普通高等教育“十三五”规划教材
军队院校士官数学系列通用教材

高等数学

■ 主　编　廖毕文　青山良
■ 副主编　曲　晨　张　敏　柴春红

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十三五”规划教材
军队院校士官数学系列通用教材

高等数学

主　编　廖毕文　青山良
副主编　曲　晨　张　敏　柴春红
编　者　(按姓氏笔画排序)
刘　俊　刘　晓　刘立红
李本雄　杨　丹　肖　峰
宋　娜　张　宇　张晓洁
陈　贤　孟明强　柳　扬
袁　田

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

内 容 提 要

本书是为了适应士官职业技术教育的发展，依据军队院校士官大专的教学基本要求，充分考虑士官学员的基础现状和认知特点，由陆军工程大学军械士官学校、通信士官学校、石家庄校区、徐州基地和空军工程大学航空机务士官学校的资深数学教师合作编写而成的，具有逻辑结构清晰、叙述通俗易懂、呈现直观形象并融入建模思想、渗透人文精神、立足能力培养、突出军事应用等特点. 本书内容包括预备知识、函数、极限、微分学及其应用、积分学及其应用、常微分方程、无穷级数以及概率初步等 8 章内容，并附数学实验和习题.

本书是面向军队院校士官大专的数学教材，也可供高职高专院校工程技术、光机电等专业学生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/廖毕文，青山良主编. —武汉：华中科技大学出版社，2019.7

ISBN 978-7-5680-5298-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①廖… ②青… Ⅲ. ①高等数学-军事院校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 128936 号

高等数学 廖毕文 青山良 主编

Gaodeng Shuxue

策划编辑：王汉江 周芬娜

责任编辑：刘艳花

封面设计：原色设计

责任校对：张会军

责任监印：徐 露

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430223

录 排：武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷：武汉华工鑫宏印务有限公司

开 本：787mm×1092mm 1/16

印 张：16.5

字 数：430 千字

版 次：2019 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

定 价：49.80 元

前　言

随着军队新的体制编制调整落实，士官在我军的地位和作用更加突出，未来军队对士官素质提出了更高要求，士官教育得到了空前的重视和发展. 定位于职业技术教育的士官教育，其培养目标体现在对学员技能和综合素质的培养上. 相应地，士官数学的教学目标也发生了根本性的改变. 除了作为专业知识学习的必要基础和运算工具，更侧重于对学员的思维训练、智慧启迪、能力培养和素质提高. 由于士官学员文化基础差异较大，编者在坚持国家对同等学历层次的数学教学内容标准的基础上，立足新的教学目标，根据多年的士官教学经验，充分考虑士官学员的文化基础和学习特点，编写了本教材.

本教材主要特点有以下三点.

一是在内容选取上，依据教育部对高职高专学生的知识要求“必需，够用”的原则，充分考虑士官学员的知识基础和认知能力，减少理论论证，弱化计算技巧，强化概念理解，突出实际应用，适当引入数学实验，渗透建模思想.

二是在内容的呈现上，强调适合士官学员的认知特点，文字叙述通俗易懂，大量采用数据、图象等直观手段解释相关理论，减少学员学习障碍，突出“军味”，尽可能通过军事应用强化学员的学习兴趣和职业认同. 在习题编排上，由易到难，层次分明，以适应士官学员的基础差异和可能的分层教学需求.

三是采用模块式结构，不同专业可依据人才培养方案和课程教学计划，考虑学时安排，灵活选用教学内容.

本书由廖毕文、青山良任主编，曲晨、张敏、柴春红任副主编，全军数学联席会总召集人、空军工程大学教授李炳杰任主审. 刘俊、刘晓、刘立红、李本雄、杨丹、肖峰、宋娜、张宇、张晓洁、陈贤、孟明强、柳扬、袁田等参与编写.

在本教材编写过程中，参考了部分国内外教材，得到了学校领导和相关部门的大力支持，也获得了同行的指导，在此一并表示感谢.

由于作者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2019 年 6 月

目　　录

第1章 预备知识

数学是研究数量、结构、变化、空间及信息等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种. 数学在人类历史发展和社会生活中发挥着不可替代的作用，更是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具. 因此认真学好数学很有必要. 但实际学习过程中，常常有很多人"谈数学色变"，究其原因是没有掌握到学习数学的技巧、方法及精髓. 其实，数学是简单的，数学的简单在于它只需要在弄清楚概念的基础上，运用几个简单的定理，就可以堆砌出整个数学的高楼大厦. 学好数学的技巧在于理清概念、贯通定理、夯实基础.

为了更好地学习后续内容，为学习高等数学打下一个坚实的基础，有必要对初、高中的基本数学知识进行简要的复习和引申.

1.1 代 数 式

代数式就是用一个式子代替数字，它是研究数学的最基本的形式. 用代数式表示数学规律比用普通文词表达得更简洁、更明确、更具一般性.

1.1.1 代数式的概念

1. 代数式的定义

用基本的运算符号把数或表示数的字母联系起来的式子称为**代数式**. 如 $ax+2b$，$b+c$，$40t$，vt，-5，x，y 等都是代数式. 因为代数式表示数，所以数的一切运算规律也适用于代数式.

(1) 加法交换律：$a+b=b+a$；

(2) 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3) 乘法交换律：$ab=ba$；

(4) 乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

(5) 乘法分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

例 1 下列式子中，是代数式的有________________.

① $a+b=c+d$； ② 0； ③ $2(a+b)-1$； ④ $S=\pi R^2$； ⑤ $3x+2$； ⑥ $3x^2+4x+1=0$.

解 ②③⑤.

2. 代数式的分类

代数式分为有理式和无理式，而有理式又分为整式与分式，其中整式又包括单项式和多项式，其各个定义如下.

单项式就是数与字母的积，如 $8x$，a^2b^3，$-xy^2$ 等都是单项式，其中单项式中的数字因数称为单项式的系数. 如 $8x$，a^2b^3，$-x^2y$ 的系数分别为 8，1，-1.

如果两个单项式的字母及其次数都对应相同，那么这两个单项式称为同类项，如 $\frac{3}{2}x^2y^3$ 与 $-5x^2y^3$ 就是同类项.

多项式就是几个单项式的和.在多项式中,每个单项式称为多项式的项.一个多项式含有几项,就称为几项式.而次数最高的项的次数,就是这个多项式的次数.例如,$6x-7$ 是一次二项式,$6y^2-2y+8$ 是二次三项式,其中不含字母的项称为常数项,-7 和 8 是常数项.

单项式和多项式统称为**整式**.

分母含有字母的代数式称为**分式**.例如,$\frac{5}{xy}$,$\frac{2}{y}$,$\frac{7a+8}{a^2-6}$等都称为分式.

整式和分式统称为**有理式**.

形如$\sqrt{x-1}$,$\frac{\sqrt{x}}{2}$等的式子称为**无理式**.

无理式和有理式统称为**代数式**.

以上概念用图解形式可以表示如图 1.1.1 所示.

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

图 1.1.1

3. 代数式的值

将数值代入代数式中的各个字母,计算后得出的结果,称为**代数式的值**.

例 2　当 $a=5,b=-1,c=-3$ 时,求下列代数式的值:

(1) a^2-b^2;　　(2) $b^2-2bc+c^2$;　　(3) $\frac{b-3ac}{a}$.

解　将 $a=5,b=-1,c=-3$ 分别代入(1)(2)(3)式中,有

(1) $a^2-b^2=5^2-(-1)^2=24$;

(2) $b^2-2bc+c^2=(-1)^2-2\cdot(-1)\cdot(-3)+(-3)^2=1-6+9=4$;

(3) $\frac{b-3ac}{a}=\frac{-1-3\cdot5\cdot(-3)}{5}=8.8$.

1.1.2　代数式的运算

1. 整式的加减运算

整式的加减运算,实际上就是合并同类项,即把同类项的系数相加,字母和字母的指数不变.例如,$5ab^2+2.5ab^2-7ab^2=(5+2.5-7)ab^2=0.5ab^2$.

注意　在运算时,如果遇到括号,先去括号,再合并同类项.

例 3　化简$(7y^2-5y+3)-(2y+1)+(3y^2+9y-1)$.

解　原式$=7y^2-5y+3-2y-1+3y^2+9y-1=10y^2+2y+1$.

注意　若括号前面是负号,去括号时,括号里各项都变号.

2. 整式的乘除运算

1) 同底数幂的运算

同底数幂的运算公式有

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n};$$

$$(ab)^n=a^nb^n;\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

例如，$7^7\times7^4=7^{7+4}=7^{11}$；　$x^5\cdot x^3\cdot x^1=x^{5+3+1}=x^9$；

$$(10^5)^3=10^{5\times3}=10^{15};\quad (y^2)^5\cdot(y^3)^4=y^{2\times5}\cdot y^{3\times4}=y^{10+12}=y^{22};$$

$$(xy^2)^2=x^2(y^2)^2=x^2y^4;\quad a^9\div a^4=a^{9-4}=a^5.$$

2）单项式的乘法

单项式与单项式相乘，将它们的系数、相同字母的幂分别相乘. 对于只在一个单项式中出现的字母，则连同它的指数一起作为积的一个因式.

例如，$(-5a^2b^3)\cdot(-4b^2c)=[(-5)\cdot(-4)]\cdot a^2\cdot(b^3\cdot b^2)\cdot c$

$$=20a^2b^5c.$$

3）单项式的除法

单项式与单项式相除，将它们的系数及同底数幂分别相除.

例如，$28x^4y^2\div7x^3y=(28\div7)\cdot(x^4\div x^3)\cdot(y^2\div y)=4xy.$

4）单项式与多项式相乘

单项式与多项式相乘，先将单项式分别乘以多项式的各项，再将所得的积相加.

例如，$(-2a^2)\cdot(3ab^2-5ab^3)=(-2a^2)\cdot3ab^2+(-2a^2)\cdot(-5ab^3)$

$$=-6a^3b^2+10a^3b^3.$$

5）多项式的乘法

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例如，$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

下面给出一些乘法公式.

(1) 两数和乘以它们的差：　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

(2) 两数和或差的平方：　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

(3) 乘积为立方和或立方差：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

例4　计算下列各式：

(1) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$；　　(2) $(x+2y-3)(x-2y+3)$.

解　(1) $(x-3)(x+3)(x^2+9)=(x^2-9)(x^2+9)=x^4-81$；

(2) $(x+2y-3)(x-2y+3)=x^2-(2y-3)^2=x^2-4y^2+12y-9.$

6）多项式除以单项式

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项分别除以这个单项式，再把所得的商相加.

例如，$(28a^3-14a^2+7a)\div7a=28a^3\div7a-14a^2\div7a+7a\div7a$

$$=4a^2-2a+1.$$

例5　计算下列各式：

(1) $(a^{7n}\div a^{2n})a^{5n}$；　　(2) $(4x^3y^2)^3\div(2xy^2)^2$；

(3) $(50a^2+15a^3b-20a^4)\div(-5a^2)$.

解　(1) $(a^{7n}\div a^{2n})a^{5n}=a^{7n-2n+5n}=a^{10n}$；

(2) $(4x^3y^2)^3\div(2xy^2)^2=64x^9y^6\div4x^2y^4=16x^7y^2$;

(3) $(50a^2+15a^3b-20a^4)\div(5a^2)=10+3ab-4a^2$.

1.1.3 分式及其运算

1. 分式的定义及性质

形如$\dfrac{A}{B}$(A、B 是整式,且 B 中含有字母,$B\neq0$)的式子称为**分式**,其中 A 叫做分式的**分子**,B 叫做分式的**分母**.

例如,$\dfrac{1}{y}$,$\dfrac{3ab}{a+b}$是分式,其中分母分别为 y 和 $a+b$;但$\dfrac{y}{2}$,$\dfrac{5a-b}{3}$不是分式,而是整式.

注意 在分式中,分母的值不能是零.如果分母的值是零,则分式没有意义.在分式$\dfrac{1}{y}$中要求 $y\neq0$;在分式$\dfrac{3ab}{a+b}$中要求 $a+b\neq0$,即 $a\neq-b$.

分式具有分数的基本性质,即分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变.

依据上述性质,可以对分式进行约分和通分.

例 6 将下列各式进行约分:

(1) $\dfrac{a^2-3a}{9-a^2}$; (2) $\dfrac{-36x^2y^3z}{8a^2x^2yb}$.

解 (1) $\dfrac{a^2-3a}{9-a^2}=\dfrac{a(a-3)}{-(a+3)(a-3)}=-\dfrac{a}{a+3}$;

(2) $\dfrac{-36x^2y^3z}{8a^2x^2yb}=\dfrac{-36x^2y^3\cdot z}{8x^2y\cdot a^2b}=-\dfrac{9y^2z}{2a^2b}$.

约分后,分子和分母不再有公因式,把这样的分式称为**最简分式**.

例 7 通分:$\dfrac{1}{a^2-16}$,$\dfrac{a}{8-2a}$.

分析 分式的通分是把几个异分母的分式分别化为与原来的分式相等的同分母的分式.通分的关键是确定几个分式的公分母,通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母(也称最简公分母).

解 把分母因式分解得

$$a^2-16=(a+4)(a-4);$$
$$8-2a=-2(a-4).$$

$\dfrac{1}{a^2-16}$ 与$\dfrac{a}{8-2a}$的最简公分母是 $2(a+4)(a-4)$,所以

$$\frac{1}{a^2-16}=\frac{2}{2(a+4)(a-4)};$$
$$\frac{a}{8-2a}=-\frac{a(a+4)}{2(a+4)(a-4)}.$$

2. 分式的四则运算

1) 分式的乘除法

两个分式相乘,分子与分子相乘,分母与分母相乘.

两个分式相除，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘.

例如，$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$；$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

例 8　计算下列各式：

(1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}\times\frac{x^2+x}{x-3}$；　　(2) $\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\div\frac{x+2y}{x^2+xy}$.

分析　在分式相乘和相除时，常常需要将多项式分解因式，并及时约分.

解　(1) 原式 $=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{x-3}=\frac{x(x-2)}{x-1}$；

(2) 原式 $=\frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{x^2+xy}{x+2y}=\frac{(x-2y)(x+2y)}{(x+y)^2}\cdot\frac{x(x+y)}{x+2y}$

$=\frac{x(x-2y)}{x+y}$.

注意　分式运算的最后结果应化成最简分式或整式.

2）分式的加减法

分式的加减与分数的加减相同，只有在分母相同时才能进行加减运算.

同分母的分式相加减，把分子相加减，分母不变.

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，然后再加减.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

例 9　计算下列各式：

(1) $\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{(x-y)^2}{xy}$；　　(2) $\frac{1}{3x^2}+\frac{3}{4x}$；　　(3) $\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}$.

解　(1)

$$\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{(x-y)^2}{xy}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{xy}$$
$$=\frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{xy}$$
$$=\frac{2(x^2+y^2)}{xy};$$

(2) $\frac{1}{3x^2}+\frac{3}{4x}=\frac{4}{12x^2}+\frac{9x}{12x^2}=\frac{9x+4}{12x^2}$；

(3) $\frac{3}{x-4}-\frac{24}{x^2-16}=\frac{3(x+4)}{(x-4)(x+4)}-\frac{24}{(x-4)(x+4)}=\frac{3(x+4)-24}{(x-4)(x+4)}$

$=\frac{3(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{3}{x+4}$.

1.1.4　多项式的因式分解

把一个多项式化为几个最简整式的乘积的形式，这种变形称为因式分解（也称为分解因式）.因式分解一般有以下几种方法.

1. 提取公因式法

如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式

乘积的形式，这种分解因式的方法叫做**提取公因式法**.

提取公因式的形式为 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

例 10　分解因式：

(1) $3x^2-6xy+x$；　(2) $-4m^3+16m^2-6m$.

解　(1) $3x^2-6xy+x=x\cdot 3x-x\cdot 6y+x\cdot 1=x(3x-6y+1)$；

(2)
$$\begin{aligned}-4m^3+16m^2-6m&=-(4m^3-16m^2+6m)\\&=-(2m\cdot 2m^2-2m\cdot 8m+2m\cdot 3)\\&=-2m(2m^2-8m+3).\end{aligned}$$

2. 运用公式法

根据因式分解的意义，如果把乘法公式反过来，就可以用来把某些多项式分解因式. 这种分解因式的方法称为**运用公式法**.

(1) 平方差公式：　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2) 完全平方公式：　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；

(3) 立方和与立方差公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

注意　公式(3)中的因式 a^2-ab+b^2 与 a^2+ab+b^2 都是非完全平方式.

例 11　分解因式：

(1) x^4-y^4；　(2) $3ax^2+6axy+3ay^2$；　(3) $x-xy^3$.

解　(1) 原式 $=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$；

(2) 原式 $=3a(x^2+2xy+y^2)=3a(x+y)^2$；

(3) 原式 $=x(1-y^3)=x(1-y)(1+y+y^2)$.

3. 十字相乘法

十字相乘法是二次三项式 ax^2+bx+c 分解因式最常用的方法. 如果

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2\\&=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2),\end{aligned}$$

即将 a 分解成 a_1a_2，将 c 分解成 c_1c_2，且将 a_1,a_2,c_1,c_2 排列如下：

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & c_1 \\ & \times & \\ a_2 & & c_2 \end{array}$$

这里按斜线交叉相乘的积的和就是 $a_1c_2+a_2c_1$，如果它正好等于 b，那么

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2).$$

例 12　分解因式：

(1) $6x^2-x-15$；　(2) x^2-5x+6.

解　(1) 将二次项系数 6 分解成 2×3，将常数项 -15 分解成 $3\times(-5)$，$3\times 3+2\times(-5)$ 正好等于一次项系数 -1.

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 3 & & -5 \end{array}$$

所以　$6x^2-x-15=(2x+3)(3x-5)$.

(2) 这里二次项系数是 1,只能分解成 1×1,将常数项 6 分解成 $(-2)\times(-3)$,由十字相乘,$1\times(-2)+1\times(-3)=-5$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & -2\\ & \times & \\ 1 & & -3\end{array}$$

所以
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

显然,对于二次项系数为 1 的二次三项式 x^2+px+q,如果满足 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$,这里 $q=ab$,$p=a+b$,则可以分解因式.

以上这种通过画十字交叉线把二次三项式分解因式的方法称为**十字相乘法**.

用十字相乘法分解因式,因为二次项系数和常数项拆分有多种乘积的组合,所以往往要经过多次尝试.

4. 分组分解法

有些多项式需要先进行分组,然后分解因式.

例 13　分解因式:

(1) $3ax+4by+4ay+3bx$;　　(2) $x^2-y^2+ax+ay$.

解　(1)
$$\begin{aligned}3ax+4by+4ay+3bx&=(3ax+4ay)+(3bx+4by)\\&=a(3x+4y)+b(3x+4y)\\&=(3x+4y)(a+b);\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}x^2-y^2+ax+ay&=(x^2-y^2)+(ax+ay)=(x+y)(x-y)+a(x+y)\\&=(x+y)(x-y+a).\end{aligned}$$

多项式分解因式的步骤一般为:

(1) 多项式的各项有公因式时,先提公因式;

(2) 运用公式法或十字相乘法;

(3) 如果用上述方法不能分解,再看它能不能运用分组分解法或综合运用上述方法.

注意　分解因式必须进行到每一个因式都不能分解为止.

1.2　方　　程

含有未知数的等式称为方程.方程研究了事物间的等量关系,并为人们提供由已知量推求未知量的重要方法,在数学中有广泛的应用.按方程中未知数的个数和次数不同,方程可分为不同形式的方程,如一元一次方程、二元一次方程、一元二次方程等.对应不同的方程,其求解方法也不尽相同,本节只研究常用的二元一次方程组及一元二次方程.

1.2.1　二元一次方程组

1. 二元一次方程组和它的解

含有两个未知数,并且所含未知数的次数都是 1 的方程叫做二元一次方程.

把两个二元一次方程联立在一起,就组成了一个**二元一次方程组**.

使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值,叫做**二元一次方程的解**.

例如,$x+y=5$ 是一个二元一次方程,$6x+13y=89$ 也是一个二元一次方程,如果把 $x+y=5$、$6x+13y=89$ 联立起来就是一个二元一次方程组,可记为

$$\begin{cases} x+y=5, & (1) \\ 6x+13y=89. & (2) \end{cases}$$

把同时满足上式(1)(2)两个方程的 x、y 叫做方程组的解，在这里 $x=-\frac{24}{7}$，$y=\frac{59}{7}$ 就是上面方程组的解.

2. 二元一次方程组的解法

在求解二元一次方程组时，一般将二元一次方程组里的两个方程转化为只含一个未知数的一个一元方程，求出这个未知数的值，然后再设法求出另一个未知数的值. 这种求解二元一次方程的方法称为**消元法**，一般有如下两种消元方式.

1) 代入消元法

代入消元法解方程组的步骤如下：

(1) 将方程组里的一个方程变形，用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数；

(2) 用这个代数式代替另一个方程中相应的未知数，使解二元一次方程组转化为解一元一次方程，求得一个未知数的值；

(3) 把求得的这个未知数的值代入原方程组中的任意一个方程，求得另一个未知数的值，从而得到方程组的解.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+5y=-21, & (1) \\ x+3y=8. & (2) \end{cases}$$

分析 在这个方程组里，方程(2)中未知数 x 的系数是 1，为了方便起见，可以先把方程(2)变形，用含 y 的代数式表示 x，然后再解.

解 由方程(2)得

$$x=8-3y, \tag{3}$$

把方程(3)代入方程(1)得

$$2(8-3y)+5y=-21,$$

所以

$$y=37.$$

把 $y=37$ 代入方程(3)得

$$x=-103.$$

所以

$$\begin{cases} x=-103, \\ y=37. \end{cases}$$

2) 加减消元法

加减消元法解方程组的步骤如下：

(1) 方程组里一个方程的两边都乘以一个适当的数，或者分别在两个方程的两边都乘以一个适当的数，使其中某一个未知数的系数的绝对值相等；

(2) 把方程两边分别相加或相减，消去这个未知数，使解二元一次方程组转化为解一元一次方程.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y=16, & (1) \\ 5x-6y=33. & (2) \end{cases}$$