

中小学科普经典阅读书系

数学花园 漫游记

名师讲解版

马希文 / 著

王猛等 / 点评



北大教授、奥数总教练

给孩子的经典趣味数学书

中小学科普经典阅读书系

数学花园漫游记

名师讲解版

马希文 / 著 王猛 等 / 点评

贵州师范学院内部使用

图书在版编目 (C I P) 数据

数学花园漫游记: 名师讲解版 / 马希文著; 王猛
等点评. -- 武汉: 长江文艺出版社, 2019.9 (2020.3 重印)
(中小学科普经典阅读书系)
ISBN 978-7-5702-1020-6

I. ①数… II. ①马… ②王… III. ①数学—青少年
读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 092223 号

责任编辑: 黄柳依
设计制作: 格林图书

责任校对: 毛 娟
责任印制: 邱 莉 胡丽平

出版:  长江出版传媒 |  长江文艺出版社

地址: 武汉市雄楚大街 268 号 邮编: 430070

发行: 长江文艺出版社

<http://www.cjlap.com>

印刷: 长沙鸿发印务实业有限公司

开本: 640 毫米×970 毫米 1/16 印张: 11.25 插页: 1 页

版次: 2019 年 9 月第 1 版 2020 年 3 月第 2 次印刷

字数: 126 千字

定价: 22.00 元

版权所有, 盗版必究 (举报电话: 027—87679308 87679310)

(图书出现印装问题, 本社负责调换)



经·典·阅·读·书·系

总 序

叶永烈

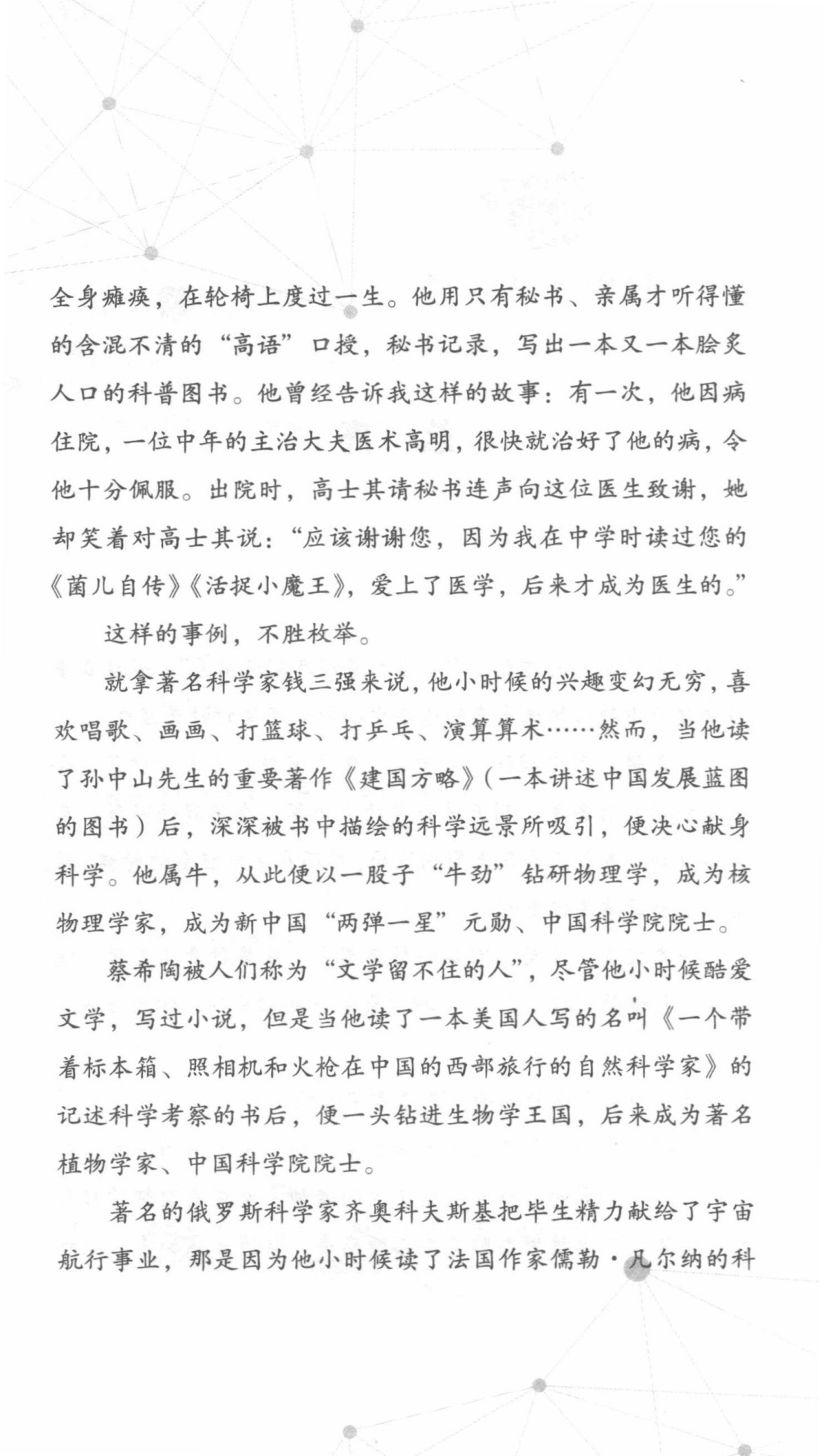
放在你面前的这套“中小学科普经典阅读书系”，是从众多科普读物中精心挑选出来的适合中小学生学习阅读的科普经典。

少年强，则中国强。科学兴，则中国兴。广大青少年，今天是科学的后备军，明天是科学的主力军。在作战的时候，后备力量的多寡并不会马上影响战局，然而在决定胜负的时候，后备力量却是举足轻重的。

一本优秀、生动、有趣的科普图书，从某种意义上讲，就是这门科学的“招生广告”，把广大青少年招募到科学的后备军之中。

优秀科普图书的影响，是非常深远的。

这套“中小学科普经典阅读书系”的作者之一高士其，是中国著名老一辈科普作家，也是我的老师。他在美国留学时做科学实验，不慎被甲型脑炎病毒所感染，病情日益加重，以致



全身瘫痪，在轮椅上度过一生。他用只有秘书、亲属才听得懂的含混不清的“高语”口授，秘书记录，写出一本又一本脍炙人口的科普图书。他曾经告诉我这样的故事：有一次，他因病住院，一位中年的主治大夫医术高明，很快就治好了他的病，令他十分佩服。出院时，高士其请秘书连声向这位医生致谢，她却笑着对高士其说：“应该谢谢您，因为我在中学时读过您的《茵儿自传》《活捉小魔王》，爱上了医学，后来才成为医生的。”

这样的事例，不胜枚举。

就拿著名科学家钱三强来说，他小时候的兴趣变幻无穷，喜欢唱歌、画画、打篮球、打乒乓、演算算术……然而，当他读了孙中山先生的重要著作《建国方略》（一本讲述中国发展蓝图的图书）后，深深被书中描绘的科学远景所吸引，便决心献身科学。他属牛，从此便以一股子“牛劲”钻研物理学，成为核物理学家，成为新中国“两弹一星”元勋、中国科学院院士。

蔡希陶被人们称为“文学留不住的人”，尽管他小时候酷爱文学，写过小说，但是当他读了一本美国人写的名叫《一个带着标本箱、照相机和火枪在中国的西部旅行的自然科学家》的记述科学考察的书后，便一头钻进生物学王国，后来成为著名植物学家、中国科学院院士。

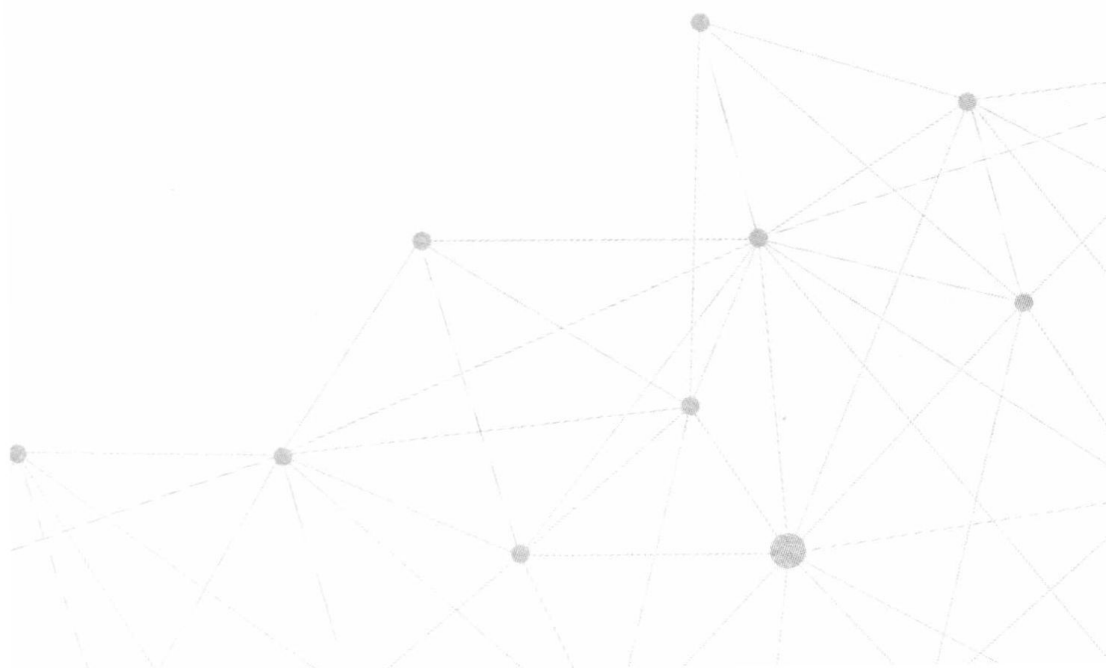
著名的俄罗斯科学家齐奥科夫斯基把毕生精力献给了宇宙航行事业，那是因为他小时候读了法国作家儒勒·凡尔纳的科

学幻想小说《从地球到月球》，产生了变幻想为现实的强烈欲望，从此开始研究飞出地球去的种种方案。

童年往往是一生中决定志向的时期。人们常说：“十年树木，百年树人。”苗壮方能根深，根深才能叶茂。只有从小爱科学，方能长大攀高峰。“发不发，看娃娃。”一个国家科学技术将来是否兴旺发达，要看“娃娃们”是否从小热爱科学。

中国已经站起来，富起来，正在强起来。中国的强大，第一支撑力就是科学技术。愿“中小学科普经典阅读书系”的广大读者，从小受到科学的启蒙，对科学产生浓厚的兴趣，长大之后成为中国方方面面的科学家，担负中国强起来的重任。

2019年5月22日于上海“沉思斋”



序

打开这本书，我将带你到数学的花园里去漫步。

你已经学了不少数学知识。这些知识都在数学花园的大门口，或者在进门不远的地方。这些地方已经修起了许多美丽的花坛花棚，盖起了许多高楼大厦。你学过的数学知识，是这些建筑的基础。

这一次，让我们尽可能走得远一些，去观赏一下数学花园里的新景色！

数学的花园很大，分成许多小区，这些小区叫做数学的分支。你学习的代数、几何，就是数学的分支。每一个分支，又分成许多小的分支。不论大的分支、小的分支，几乎都有我们的同胞在工作；有的分支，还留下了我们祖先深深的脚印。你一定想知道，这些能工巧匠在那里干些什么。

他们在锄地、灌水、栽花。他们在维修、改建和新建一座座精美的建筑。

随我一路走过去吧！各种各样的景色会引起你的喜爱和关心。

新奇的问题层出不穷，每一个分支里都有它独特的问题。有的你一眼就能看出它的实用价值，有的你会感到它是严肃的理论研究，有的你会觉得它是有趣的智力测验，有的还可能和你平时的看法不一致。

这些问题，在它们自己的分支里都是有资格的代表。

为了解决这些问题，人们已经花费了许多时间和精力。他们反复琢磨，有的提出了新的观点和思想，有的想到了新的方法和技巧。

看看他们的成绩，听听他们的议论，你就可以接触到现代数学的脉搏，感觉到它是在怎样跳动着。

希望你不要只是满足于看看而已。

每当遇到一个新的问题，你应当想一想，这是一个什么性质的问题，你能解决它吗？

每当听到一种新的思想，你应当想一想，这种思想的本质是什么，对你有没有启发？

每当看到一种新的方法，你应当想一想，这种方法妙在哪里，你能用它来解决其他问题吗？

不然的话，你会入宝山而空回。

目 录

Contents



数数问题 \ 001

关于考试的话 \ 006

地图上的数学 \ 011

北京市的面积有多大 \ 017

四色问题 \ 021

如果我们住在土星的光环上 \ 026

通向“色数”的桥梁

——欧拉公式 \ 031

四色问题的副产品

——莫比乌斯环 \ 035

试验田里的数学 \ 042

如果找不到大块田 \ 048

再走一步

——回到了几何学中 \ 054

图的世界 \ 061

最短路程问题 \ 068

- 最大流问题 \ 075
- 请你当车间主任 \ 081
- 秘诀在哪里 \ 086
- 从最简单的情况起步走 \ 092
- “ \smile ”和“ \frown ”是什么呀 \ 100
- 向前迈进 \ 106
- 该跟踪谁 \ 112
- 斗智的结果
——找到了平衡点 \ 117
- 利用混合策略造成平衡点 \ 123
- 侦查员的策略 \ 128
- 奇怪的无穷多 \ 135
- 无穷多的美妙特性 \ 141
- 模糊数学 \ 148
- 不可能问题 \ 155
- 等待着人们去试探 \ 160
- 和你告别 \ 166

数数问题

谁不会数数？这也算个问题？

当然啰，人有几个手指头，屋子里有几把椅子，这谁都会数。

但也有一些数，不能用“1、2、3……”这样常规的方法去数。

比如中国有10多亿人口，如果1、2、3……这样地数，就算1秒钟数2个，1天24小时不停地数，也只能数 $24 \times 60 \times 60 \times 2 = 172800$ 个，1年数 $172800 \times 365 = 63072000$ 个，10多亿个就要数20多年。在这段时间内，不知有多少人死去，多少人出生，怎么数得清呢？

又比如教室里有多少座位，我们一般不是一个一个地数，而是数数有多少排，每一排有多少个座位，然后用乘法来计算。

有一些数字很大，又只需要一个比较粗略的近似值，这时候，我们就要利用种种办法进行估计。一本书有多少字？大体上可以用页数乘上每页的行数，再乘上每行的字数来估计。

不过，即使是估计，有时候也需要认真思考，才能找到一个切实可行的好办法。

例如，你头上有多少根头发？

据说，人的头发有几十万根之多，当然不可能一根一根地去

数。你想用乘法来计算，可是头发不是成行成垄、整整齐齐地排好的。

一种切实可行的办法，是测量一下长着头发的皮肤面积有多大，再数一数 1 平方厘米的头皮上有多少根头发，这是可以数得清的。

当然啰，头上这 1 平方厘米和那 1 平方厘米的头发可能不一样多。我们可以仔细观察一下，选有代表性的 1 平方厘米。

数头发并不重要，数森林中的树有多少棵，可是一件重要的事。这两个问题十分相似，可以用相同的办法去解决。

但是，森林中的树长得有稀有密，我们很难走遍整个林区，来挑选一块最典型的地方。这怎么办呢？

最好的办法是任意挑选若干块地方，分别计算，然后求出平均数来。数学的研究说明，平均数总是更加接近实际。

研究这类问题的数学叫做数理统计。这是现代数学中一个非常活跃的分支。这里用的方法，叫做抽样方法。

我们再举一个例子，来说明数理统计的用途。

水库里养了鱼，每年要捕捉一些供应市场需要，爱吃鱼的人很多，最好多捕一些。捕得太多了，剩的就少，会影响鱼的繁殖，明年就捕不到多少鱼了。

为了掌握好捕鱼的数量，就需要知道水库里到底有多少鱼。这个问题看来和上面的问题很相像，其实要困难得多。因为鱼是游来游去的，而我们也不好选出 1 平方米水面，来数一数下面有多少鱼。

渔业人员想出了一个巧妙的办法，他们捕上 1000 条鱼，给每条鱼都做上记号，比如在尾巴上剪去一个小角，然后放回水中。

鱼儿到了水里就四散游开去。过了几天，这些鱼均匀地散布在水



库的各个地方了。

渔业人员再捕上 1000 条鱼，一看，其中有 20 条是做过记号的。

他们想，如果水库中共有 x 条鱼，其中有 1000 条被我们做过记号，那么，做过记号的鱼占全部 x 条鱼的几分之几呢？当然是 $\frac{1000}{x}$ 了。现在捕了 1000 条鱼，其中有 20 条做过记号，也就是说，在这 1000 条鱼中，有记号的鱼占 $\frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$ 。这个比和前面那个比的值，大体上应该是一样的。所以 $\frac{1000}{x} \approx \frac{1}{50}$ ，这样一来，就计算出 $x \approx 50000$ 了。

5 万条鱼，今年捕上三四万条，大概没问题吧！

这个问题，简直像一个简单的比例问题，其实不然。你也去那里捕 1000 条鱼，数数有几条是做过记号的，你敢保证也是 20 条吗？不敢吧！

实际情况必然是这样，每捕 1000 条鱼，其中做过记号的鱼的数目，不会是一成不变的。

比如说，你捕的 1000 条鱼中有 25 条是做过记号的，你列出的方程就会是 $\frac{25}{1000} \approx \frac{1000}{x}$ ，算出的结果 $x \approx 40000$ ，比刚才算的少了 1 万条。那么，水库里到底有多少条鱼呢？

数理统计可以帮助我们解决这个问题。它告诉我们，在后捕上来的 1000 条鱼中有多少条做过记号，这个数目虽然不是固定不变的，但它有一定的变化规律。一旦掌握了这个变化规律，我们不但可以用比例的办法来估计出水库中鱼的总数，而且可以掌握这个估计会有多大的误差。数理统计还给我们提供了一些更好的办法，来帮助我们尽可能减少这种误差。

这样，就在数理统计的基础上，发展出一整套调查动植物资源和研究许多其他问题的方法。



我们每一个人第一次接触数学，大概就是从数数开始的。也都经历了“一一对应的点数、寻找标准的计数数、根据需要的估计数、根据实际情况的策略数”这样的几个过程。那我们何时应用这些方法呢？是不是遇到数就可以用上面所说的每一种方法呢？答案当然是否定的。当我们遇到较小数量，需要精确结果时，我们通常选择一一对应的点数；当我们遇到较大数，不能点数时，我们就将大数拆分成很多小的、重复的部分，再估算出结果；对于像数鱼塘中鱼的数量问题，又产生了新的方法，也就是现代社会应用广泛的数理统计知识。

但不论是哪种数数的方式，殊途同归，目的都是为了解决人们生产生活中遇到的问题，体现人类智慧的力量。其实我们在课本中也学习过类似的问题。比如二年级时我们学习的乘法就应用了估测数数的方法。

例 1：园丁小区一共有 8 栋楼，每栋楼 4 个单元，每个单元大约 50 个住户，园丁小区一共有多少个住户？

解答方法：

总单元数： $4 \times 8 = 32$ （个），估计成整十数 30

每个单元住户数：大约 50 人

总住户数约为： $50 \times 30 = 1500$ （个）

我们在四年级的平均数中也可以看到类似的问题，通过理解平均数这个统计量来解决。

例 2：期末考试凯丽的语文、数和外语总成绩是 275 分，已知语文和数学的平均分是 95 分，那么她外语是多少分呢？



解答方法：

$$95 \times 2 = 190 \text{ (分)}, 275 - 190 = 85 \text{ (分)}$$

人类从最开始的单纯数实物，到后来通过估测解决大数的数法问题，直到今天，人们开始用特定的数数方法解决数理统计中的问题。解决了生产生活中很多问题，如本文中马教授呈现的数出水库中鱼的条数的策略，让我们豁然开朗，数原来可以这样数，数学原来可以这样用。将来的某一天，当我们的计算方式和需求发生变化时，是否还会演变出新的数数方式呢？

关于考试的话

考试成绩公布了，大家都很关心。考试得分多，固然好，得分少，也不必太难过。因为考试是对某一阶段教学的检查，检查学生学得好不好，也检查老师教得好不好。不好怎么办呢？学生得想法子改进学习方法，老师也得想法子改进教学方法。

还有个问题，考试能不能真正反映教学成绩，还得看出题的人的水平。

我们请出题的人出两份性质一样的题，让 50 个学生重复考两次。如果出题的人水平很高，出的题目确实能够考出学生的学习成绩来，那么，每个学生在两次考试中得的分数应该基本相同。





说基本相同，就是不能绝对化。考分有偶然的成分。一个考 90 分的学生，不一定比考 95 分的学生差；在另一次考试中，他们俩的考分很可能调个个儿。但是无论如何，如果两份题性质一样，每个学生的两个考分应该是接近的。

我们把两次考试的成绩作一个统计：

第二次 第一次	98~ 100	95~ 97	92~ 94	89~ 91	86~ 88	83~ 85	80~ 82	77~ 79	74~ 76	71~ 73	68~ 70	65~ 67	62~ 64
98~100	2	1											
95~97	1	4	2										
92~94	1	2	1										
89~91		1	1	1	1	1			1				
86~88				3	1	1	1				1		
83~85				1	1	2							
80~82					2	2							
77~79				↗						1			
74~76							1	1	1				
71~73							1			2	2		
68~70									1				
65~67								1		1			
62~64									1				2

当然啰，其中也有个别例外，比如有一个同学第一次考试分数在 86~88 之间，第二次却跑到 68~70 之间去了。这可以算作一种偶然情况。

这是 50 个学生在两次考试中的成绩统计表。两份考题的性质是一样的。箭头指出的“2”是两个学生在第一次考试中得了 80~82 分，在第二次考试中得了 86~88 分，这表示两次考分的关系是很密切的。用数理统计的方法，可以算出两次考分的相关系数高达 0.96。这好比说，出题人的水平是 96 分。