高等数学习题集 下册

GAODENG SHUXUE XITIJI

主　编 ◎ 宋丽丽

副主编 ◎ 马致远　张建亮

重庆大学出版社

高等数学习题集 下册

GAODENG SHUXUE XITIJI

资源地址

ISBN 978-7-5689-1546-5

9 787568 915465 >

定价：30.00元

高等数学习题集 下册

GAODENG SHUXUE XITIJI

主　编◎宋丽丽

副主编◎马致远　张建亮

参　编◎李　密　苗加庆　田　琳　冯向东

重庆大学出版社

内容提要

本书是根据高等院校理工类本科专业"高等数学"课程的最新教学大纲编写而成的配套习题集。在编写过程中，本书结合了作者多年来的教学实践经验和考虑了当前学生的知识结构和习惯特点，全书分为上、下两册。本书为下册，共5章，内容包括空间解析几何和向量代数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。每章均包括典型例题与习题两部分，其中习题题型丰富多样、层次分明、难度适中。

本书可作为高等院校理工类、经管类本科专业及高职高专各专业的高等数学课程的参考书，也可供自学者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集.下册 / 宋丽丽主编.--重庆：重庆大学出版社，2019.7
ISBN 978-7-5689-1546-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①宋… Ⅲ.①高等数学—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第079507号

高等数学习题集
(下册)
主 编 宋丽丽
副主编 马致远 张建亮
责任编辑：姜 凤 版式设计：姜 凤
责任校对：邹 忌 责任印制：邱 瑶
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：饶帮华
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编：401331
电话：(023) 88617190 88617185(中小学)
传真：(023) 88617186 88617166
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆市正前方彩色印刷有限公司印刷
*
开本：787mm×1092mm 1/16 印张：11 字数：277千
2019年7月第1版 2019年7月第1次印刷
印数：1—5 200
ISBN 978-7-5689-1546-5 定价：30.00元

前 言

本书是根据独立学院的学生学习高等数学的实际情况编写的学习指导书，高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，编写此书的目的是让学生能够更好地掌握高等数学的知识，同时理解高等数学思想的精髓，为后续专业课打下良好的基础。

本书是以规范学生的课外作业，培养学生严谨认真的学习态度与实事求是的治学态度，训练学生创造性思维能力为目的且与教材知识点相对应的同步练习辅导书。本书采用了一课一练的结构以便于作业的布置，练习题由易到难、由浅入深、循序渐进，从而有利于知识点的消化与吸收、巩固与掌握。

全书分为上下两册，共 12 章，其中上册 7 章，下册 5 章。本书包括以下几个方面的内容：

典型例题：通过对典型例题进行详细的解答分析，总结本节的重点和难点，便于学生更好地吸收所学内容，供教师教学和学生课后复习时参考。

习题：是教材习题的一个补充，题目由简到难，有助于学生消化理解本节课的内容，习题量可以满足学生学习高等数学所必需的练习要求。习题答案请扫描封底二维码。

模拟试题：在本书的最后编者提供了几套各个层次的模拟试题，以供学生期末复习使用。

本书由宋丽丽统稿，参与编写的有余世成、徐广顺、马志民、韩红伟、张玉琴、宋丽丽、田琳、杨卓东、李密、马致远、苗加庆、冯向东、张建亮、黄长春、赵艳丽、张红霞、王志龙、张萍、祝佳玲。

本书在编写过程中，获得了成都理工大学工程技术学院基础部张建建书记、杨志军主任的大力支持和帮助，也获得了教务处相关部门领导、老师的支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2018 年 10 月

目　录

第八章　空间解析几何和向量代数

§8.1　向量及线性运算

一、典型例题

【例 1】　求平行于向量 $\vec{r}=(3,2,-1)$的单位向量.

解:求平行于向量$(3,2,-1)$的单位向量,就是把向量$(3,2,-1)$单位化.所以

$$\vec{e_{\vec{\gamma}}}=\pm\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\pm\frac{(3,2,-1)}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,-1).$$

【例 2】　已知 $A(4,0,5)$,$B(7,1,z)$且$|AB|=\sqrt{14}$,求 z 的值.

解:本例考察的是两点之间的距离.

$$\sqrt{(7-4)^2+(1-0)^2+(z-5)^2}=\sqrt{14},$$

等号两端同时平方,可得$(z-5)^2=4$,则 $z=7$,或 $z=3$.

【例 3】　从点 $A(2,-1,7)$沿向量 $\vec{\alpha}(8,9,-12)$方向取长为 34 的线段 AB,求 B 点的坐标.

解:设 B 点的坐标为(x,y,z),则$\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$,且$\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{\alpha}$,即

$$x-2=8\lambda,y+1=9\lambda,z-7=-12\lambda,$$

$$34=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8\lambda)^2+(9\lambda)^2+(-12\lambda)^2},$$

从而$\lambda=2$,所以点 B 的坐标为$(18,17,-17)$.

注:两个向量方向相同,表明两向量满足数乘关系,即两向量的对应分坐标成比例.

【例 4】　已知 $A=(1,0,0)$,$B(3,1,1)$,$C(2,0,1)$,求:

(1)$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CA}$及其模;　　　(2)$\overrightarrow{BC}$的方向余弦、方向角.

解:(1)$\overrightarrow{BC}=(2-3,0-1,1-1)=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{CA}=(1-2,0-0,0-1)=(-1,0,-1)$,故$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$,$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

(2)因为$\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0)$,所以由向量的方向余弦的坐标表示式得:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0,$$

方向角为:$\alpha=\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{2}$.

【例 5】 点 A 位于第一卦限,向量$\overrightarrow{OA}$与 x 轴、y 轴的夹角依次为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$,求与$\overrightarrow{OA}$方向相同的单位向量.

解:因为向量的方向余弦构成的向量刚好是单位向量,所以本例只需求出向量$\overrightarrow{OA}$的方向余弦即可.

$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4}$,由关系式$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$,得:

$$\cos^2\gamma=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

因为点 A 位于第一卦限,知 $\cos\gamma>0$,故 $\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

于是

$$\overrightarrow{e_{\overrightarrow{OA}}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

注:一个向量的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 刻画了此向量的方向,并且具有一个非常重要的性质$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

二、习题

1.坐标面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0);B(0,4,3);C(3,0,0);D(0,-1,0).$$

2.求点(a,b,c)关于:(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

3.自点$M(1,2,3)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

4.求点$M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.

5.在yOz面上,求与$A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$等距离的点.

6.求平行于向量$\vec{a}=(6,7,-6)$的单位向量.

7.已知 $\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}-\vec{e_3}$,$\vec{b}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}+2\vec{e_3}$,求 $\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{a}-\vec{b}$ 和 $3\vec{a}-2\vec{b}$.

8.已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$.试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

9.已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$.计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

10.设有向量$\overrightarrow{p_1p_2}$,已知$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=2$,且$\overrightarrow{p_1p_2}$与 x 轴和 y 轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$,如果 p_1 的坐标为$(1,0,3)$,求 p_2 的坐标.

11.设向量的方向余弦分别满足:(1)$\cos\alpha=0$;(2)$\cos\beta=1$;(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

12.一个向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$. 求该向量的起点 A 的坐标.

13.设 $\vec{m}=(3,5,8)$,$\vec{n}=(2,-4,-7)$,$\vec{p}=(5,1,-4)$.求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

14.设向量的方向角为 α,β,γ.若已知其中的两个角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\beta=\frac{2\pi}{3}$.求第三个角 γ.

15.设 $F_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,$F_2=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,$F_3=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 作用于同一质点,求合力的大小和方向角.

§8.2 数量积 向量积

一、典型例题

【例 1】 指出下列等式成立的充要条件,并给予证明.

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$; (2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; (3) $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线.

解:(1)等式成立的充要条件是:$\vec{a},\vec{b}$ 反向且 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$.

由向量的数量积与模的关系得:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$; $(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|$,

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|\Leftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\quad(|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|)$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\quad(|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|)$$

$$\Leftrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\quad(|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|).$$

(2)等式成立的充要条件是:$\vec{a}\perp\vec{b}$.

证法 1:由向量的数量积与模的关系得:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$;

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$;

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

证法 2：由向量加减法的定义知，当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时，以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线是 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$，而平行四边形的两条对角线相等的充要条件是此平行四边形是矩形，故 $\vec{a}\perp\vec{b}$；当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 的充要条件是 $\vec{a},\vec{b}$ 中必有一个零向量，而零向量与任意向量垂直，故得证.

(3)$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线的充要条件是：$\vec{a},\vec{b}$ 共线.注意

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{b}\times\vec{a},$$

所以 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 共线$\Leftrightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\vec{b}\times\vec{a}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ 共线.

【例 2】 判断下列等式是否成立.

(1)$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$；

(2)$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

解：(1)不成立.因为$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2\ |\vec{b}|^2\cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$，$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\vec{b}^2=|\vec{b}|^2$，

因此，当 $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\neq\pm1$ 时，$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\neq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$.

(2)成立.在空间中引入坐标系，

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix},$$

又 $$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix};$$

因此

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

【例 3】 设 $\vec{a}=(1,-2,2),\vec{b}=(-2,1,2)$.

(1)满足 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$ 的向量 $\vec{c}$ 存在吗？为什么？

(2)若存在 $\vec{c}$，写出满足 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$ 的向量 $\vec{c}$ 的坐标表达式.

(3)求出模为最小的向量 $\vec{c}$.

解:(1)因为若 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$,则必有 $\vec{a}\perp\vec{b}$,即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.经验证 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,故满足 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$ 的向量 $\vec{c}$ 存在.

(2)用待定系数法,设 $\vec{c}=(x,y,z)$,由 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$,即 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}=(-2,1,2)$.

设 $x=t$ 代入解得 $y=2-2t$;$z=2t-1$.

所以 $\vec{c}=(t,2-2t,2t-1),t\in\mathbf{R}$.

(3)$|\vec{c}|=\sqrt{t^2+(2-2t)^2+(2t-1)^2}=\sqrt{(3t-2)^2+1}$.

当 $3t-2=0$ 时,即 $t=\dfrac{2}{3}$时,$|\vec{c}|$最小,此时$|\vec{c}|=1$.故模为最小的向量 $\vec{c}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

注:此例是利用向量的性质,用代数法——待定系数法求解.

【例 4】 已知$|\vec{a}|=13$,$|\vec{b}|=19$,$|\vec{a}+\vec{b}|=24$,求$|\vec{a}-\vec{b}|$.

解:因为$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

所以 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=24^2-13^2-19^2$.

而$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=13^2+19^2-(24^2-13^2-19^2)=484$.

所以$|\vec{a}-\vec{b}|=22$.

【例 5】 求以向量 $\vec{a}=(8,4,1)$,$\vec{b}=(2,-2,1)$为邻边的平行四边形的面积.

解:平行四边形的面积为 $S=|\vec{a}\times\vec{b}|$,

由于 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(6,-6,-24)$.

于是所求面积为 $S=|(6,-6,-24)|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=18\sqrt{2}$.

【例 6】 已知向量 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}=(1,5,-2)$共线,且满足 $\vec{a}\cdot\vec{x}=3$,求向量 $\vec{x}$ 的坐标.

解:设向量 $\vec{x}$ 的坐标为(x,y,z),又 $\vec{a}=(1,5,-2)$.

则

$$\vec{a}\cdot\vec{x}=x+5y-2z=3. \tag{1}$$

又知 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 共线，则 $\vec{x}\times\vec{a}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}=(-2y-5z,z+2x,5x-y)=\mathbf{0},$$

所以 $\sqrt{(-2y-5z)^2+(z+2x)^2+(5x-y)^2}=0$，

即

$$29x^2+5y^2+26z^2+20yz+4xz-10xy=0. \tag{2}$$

因 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 共线，所以 $\vec{x}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 0 或 π，

$$\cos 0=1=\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{30}},$$

整理得：

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{10}. \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)解出向量 $\vec{x}$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{10},\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$.

【例 7】 已知 $\overrightarrow{F_1}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{F_2}=(-2,3,-4)$，$\overrightarrow{F_3}=(3,-4,5)$，

(1)求合力的大小和方向.

(2)若合力的作用点是 $A(1,-2,1)$，求合力对 $B(2,1,1)$ 的力矩.

解：(1)记合力 $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=(1-2+3,2+3-4,3-4+5)=(2,1,4)$，

合力的大小是 $|\vec{F}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$，

合力 $\vec{F}$ 的方向余弦是 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}}$，$\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}$，

因此 $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{21}}$，$\beta=\arccos\frac{1}{\sqrt{21}}$，$\gamma=\arccos\frac{4}{\sqrt{21}}$.

(2)合力 $\vec{F}$ 的力矩是 $\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1-2 & -2-1 & 1-1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=(-12,4,5)$.

【例 8】 设 $\vec{a},\vec{b}\ \vec{c}$ 满足 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\frac{\pi}{3}$，$\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{\pi}{6}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$，求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的模.

解：求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的模，即求 $\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)}$.

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2|\vec{a}||\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c})+2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(\vec{b},\vec{c})$$
$$=8+\sqrt{3},$$

所以 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{8+\sqrt{3}}$.

【例 9】 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3$ 且 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\mathbf{0}$,求 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

解: $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$=1+4+9+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}),$$

另一方面,由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\mathbf{0}$ 知,$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$ 代入上式得:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{14}{2}=-7.$$

二、习题

(一)选择题

1.设 $\vec{a}=(3,5,-1),\vec{b}=(2,2,3)$,且 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ 与 Oz 轴垂直,则必有(　　).

A.$\lambda=\mu$　　B.$\lambda=-\mu$　　C.$\lambda=2\mu$　　D.$\lambda=3\mu$

2.已知 $\vec{a}=(-2,-1,2),\vec{b}=(1,-3,2)$,则 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=$(　　).

A.$\frac{5}{3}$　　B.5　　C.3　　D.$\frac{5}{\sqrt{14}}$

3.设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足:$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\mathbf{0}$,则 $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=$(　　).

A.0　　B.$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$　　C.$\vec{b}\times\vec{c}$　　D.$3(\vec{a}\times\vec{b})$

4.已知 $\overrightarrow{OA}=(1,0,3),\overrightarrow{OB}=(0,1,3)$,则 $\triangle AOB$ 的面积 $S=$(　　).

A.$\sqrt{19}$　　B.$\frac{\sqrt{19}}{2}$　　C.9　　D.0