前者称为综合法，后者称为分析法. 这是证明高中代数推理题的两种基本方法，**而代数推理论证是近几年高考命题的热点和亮点，应当引起足够的重视.**

两种证法相比较各有特色，综合法的优点是叙述过程简短明了，缺点是由条件推结论的过程不明朗、不易找到解决问题的起点，也就是通常讲的“不知从何着手”. 分析法的优点是思考问题比较自然，容易找到解题思路，缺点是由于分析法的表达上应有特定的用语和推理的规范，叙述过程比较烦琐. 任何一个数学问题，只要将条件与结论沟通，建立联系，不论是正向还是逆向，也即不论是综合法还是分析法，一定可以获解. 一般地，若条件与结论之间距离较远，沟通条件与结论的过程漫长而曲折，面对这类难度较大的数学题，我们应把两者结合起来，也就是用分析法对问题进行分析，寻找解决的起点、走向，再用综合法叙述解题的过程；或者在探求解题思路时，交替使用分析与综合法，也就是说，当条件不易直接用上时，往往需要把条件向结论加以引申，使之更接近结论，同时必须将结论进行适当推演，变换或转化，促使其向条件靠拢，直到两者能相互沟通，建立联系，问题也就迎刃而解了，这就是采取因果夹击——两头向中间夹击的方法. 分析和综合这两种思维形式是对立统一、相辅相成的，若两种交替使用，可获得事半功倍的解题效果.

第一讲 以分析法为主导解、证数学问题

分析法，又称逆推法，是由未知(或结论)追溯到已知条件或真命题的证明方法，即从要证明的结论出发，依次追溯出一系列使结论成立的等价命题，当追溯出的等价命题是已知条件或真命题时，说明结论的真实性，从而证明了原命题的正确性.

分析法的优点是思考问题的解题思路比较自然，问题容易得到解决，缺点是叙述过程比较烦琐.

例1 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$，求证：$\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{b}{1+b+bc}+\dfrac{c}{1+c+ca}\leqslant 1$.

解题策略 本例是武汉大学自招试题，需证的不等式由多个分式组成且字母又多，若运用综合法，即从左边证到右边，则根本无法入手，因此需要结合分析法，化繁为简. 为减少运算量，可先移项通分后再展开对消，容易得到一个显然成立的结果，故本例采用分析法证明是上策.

证明 欲证明原不等式成立，只需证$\dfrac{b}{1+b+bc}+\dfrac{c}{1+c+ca}\leqslant\dfrac{1+ab}{1+a+ab}$，

即证$\dfrac{b+c+2bc+abc+bc^{2}}{(1+b+bc)(1+c+ca)}\leqslant\dfrac{1+ab}{1+a+ab}$，

即证$(b+c+2bc+abc+bc^{2})(1+a+ab)\leqslant(1+ab)(1+b+c+2bc+abc+bc^{2}+ca+abc^{2})$，

即证 $2abc\leqslant 1+a^{2}b^{2}c^{2}$，即证$(abc-1)^{2}\geqslant 0$，而此式显然成立，故原不等式得证.

例2 在$\triangle ABC$ 中，$\cos B=-\dfrac{5}{13}$，$\cos C=\dfrac{4}{5}$.

(1) 求 $\sin A$ 的值；

(2) 设$\triangle ABC$ 的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{33}{2}$，求 BC 的长.

解题策略 分析法并非局限于证明题，在计算题中同样适用. 第(1)问，欲求 $\sin A$ 的值. 由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ 且 $\cos B$，$\cos C$ 的值已知，再求出 $\sin B$，$\sin C$ 的值即可. 第(2)问，欲求 BC 的长. 由正弦定理得 $BC=\dfrac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin C}$，可推得 $BC^{2}=\dfrac{AC\cdot AB\cdot\sin^{2}A}{\sin B\sin C}$. 而 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 的值在第(1)问中已求得，只需求 $AC\cdot AB$ 或 $AC\cdot AB\cdot\sin A$ 的值，而由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{33}{2}$，则 $AC\cdot AB\cdot\sin A$ 的值可整体求得，这是一道运用分析法解题的典型题目.

解:(1)(先分析)欲求 $\sin A$ 的值,$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,故需求 $\sin B$,$\sin C$ 的值.

(再综合)$\because \cos B=-\frac{5}{13}$,$\cos C=\frac{4}{5}$,$\therefore \sin B=\frac{12}{13}$,$\sin C=\frac{3}{5}$.

$\therefore \sin A=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$.

(2)(先分析)欲求 BC 的长,由正弦定理 $BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}$可得

$BC^2=\frac{AC\cdot AB\cdot\sin^2 A}{\sin B\cdot\sin C}$.由(1)得 $\sin A=\frac{33}{65}$,$\sin B=\frac{12}{13}$,$\sin C=\frac{3}{5}$.

故只需求 $AC\cdot AB\cdot\sin A$ 的值.

(再综合)由已知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{33}{2}$,得 $AB\cdot AC\cdot\sin A=33$.

$\therefore BC^2=\frac{33\times\frac{33}{65}}{\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}}=\frac{11^2}{4}$,则 $BC=\frac{11}{2}$.

例 3 若 a,b,c 是不全相等的正数,求证:$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

解题策略 在证明不等式的过程中,分析法和综合法是不可分离的,前者是逆推或倒溯,后者是顺推,如果使用综合法证明不等式难以入手时,常用分析法探索证题途径,然后用综合法的形式写出它的证明过程.有些问题证明难度较大,常常是分析与综合交替使用,比如上例的解法就是如此,也有题目分析法、综合法两法并进,实现两头往中间靠以达到证题目的,称之为“中途岛法”.本例的证明先要利用对数运算变形,把真数从对数中剥离出来,将原不等式转化为$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$,再用基本不等式证明.下面介绍分析法与综合法两种证法.事实上,若没有对所证不等式的“剥离”变形,综合法很难想到.

证法一 (分析法)要证 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{a+c}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$,

即证 $\lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\right)>\lg(abc)$成立.

只需证$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}>abc$.

又$\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$,$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$,$\frac{a+c}{2}\geqslant\sqrt{ac}>0$,

$\therefore \frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\geqslant abc>0$. ①

又$\because a,b,c$ 是不全相等的正数,$\therefore$①式等号不成立.

$\therefore$原不等式成立.

证法二 (综合法)$\because a>0,b>0,c>0$,$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$,$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$,$\frac{a+c}{2}\geqslant\sqrt{ac}>0$.

又$\because a,b,c$ 为不全相等的正数,$\therefore \frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}>abc$.

$\therefore \lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\right)>\lg(abc)$.

即 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{a+c}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

例 4 将数列$\{a_n\}$中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

a_1

$a_2 \quad a_3$

$a_4 \quad a_5 \quad a_6$

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10}$

……

记表中的第一列数 $a_1,a_2,a_4,a_7,\cdots$构成数列为$\{b_n\}$,$b_1=a_1=1$,S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和,且满足$\frac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1(n\geqslant2)$.

(1) 证明数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$成等差数列,并求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2) 上表中,若从第三行起,每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列,且公比为同一个正数,当 $a_{81}=-\frac{4}{91}$时,求上表中第 $k(k\geqslant3)$行所有项的和.

解题策略 本例以三角形数表和恒等式综合呈现,首先要分析恒等式的结构特征,用换元法 $b_n=S_n-S_{n-1}$ 转化题设中的恒等式为含 S_n,S_{n-1} 的形式,再整理可得$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=d$(常数),这是第(1)问的证明思路.而第(2)问的解题关键是先分析三角形数表中 a_n 下标序码n 的规律,即探索 a_{81} 在三角形数表中的位置,可用尝试法探知三角形数表中第 k 行最后一个数的下标序码为$\frac{(1+k)k}{2}=1+2+\cdots+k$.当 $k=12,13$ 时,分别得 78,91.由 $78<81<91$ 知 a_{81} 是第 13 行第 3 个数.也可运用解不等式的方法进行分析探索,即$1+2+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}<81<\frac{(k+1)k}{2}=1+2+\cdots+k$,解得$\frac{-1+\sqrt{649}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{649}}{2}$.又 $k\in\mathbf{N}^*$,可得 $k=13$,可见分析法在本题的解答中起到重要作用.

解:(1) **证明** (先分析,再转化)由已知,当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1$,又 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,$b_n=S_n-S_{n-1}$.