高等数学习题集 上册

GAODENG SHUXUE XITIJI

主　编◎徐广顺

副主编◎张玉琴　马志民

重庆大学出版社

高等数学习题集 上册

GAODENG SHUXUE XITIJI

主　编◎徐广顺
副主编◎张玉琴　马志民
参　编◎余世成　韩红伟　杨卓东

重庆大学出版社

内容提要

本书是根据高等院校理工类本科专业“高等数学”课程的最新教学大纲编写而成的配套习题集。在编写过程中，本书结合了作者多年的教学实践经验和考虑了当前学生的知识结构和习惯特点，全书分为上、下两册。本书为上册，共7章，内容包括函数极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程等知识。每个章节包括典型例题分析与习题两部分，其中习题题型丰富多样，层次分明，难度适中。

本书可作为高等院校理工类、经管类本科专业及高职高专各专业的高等数学课程的参考书，也可供自学者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集．上册／徐广顺主编．--重庆：重庆大学出版社，2019.6

ISBN 978-7-5689-1539-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等数学—习题集
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第075513号

高等数学习题集

（上册）

主　编　徐广顺

副主编　张玉琴　马志民

责任编辑：姜　凤　　版式设计：姜　凤

责任校对：谢　芳　　责任印制：邱　瑶

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：饶帮华

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆市正前方彩色印刷有限公司印刷

*

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：14.5　字数：365千

2019年6月第1版　2019年6月第1次印刷

印数：1—5 200

ISBN 978-7-5689-1539-7　定价：37.00元

前言

本书是根据独立学院的学生学习高等数学的实际情况编写的学习指导书，高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，编写此书的目的是让学生能够更好地掌握高等数学的知识，同时理解高等数学思想的精髓，为后续专业课打下良好的基础。

本书是以规范学生的课外作业，培养学生严谨认真的学习态度与实事求是的治学态度，训练学生创造性思维能力为目的且与教材知识点相对应的同步练习辅导书。本书采用了一课一练的结构以便于作业的布置，练习题由易到难、由浅入深、循序渐进，从而有利于知识点的消化与吸收、巩固与掌握。

全书分为上、下两册，共 12 章，其中上册 7 章，下册 5 章。本书包括以下几个方面的内容：

典型例题：通过对典型例题进行详细的解答分析，总结本节的重点和难点，便于学生更好地吸收所学内容，供教师教学和学生课后复习时参考。

习题：它是教材习题的一个补充，题目由简到难，有助于学生消化理解本节课的内容，习题量可以满足学生学习高等数学所必需的练习要求。习题答案请扫描封底二维码。

模拟试题：在本书的最后，编者提供了几套模拟试题，以供学生期末复习使用。

本书由徐广顺统稿，参与编写的有余世成、徐广顺、马志民、韩红伟、张玉琴、宋丽丽、田琳、杨卓东、李密、马致远、苗加庆、冯向东、张建亮、黄长春、赵艳丽、张红霞、王志龙、张萍、祝佳玲。

本书在编写过程中获得了成都理工大学工程技术学院基础部张建建书记、杨志军主任的大力支持和帮助，也获得了教务处相关部门领导及同仁的支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2019 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函　数

一、典型例题

【例 1】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$；

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

解：(1)由所给函数知，要使函数 y 有定义，必须满足两种情况：一是偶次根式的被开方式大于等于零，二是对数函数符号内的式子为正。可建立不等式组，并求出联立不等式组的解，即

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

推得

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为 $-4\leqslant x<-\pi$ 与 $0<x<\pi$，所以函数的定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

(2)由所给函数知，要使函数 y 有定义，必须满足分母不为零且偶次根式的被开方式非负；反正弦函数符号内的式子的绝对值小于等于 1.可建立不等式组，并求出联立不等式组的解，即

$$\begin{cases}\sqrt{3-x^2}\neq 0,\\ 3-x^2\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

推得

$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

即

$$0\leqslant x<\sqrt{3},$$

因此,所给函数的定义域为$[0,\sqrt{3})$.

【例 2】 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$在$(-1,+\infty)$内是单调增加的函数.

证:在$(-1,+\infty)$内任取两点 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1,x_2 是$(-1,+\infty)$内任意两点,所以 $1+x_1>0,1+x_2>0$.

又因为 $x_1-x_2<0$,故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$(-1,+\infty)$内是单调增加的函数.

【例 3】 判断函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln\dfrac{2-x}{2+x}(-2<x<2)$的奇偶性.

解:因为函数的定义域关于原点对称,且

$$f(-x)=\sin(-x)\cdot\ln\frac{2+x}{2-x}=-\sin x\cdot\left(-\ln\frac{2-x}{2+x}\right)=\sin x\cdot\ln\frac{2-x}{2+x}=f(x),$$

所以由定义知,$f(x)$为偶函数.

【例 4】 分析复合函数 $y=\tan^2(e^{5x})$的复合过程.

解:最外层是二次方,即 $y=u^2$,次外层是正切,即 $u=\tan v$,从外向里第三层是指数函数,即 $v=e^w$,最里层是一次函数,即 $w=5x$.因此该复合函数是由 $y=u^2,u=\tan v,v=e^w$,$w=5x$ 复合而成的.

【例 5】 设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$,求 $f(x)$.

解:因为 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+5$,所以 $f(x)=x^2+5$.

二、习题

1.求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+3}}$；

(2) $y=\dfrac{1}{2x+1}-\sqrt{4-x^2}$；

(3) $y=\arcsin(x-1)+\ln(x+1)$；

(4) $y=e^{\frac{1}{2x+1}}$；

(5) $y=\sqrt[4]{9-x^2}+\ln(2+x)$；

(6) $y=\arccos(3x+1)+\operatorname{arccot} x$；

(7) $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\dfrac{2}{x-1}$；

(8) $y=\arcsin \ln(x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

2.设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,4]$，求 $f(x^2-5)$ 的定义域.

3.判断函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

4.判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\sin x$；

(2) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(3) $f(x)=3x^2-x^3$；

(4) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(5) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

5.分析下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\arcsin^2(2x+1)$；　　(2) $y=a^{\tan(x^2+1)}$；

(3) $y=\arcsin^3\ln(x+1)$；　　(4) $y=\ln\left(\tan e^{\frac{x^2}{2x+1}}\right)$；

(5) $y=\sqrt[5]{\operatorname{arccot}\ln\sin(2x+3)}$.

6.设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

7.设 $f(1+\ln x)=x^2+2x+3, x>0$，求 $f(x)$.

§1.2 数列的极限

一、典型例题

【例 1】 根据数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

分析：要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{2n}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{2n}=\dfrac{a^2}{2n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\dfrac{a^2}{2n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{a^2}{2\varepsilon}$.

证：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{a^2}{2\varepsilon}\right]\in\mathbf{Z}^+$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{2n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

二、习题

1.观察数列$\{x_n\}$的一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限：

(1)$x_n=e^{-n}$；

(2)$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{2n}$；

(3)$x_n=1+\dfrac{1}{3n^2+2n}$；

(4)$x_n=\dfrac{n-1}{3n+1}$；

(5) $x_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{2n}$.

2.根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

§1.3 函数的极限

一、典型例题

【例 1】 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}=1$.

分析：当 $x\to\infty$ 时，$\left|\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|=1-\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}$，要使 $\left|\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|=1-\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}<\varepsilon$，两端取对数，化简得 $|x|>\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$，因此只需取 $X=\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$.

证：对 $\forall\varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），$\exists X=\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}\in\mathbf{R}^+$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|x|>\frac{1}{|\ln(1-\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}}$，即 $\left|\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}-1\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}=1$.

【例 2】 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

分析：要使 $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<\varepsilon$，只需取 $\delta=\varepsilon$.

证：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，使得当 $|x-0|<\delta$，即 $|x|<\varepsilon$ 时，恒有 $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}a+\mathrm{e}^{2x}, & x<0\\ \ln(1+x), & x\geqslant0\end{cases}$，在 $x=0$ 处的极限存在，求 a 的值.

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+\mathrm{e}^{2x})=a+1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)=0$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在，故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，即 $a=-1$.

二、习题

1.当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$，问 X 为何值时，使得当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

2.根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；

(3)证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x}{x+1}=-1$.

3.当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$，问 δ 为何值时，使得当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

4.根据函数极限的定义证明：

(1)$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；

(2)$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3)$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；

(4)$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.