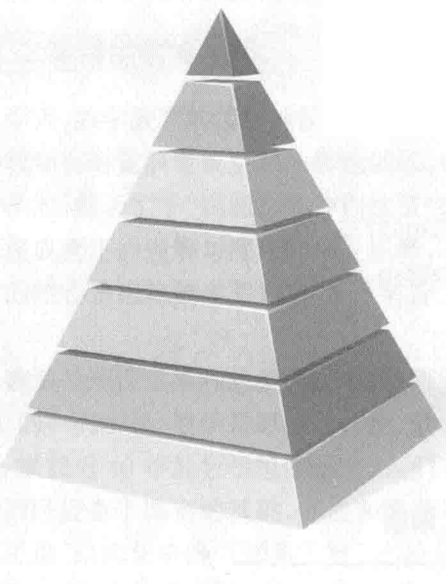
中学数学高阶思维训练实践研究

形式·原理·策略·方法



陆斌◎著

上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

前言

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学.数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用.

数学教育承载着落实立德树人根本任务、发展素质教育的功能.数学教育帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法;提升学生的数学素养,引导学生会用数学眼光观察世界,会用数学思维思考世界,会用数学语言表达世界.

一、本书的定位

《中学数学高阶思维训练实践研究》一书,是一群热爱中学数学思维教学的一线教师的教学思考,呈现在面前的是他们的部分教学实践方面的研究案例,也可以说是研究实证.回顾中学数学思维研究的历史,经历了20世纪80年代蜂拥而起、浅层探索的阶段,到了90年代,由扬州的张乃达先生编著的国内第一部关于中学数学思维的专著——《数学思维教育学》于1990年问世,以及1996年马忠林先生主编《数学思维论》的出版,为中学数学思维教学研究提供了理论支撑,掀起了数学思维教学研究的一股热潮,正是在前辈们影响的大背景下,这样一群数学教师(当时的年轻人)把精力和感情投入其中,才有了本书这么多的活生生的案例.尽管书中的案例,不是那么完美,但至少是他们经过多年思考的积累,并且愿意拿出来和大家分享与讨论,不妥之处恳求专家们斧正,以此推动中学数学思维教学的研究和实践工作,这需要莫大的勇气,我们应该向他们表示敬意.

二、本书的宗旨

今天,数学教育的传统地位正在陷入严重的危机之中,数学工作者要对此负一定的责任.数学教学有时竟演变成空洞的解题训练,中小学生(甚至有些数学教师)把数学学习理解为解题的学习,整天忙于"刷题",这种训练虽然在一定程度、一定范围可以提高形式推导的能力,但不能促成真正的理解与深入的独立思考,不能提高数学思维能力和思维水平,完全背离了数学教学的核心是培养数学思维能力的宗旨.因此,提倡和推动开展数学思维教学研究,已刻不容缓.

数学是理性思维和想象的结合,是研究数量关系和空间形式(结构、变化以及空间模型等概念)的一门学科.数学是思维的体操,数学在培养思维,特别是理性思维方面具有不可替代的作用.纵观近40年的数学思维研究,人们不难发现,在数学思维的基本方法、基本观点、基本策略方面已经有了厚实的基础,促进和推动了一般思维科学的研究.当一般的思维研究进入"系统化思维、结构化思维"(详见[美]杰拉尔德·温伯格著,王海鹏译,《系统化思维导论》,人民邮电出版社,2015;[美]Jamshid Gharajedaghiaft 著,王彪、姚瑶、刘宇峰译,《系统思维》,机械工业出版社,2014;王琳、朱文浩著,《结构性思维》,中信出版集团)的研究时代.反过来对数学思维的研究又提出了更高的要求,本书尝试从思维结构论角度去梳理中学数学高阶思维的教学研究,大胆地从高阶思维的基本形式、基本原理、基本策略、基本方法方面入手,通过案例进

行实证研究，是否妥当，供大家研究讨论.

关于中学数学高阶思维的基本"思想"，本书未能涉足，主要原因是我们有所顾虑. 因为，数学教育家们从没有把数学"思想"单列地提出来，常见的提法往往都是和数学方法搭在一起被称为"数学思想方法". 其实，思想一般也称"观念"，是活动的结果，属于认识. 思想是思考的产物，它是形成了一套系统的思考结果. 思想是对事物宏观的理性的认识，是对办什么事和怎样办好这件事的理解和认识. 思想是对客观事物发展的再认识，思想的形成源于对客观事物发展的积累、吸收、转化，通常我们把转化称为再认识，这个时候的再认识是对客观事物发展的再总结后的结果，这个结果就是我们的思想. 观念是对具体事物的观点，思想是对观念的高度总结，是从观念当中提炼出来的. 如今，数学思维的研究在基本观念、基本观点方面已经有了一定的基础和相对比较成熟的成果，对此加以总结和提炼形成"思想"也是顺理成章的事情，期待后续研究能有这方面的案例与大家分享讨论，这样本书的基本脉络也就比较清晰了.

三、本书的用法

本书虽是按系统的次序写就的，但并不要求读者逐页地去读. 各节内容之间基本上是独立的，即使是每一节的案例，也可以根据个人的需求进行有选择的阅读，以满足个人对数学问题解决中的数学思维方面的要求. 鉴于本书涉及的内容是中学数学高阶思维的问题，对数学基础比较薄弱的学生，必须有所选择地阅读，带星号的部分在初始阅读时可以略去，这对理解后面的内容不会有多大影响. 建议读者不妨只研究自己最感兴趣的那些章节，大部分的问题、习题都是精选的，比较困难的(章节、问题)均用星号标出，读者若对其中的许多问题不能解决也不为怪. 希望本书能为广大中学数学教师、大学生、研究生，以及那些对数学思维教学研究有真正兴趣的专业人员提供帮助，在各个章节中，高中教师能为课外活动小组，或一些选定的学生，找到有益的材料.

最后我们还希望专家们能对高阶思维的初步讨论发生兴趣. 高阶思维是发生在较高认知水平层次上的心智活动或认知能力. 高阶思维是高阶能力的核心，主要指创新能力、问题求解能力、决策力和批判性思维能力. 高阶思维能力集中体现了知识时代对人才素质提出的新要求，是适应知识时代发展的关键能力. 发展学习者高阶思维能力蕴含系列新型的教学设计，数学教学义不容辞，数学工作者们应当共同努力.

陆斌
2019 年国庆节于上海

目录

第一章 中学数学高阶思维的基本形式

形式是指某物的样子和构造，区别于该物构成的材料，即为事物的外形，也有指办事的方法.中学数学高阶思维的基本形式是指高阶思维的基本架构，它包括系统化和结构化两种.

1 第一节 系统化

系统化，是指采用一定的方式，对已经制定颁布的规范性文件或者流程进行归类、整理或加工，使其集中起来，作有系统的排列，以便于使用的一种活动. 系统化是对研究材料的合理重建，这是把材料按照一定的顺序纳入一定体系的思维方法. 系统化是与比较、分类、抽象、概括、具体化等思维方法密切联系的，只有通过上述方法弄清了各种材料的联系和关系，才能把它们构成一个统一的整体.

一、系统化的意义

系统化是原则性与灵活性有机结合的基本思维方式. 只有系统思维，才能抓住整体，抓住要害，才能不失原则地采取灵活有效的方法处置事务. 客观事物是多方面相互联系、发展变化的有机整体. 系统思维就是人们运用系统观点，把对象的互相联系的各个方面及其结构和功能进行系统认识的一种思维方法.

科学理论是系统化的成果，任何一门成熟的科学都要经过系统化的加工阶段，作为理论科学的数学，更是一门最具系统性的科学，数学理论的系统化表现为公理化方法. 作为思维科学的数学，系统化的意义非同一般.

二、系统化的定位

整体性原则是系统思维方式的核心. 这一原则要求人们无论干什么事都要立足整体，从整体与部分、整体与环境的相互作用过程来认识和把握整体. 领导者思考和处理问题的时候，必须从整体出发，把着眼点放在全局上，注重整体效益和整体结果. 只要合于整体、全局的利益，就可以充分利用灵活的方法来处置.

三、案例研究

系统化在教学设计中的运用
——不等式中的恒成立问题

恒成立问题是高中数学中经常出现的一类问题，这类问题往往难度较高，解法灵活，学生不易掌握，因此有必要对这类问题展开深入研究，下面仅对不等式中经常出现的恒成立问题的几种形式，择其要者，总结如下：

形式1 若一元二次不等式 $ax^2-4x+1\geqslant 0$ 对任意实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围.

分析与解 由题意得 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=16-4a\leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow a\geqslant 4.$

系统化变式：

(1) 若一元二次不等式 $ax^2-4x+1\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

分析与解 解法同上.

(2) 若一元二次不等式 $ax^2-4x+1<0$ 的解集为 $\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

分析与解 解法同上.

(3) 若不等式 $ax^2-4x+1<0$ 的解集为 $\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

分析与解 因为不等式可能是一元一次不等式,也可能是一元二次不等式,所以要分类讨论.

当 $a=0$ 时,不等式 $ax^2-4x+1<0$ 的解集不为 $\varnothing$;

当 $a\neq 0$ 时,由题意得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=16-4a\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 4.$

综上所述,得 $a\geqslant 4$.

(4) 若不等式 $ax^2-4x+1<0$ 的解集不为 $\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

分析与解 需要分类讨论.

显然,当 $a\leqslant 0$ 时命题成立;当 $a>0$ 时,由 $\Delta>0$ 得 $a<4$,此时 $0<a<4$;

综上得 $a<4$.

说明 (1)~(4)题是对一个恒成立的不等式问题进行了系统化的问题变式,以便于学习者进行比较区分.

(5) 若关于 x 的不等式 $\dfrac{2x^2-5x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ 的解集为 $\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

分析与解 问题可转化为不等式 $mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$ 的解集为 $\varnothing$,同题(3)可解得 $m\geqslant\dfrac{1}{4}$.

(6) 已知函数 $y=\sqrt{kx^2-6kx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 k 的取值范围.

分析与解 由题意可得不等式 $kx^2-6kx+3\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,同(5)可解得 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

(7) 若不等式组 $\begin{cases}ax^2-x-2\leqslant 0,\\ x^2-x\geqslant a(1-x)\end{cases}$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

分析与解 问题可转化为不等式组中两个不等式解集均为 $\mathbf{R}$,同(5)可解得 $a=-1$.

说明 (5)~(7) 题也是对一个恒成立的不等式问题进行了系统化的问题变式,以便于学习者进行深度学习.

形式 2 已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2<0$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

说明 与形式 1 不同的是本题是不等式在指定区间上的恒成立问题.

分析与解 (法一) 令 $f(x)=x^2-ax+2$,则问题转化为 $\begin{cases}f(1)\leqslant 0,\\ f(2)\leqslant 0.\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 3.$

(法二) $\because x\in(1,2)$,由 $x^2-ax+2<0$ 整理得 $a>x+\dfrac{2}{x}$,则问题转化为 $a>x+\dfrac{2}{x}$ 对任

意 $x\in(1,2)$ 恒成立，因 $x+\frac{2}{x}<3$，$\therefore a\geqslant 3$.

系统化变式：

(1) 已知集合 $(1,2)$ 中的所有元素都是关于 x 的不等式 $x^2-ax+2<0$ 的解，求实数 a 的取值范围.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 同原题.

(2) 已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2>0$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 同原题解法，解得 $a\leqslant 2\sqrt{2}$.

(3) 已知关于 x 的不等式 $x^2-6x\geqslant n$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立，求实数 n 的取值范围.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 问题可转化为函数 $f(x)=x^2-6x$，$x\in(0,1]$ 的最小值 $t\geqslant n$，解得 $n\leqslant -5$.

(4) 已知关于 x 的不等式 $\left|2x+\frac{1}{x}\right|>2a$ 对 $x\neq 0$ 一切实数恒成立，求实数 a 的取值范围.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 由基本不等式得 $\left|2x+\frac{1}{x}\right|=2|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$，只要 $2\sqrt{2}>2a$，解得 $a<\sqrt{2}$.

(5) 当 $x>1$ 时，不等式 $x+\frac{1}{x-1}\geqslant a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,3]$

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 同(4)不等式法解得 $a\leqslant 3$，故选 D.

(6) 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$：$x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，求实数 a 的取值范围.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 转化为 $(x-a)[1-(x+a)]<1$，即 $x^2-x-(a^2-a-1)>0$，问题转化为不等式 $x^2-x-(a^2-a-1)>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，同上解得 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

(7)（2006 年陕西高考题）已知不等式 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x、y 恒成立，则正实数 a 的最小值为________.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 同(4)不等式法解得 4.

(8)（2007 年山东高考题）函数 $y=\log_a(x+3)-1(a>0,a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A，若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上，其中 $mn>0$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为________.

$\boxed{分}\boxed{析}\boxed{与}\boxed{解}$ 由题意得 $A(-2,-1)$，由点 $A(-2,-1)$ 在直线 $mx+ny+1=0$ 上得 $2m+n=1$. 又因为 $mn>0$，所以 $m>0$，$n>0$. 有 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=(2m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)=4+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}}=8$，当且仅当 $\begin{cases}\frac{n}{m}=\frac{4m}{n},\\ 2m+n=1,\\ m>0,\\ n>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{4},\\ n=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时等号成立，由此可得 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值

为 8.

(9) 使不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a}>\cos^2x-3\cos x+5$ 对任意实数 x 恒成立的 a 的取值范围是________.

分析与解 因为 $\cos^2x-3\cos x+5$ 最大值为 9，所以问题转化为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a}>9$，解得 $a<-2$.

(10) 已知不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax$ 对任意 $x\in(0,4]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

分析与解 分离变量得 $a<\sqrt{\frac{4}{x}-1}$，$x\in(0,4]$ 恒成立，由函数 $f(x)=\sqrt{\frac{4}{x}-1}$，$x\in(0,4]$ 的单调性可得最小值为 0，由此得 $a<0$.

形式 3 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leqslant 2$ 的所有实数 m 都成立，求实数 x 的取值范围.

分析与解 问题转化为函数 $f(m)=m(x^2-1)-(2x-1)$ 对任意 $|m|\leqslant 2$，函数值均小于 0，则只要 $\begin{cases}f(-2)<0,\\ f(2)<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

相关题 若关于 x 的不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求实数 c 的取值范围.

分析与解 同上可解得 $c>\frac{1}{2}$.

形式 4 已知 $a>b>c$，问是否存在实数 k，使得不等式 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{k}{a-c}$ 恒成立？如果存在，求出所有 k 的值；如果不存在，说明理由.

分析与解 $\because a>b>c$，$\therefore a-b>0,b-c>0,a-c>0$.

则原不等式恒成立 $\Leftrightarrow k\leqslant\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}$ 恒成立.

$\because\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant 4$，

$\therefore$ 只要 $k\leqslant 4$ 即可. 即存在 $k\leqslant 4$，使得不等式 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{k}{a-c}$ 恒成立.

形式 5 已知 x、$y\in\mathbf{R}^+$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\sqrt{x+y}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

分析与解 由 x、$y\in\mathbf{R}^+$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\sqrt{x+y}$，

得 $k=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\Leftrightarrow k^2=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\leqslant 2$.

又 $\because k>0$，$\therefore k\in(0,\sqrt{2}]$.

相关题 不等式 $ax^2+2y^2\geqslant xy$ 对一切 x、$y\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的最小值.（或求实数 a 的取值范围）

分析与解 将原不等式整理得 $a\geqslant\frac{xy-2y^2}{x^2}$，则命题转化为不等式 $a\geqslant\frac{xy-2y^2}{x^2}$ 对一切 x、$y\in\mathbf{R}$ 恒成立. $\because\frac{xy-2y^2}{x^2}=-2\left(\frac{y}{x}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}$，$\frac{xy-2y^2}{x^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$，$\therefore a\geqslant\frac{1}{8}$，

∴实数 a 的最小值为 $\frac{1}{8}$.

综上所述,通过不等式中恒成立问题的 5 种形式及其变式的系统化研究,不难知道,关于不等式的恒成立问题(单变量或双变量),其总的解题思路是:将问题转化为最值问题(函数法求最值或不等式法求最值).总的解题策略是:等价转换思想.

系统化是中学数学高阶思维最重要的一种思维形式,对于数学教学设计产生重大影响.系统化思维的意义在于:一方面,要求教师通过系统化的问题设计,帮助和引导学生从整体上建构知识,对专题知识、单元知识有一个整体的认识;另一方面,通过结构化的问题呈现方式来为数学有效教学服务.

(上海市晋元高级中学　陆斌)

1 第二节 结构化

结构化是指一个人在面对工作任务或者难题时能从多个侧面进行思考，深刻分析导致问题出现的原因，系统制定行动方案，并采取恰当的手段使工作得以高效率开展，取得高绩效. 当你这样做事的时候，你就拥有了结构化思维，这将对你的学习、工作以及职场晋升起到巨大的帮助作用. 思维决定发展，思维层面不同导致结果不同，遵循“发现问题→分析问题→解决问题”这个流程.

中学数学中的结构化，主要指对研究材料的系统管理，包括对数学问题的系统分析，制定解决问题的行动方案，采取恰当的手段等，使学习工作高效地开展，取得高效益，实施有效学习的一种思维形式，是一种高阶思维.

一、结构化的意义

结构化，首先是一种思维方式，其次才是一种管理方法. 因此，对于中学生朋友来说，需要经过有意识的持续训练，才能够培养起这样的思维方式和思维习惯. “好脑子”不如“烂笔头”，纸和笔是训练结构化思维的最有利的工具.

二、结构化的定位

结构化作为一种重要的思维方式，有 3 种定位，在事物的发展过程中，原因、决策、计划涵盖时间维度的过去、现在与将来，针对其 3 种时间的状态，可以概括为视角多元性、影响跨期性、层级互适性. 视角多元性要求拓宽与提升“当下”问题分析的角度与维度；影响跨期性涉及问题过程的“时序”关联；层级互适性阐明现实解决问题的人，因其角色不同所反映不同的思维要求.

三、案例研究

结构化在教学设计中的运用
——对数方程复习课

对数方程是高中数学的一个重要内容，本文通过一个问题设计的实例来说明方程教学中如何运用结构化的思维方式进行思考、进行问题设计，如何通过变式形成问题化的呈现，限于篇幅，解答过程一律略去.

(一) 设计一

[问题解决]

要求 用尽可能多的方法解决下列问题，并相互间进行交流、讨论.

问题 解方程 $\lg(x+4)+2\lg 3=2\lg x$.

分析 ① 验根法；② 等价转化法.

解方程得方程的根为 $x=12$.

（二）设计二

[问题变式]

要求 先将变式题同原问题进行比较，然后提出尽可能多的解决变式题的方案，并相互进行交流、讨论.

变式 1 解方程 $\log_a(x+4)+2\log_a 3=2\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$.

分析1 底数发生变化了，原来的 10 变成了现在的字母 a 了，解方程得 $x=12$.

变式 2 解方程 $\log_x(x+4)+2\log_x 3=2\log_x x$.

分析2 底数发生变化了，原来的 10 变成了现在的字母 x 了，解方程得 $x=12$.

变式 3 解方程 $\log_{(x-11)}(x+4)+2\log_{(x-11)}3=2\log_{(x-11)}x$.

分析3 底数发生变化了，原来的 10 变成了现在的 $x-11$ 了，解方程得方程无解.

变式 4 解方程 $\lg(12^x+4)+2\lg3=2\lg12^x$.

分析4 真数发生变化了，原来的 x 变成了现在的 12^x 了，解方程得 $x=1$.

变式 5 解方程 $\log_x(12^x+4)+2\log_x 3=2\log_x 12^x$.

分析5 底数和真数都发生变化了，原来的底数 10 变成了现在的 x，原来的真数上的 x 变成了现在的 12^x 了，此时，方程无解.

变式 6 解方程 $\lg(x-a)+2\lg3=2\lg x$.

分析6 常数 4 变成了字母 $-a$ 了，应该怎样解？

说明 拟介绍等价转化法和分离变量法及数形结合 3 种方法，逐步形成求解含字母参数的方程的总的思路和方法.

答案 ①当 $a=\dfrac{9}{4}$ 时，原方程的根是 $x=\dfrac{9}{2}$；

②当 $0<a<\dfrac{9}{4}$ 时，原方程的根是 $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-36a}}{2}$；

③当 $a\leqslant0$ 时，原方程的根是 $x_{1,2}=\dfrac{9+\sqrt{81-36a}}{2}$；

④当 $a>\dfrac{9}{4}$ 时，原方程无解.

（三）设计三

[问题探究]

要求 根据下面的变式例子，要求写出尽可能多的与原问题相关的不等式问题来，不必求解.

变式 7 解不等式 $\lg(x+4)+2\lg3>2\lg x$.

分析7 问题的结构发生变化了，由方程变成了不等式，应该怎样解？

变式 8 解不等式 $\lg(x-a)+2\lg3>2\lg x$.

分析8 问题的结构发生变化了，由方程变成了不等式，并且常数 4 变成$-a$ 了，应该怎样解？

综上所述，同系统化一样，结构化也是中学数学高阶思维的一种基本形式，对于数学教学设计的意义在于：结构化思维是一项重要的管理技能，掌握了这一管理技能，将使学习者在学习过程中获得以下优势：能够快速完成设计方案，而且条理清晰，重点突出；能够制作出周密的学习计划，从而牢牢地控制住学习主动权；能够有条不紊地处理各种复杂的学习问题，先人一步走向成功；能够有效地安排好学习与工作，快速掌握新问题的所需知识，获得更多的发展机会.

（上海市晋元高级中学　陆斌）

“系统化与结构化”在教学设计中的综合运用
——函数的单调性

数学教育的根本任务：一是掌握知识；二是训练思维；三是培养观念.

数学教学活动实质上是一种数学思维活动，在其不同的方面，数学活动表现出不同的思维特点，体现出不同的思维的品质，如流畅性、原创性（独到性）、深刻性、敏捷性、精准性等.

下面通过系统化的问题设计的实例，引导学生充分展开高层次的思维活动，优化数学思维品质.

求证：函数 $f(x)=x^3+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上为增函数.

在教学过程中，我这样来引导学生对问题进行“系统化、结构化”的思考：

（一）有条理地思考

问题解决做到“四问”. 即是什么（数学问题）？什么是（证明问题的方法）？为什么是（这样的证明）？（问题或证明方法）还可以是？

分析与解 这是一个函数单调性的证明问题；证明问题的方法是定义法；根据函数单调的概念要求使然；问题的证明还可以用导数的方法，这里从略.

（二）有根据地思考

这个证明的根据是什么？

分析与解 单调增函数的定义.

（三）批判性地思考

如果问题改为：判断函数 $f(x)=x^3+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的单调性. 是否一定要用上面的方法解决？

分析与解 不一定，除定义法以外，我们还可以用单调增函数的运算性质等进行判断.

（四）反省性地思考

(1) 求证：函数 $f(x)=x^2+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上不是单调增函数；

(2) 求证：函数 $f(x)=x^2+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.

分析与解 用举反例法证明.

（五）彻底地思考

利用函数单调性的知识求解下列问题：

(1) 解不等式：$x^3+x>2$；

(2) 解不等式：$\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^3+\frac{3x}{x^2+1}>2$；

(3) 解不等式：$x^3+x(x^2+1)^2>2(x^2+1)^3$；

(4) 解不等式：$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\frac{x}{x^2+1}>x^3+x$；

(5) 解不等式：$x^3+x(x^2+1)^2>[x(x^2+1)]^3+x(x^2+1)^3$；

(6) 已知 $x^3+x+(y-1)^3+y=1$，求 $x+y$ 的值.

分析与解 令 $f(x)=x^3+x$，则

(1)中的不等式即为 $f(x)>f(1)$，由 $f(x)=x^3+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增可知 $x>1$，故不等式解集为$(1,+\infty)$.

评注 本小题也可通过移项分解因式求解.

(2)中的不等式可化为 $f\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)>f(1)$，同上得 $\frac{3x}{x^2+1}>1$，整理得 $x^2-3x+1<0$，解之得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，故不等式解集为$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

同理可求解(3)(4)(5).

(6) 由 $x^3+x+(y-1)^3+y=1$ 整理得 $x^3+x=(1-y)^3+(1-y)$，所以有 $f(x)=f(1-y)$，由 $f(x)=x^3+x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增可得 $x=1-y$，由此得 $x+y=1$.

……

问题的研究还可根据教学的需要继续进行下去，这里不再赘述，留给读者思考.

总而言之，系统化与结构化，在数学思维教学中既独立存在，又相互关联，数学教学需要用系统化的思维进行整体思考，更需要将思考结果用结构化的思维方式去呈现，只有将系统化与结构化思维统一地合理使用，才能达到良好的教学设计效果.

（上海市晋元高级中学　陆斌）

第二章 中学数学高阶思维的基本原理

原理通常指某一领域、部门或科学中具有普遍意义的基本规律，是在大量观察、实践的基础上，经过归纳、概括而得出的. 原理既能指导实践，又必须经受实践的检验. 科学的原理以大量的实践为基础，故其正确性能被实验所检验与确定，从科学的原理出发，可以推衍出各种具体的定理、命题等，从而对进一步实践起指导作用. 中学数学思维中的原理是中学数学问题解决中具有普遍意义的基本规律，是在问题解决中通过大量观察、归纳、概括而得出的，如极端、对称等. 本章就中学数学高阶思维中的4个基本原理做一些案例研究.

2 第一节 极端原理*

极端原理是指:为确定集合 M 具有某一性质 A,常常从极端情形(如数量上的极大或极小,图形的极限位置等)出发,选取 M 中具有极端性质的元素 a 来考虑;或者 a 本身就具有性质 A,或者 a 本身虽没有性质 A,但 a 与具有性质 A 的 M 中的元素 b 有密切的关系,从而可确定集合 M 具有性质 A. 在数学问题解决过程中,极端原理是常用的一种基本思维原理. 将数学问题化难为易,化抽象为具体,化繁杂为简单,化陌生为熟悉,通常都离不开极端原理. 这是因为,用一个问题中涉及的对象的极端情形,去代替这一对象,而保留问题其余内容所得的新问题,即问题的极端情形,它往往比较容易、具体、简单、熟悉. 又由于极端情形的解与一般情形的解往往有共性,解极端情形往往会给解一般情形带来启示. 如解题中的举反例法、特殊化等都是极端原理的一个具体应用.

一、极端原理的运用

一个问题的共性和个性是相辅相成的,反映到数学上便是极端情况和整体问题是紧密联系的,这些联系要靠我们去研究,多看一些极端情况,找出一些共性问题,最终解决问题.

极端原理就是一种从特殊对象看问题的方法,它以对象数量上的极端情况,比如最大值、最小值、最长、最短等为出发点,寻找解题的突破口和答案. 极端原理作为一种解题的思想原理在几何、数论、组合、图论等方面都有着广泛的应用,利用这个简单而又通俗的原理可以解决许多与存在性有关的数学问题和其他问题.

二、极端原理的事实

极端原理解题时,经常被用到一些事实.

(1) 事实 1:有限个实数中一定有最大数和最小数.

(2) 事实 2:无限个正整数中有最小数.

(3) 事实 3:无限个实数不一定有最大数和最小数.

三、案例研究

极端原理在数学问题解决中的运用

例 1 在一次乒乓球循环赛中,$n(n\geqslant 3)$ 名选手中没有全胜的. 求证:一定可以从中找出 3 名选手 A、B、C,有 A 胜 B、B 胜 C、C 胜 A.

分析与证明 取 n 个选手中所赢局数最多的一位选手作为 A(取极端),由于 A 未全胜,所以存在选手 C 胜 A. 考虑 A 击败的选手全体,知其中必有选手 B 胜 C(否则,A 的败将也都是 C 的败将,从而 C 赢的局数超过 A). 于是所述的 A、B、C 即为所求.

例 2 一次 10 名选手参加的循环赛中无平局,胜者得 1 分,负者得 0 分. 求证:各选手得

分的平方和不超过 285.

分析与证明 由于得分的情况仅有有限多种，其中必有一种的平方和取得最大值. 这时各选手的得分 $p_1, p_2, \cdots, p_{10}$ 必互不相同，这是因为，若 $p_i = p_j$，则改变选手 i、j 之间的胜负，即用 $p_i - 1, p_j + 1$ 来代替 p_i、p_j 时，由于 $(p_i-1)^2+(p_j-1)^2-(p_i^2+p_j^2)=2>0$，而平方和中其他项不变，故平方和严格增大. 这与平方和已取得最大值矛盾.

于是，在 $p_i = i-1(i=1,2,\cdots,10)$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2$ 最大，这时的值 $\sum\limits_{i=1}^{9} i^2 = 285$.

所以，各选手得分的平方和不超过 285.

评注 此题是一个用极端原理解决的数的问题，这里用到了一个基本事实，有限个整数中必有一个是最大的，从而其平方和取得最大值.

例 3 求最大的整数 p，使对于由 1～100 的全部正整数的任一个排列，其中都有 10 个位置相邻的数，其和不小于 p.

分析与解 设 $T=(a_1, a_2, \cdots, a_{100})$ 是从 1～100 的全部正整数的一个排列. 考虑集合 $S = \{S_n \mid S_n = \sum\limits_{k=1}^{10} a_{n+k}, n=0,1,2,\cdots,90\}$，则 S 中必有一个最大数，记为 $S_r = \max\limits_{0\leqslant n\leqslant 90} \sum\limits_{k=1}^{10} a_{n+k}$.

则有 $10S_r \geqslant \sum\limits_{k=1}^{100} a_k = 5050$，所以 $S_r \geqslant 505$.

由题意，我们要寻找所有排列 T 中最小的 S_r，即 $p=\min S_r$.

事实上，我们可以找到一个排列 T'，使得对于排列 T'，$S_r \leqslant 505$.

为此，可取 $T'=(100,1,99,2,98,3,\cdots,51,50)$，此时有

$$
\begin{aligned}
& a_{2k}+a_{2k+1}+\cdots+a_{2k+9} \\
=& (a_{2k}+a_{2k+2}+\cdots+a_{2k+8})+(a_{2k+1}+a_{2k+3}+\cdots+a_{2k+9}) \\
=& [k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4)]+[(100-k)+(100-k-1)+(100-k-2) \\
& +(100-k-3)+(100-k-4)] \\
=& 500,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{2k+10} \\
=& (a_{2k}+a_{2k+1}+\cdots+a_{2k+9})+(a_{2k+10}-a_{2k}) \\
=& 500+(k+5)-k \\
=& 505.
\end{aligned}
$$

于是，$S_r \leqslant 505$.

由上可知，$p=505$.

评注 在考虑有关量的问题极端情况时，首先要“胆大心细”，往往有这样的想法，即极端位置能代替一般情况吗？这里可以告诉你，往往题目要证的就是你不敢想的极端情况.

例 4 在圆周上任取 21 个点. 证明：以这些点为端点的所有弧中，不超过 120°的弧不少于 100 条.

分析 本题的出发点在于：圆上任意 3 点分圆而得的 3 段弧中至少一段不超过 120°. 为了便于识别，我们将不超过 120°的弧的端点连接成弦. 只要证明这样的弦不少于 100 条即可.

证明 在所有的点中，不妨设以 A_1 为端点的弦数最少，且记以 A_1 为端点的弦为 A_1A_2，A_1A_3，$\cdots$，A_1A_n，共 $n-1$ 条，而以 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为端点的弦都不少于 $n-1$ 条. 故这 n 个点