数学建模系列教材

应用数学专题讲座

电子科技大学应用数学系

·1996·

数学建模系列教材

应用数学专题讲座

电子科技大学应用数学系

·1996·

前　　言

本书是我校《数学建模》系列教材第二本。该书是在我校多次使用的《应用数学专题讲座》的基础上修改而成的。

数学模型涉及的领域很宽、内容丰富多彩，如何为大学本专科学生提供数学建模的必要知识并提高他的应用这些知识的能力，是我们编写这本教材的立足点。

本书以专题讲座的形式介绍了数学建模中常用数学分支的基本内容、方法及应用，各讲内容相对独立、难易适度。考虑到工科学生数学知识的特点、教学的可行性及知识的使用频度，还有很多相关内容未编入该教材。

本书只要求读者具备工科高等数学、工程数学的基本知识，可作为大学本专科数学模型课程的教材或教学参考书，也可作为数学建模竞赛的强化培训教材，以及供科技工作者和自学者参考。

本书各讲的执笔者是：傅英定（第一讲）；张先迪（第二、三讲）；钟守铭（第四讲）；徐全智（第五、六讲）；钟尔杰（第七讲）。全书由蒲和平、钟尔杰统稿。杨晋浩老师为本书的出版作了大量工作。

本书得到数学系领导的大力支持和许多教师的帮助，在此表示衷心感谢！

限于编者水平，难免有不妥之处，敬请批评指正。

编者

1996 年 4 月

目　　录

第一讲 最优化理论与方法

（线性规划部份）

线性规划是数学规划的一个重要分支，它在最优化理论与方法中历史比较悠久、理论比较成熟、方法比较完善、应用比较广泛。本章将介绍线性规划的数学模型、基本理论和常用的有效算法——单纯形法和修正单纯形法，考虑到学时和读者的对象，其中的一些理论性较强的定理和结论将不予证明，读者可参考相应的书籍。

§1.1 线性规划问题的数学模型

一、运输问题

例 1 要从甲城调出蔬菜 2000 吨，从乙城调出蔬菜 1100 吨，分别供应 A 地 1700 吨，B 地 1100 吨、C 地 200 吨、D 地 100 吨，已知每吨运费如下表：

供应单位 / 调出单位	A 地	B 地	C 地	D 地
甲城	21	25	7	15
乙城	51	51	37	15

（单位：元）

假定运费与运量成正比，在此情况下，采用不同调拨计划，运费就可能不同。怎样找一个运费最省的调拨计划？我们可以把这个问题抽象成数学形式表示出来。

作一个蔬菜调拨计划就是给出从每一个产地运到每一个销地的蔬菜的数量，可以用 x_{ij} 表示要找的数量，用 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ 分别表示从甲城调往 A、B、C、D 四地的蔬菜量；用 $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ 分别表示从乙城调往 A、B、C、D 四地的蔬菜量。

从甲、乙两城分别调往 A、B、C、D 四地的蔬菜的数量的总和应该分别等于 2000 吨和 1100 吨，所以这些 x_{ij} 应该满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \end{cases} \tag{1.1}$$

运到 A、B、C、D 四地的蔬菜的数量应该分别是 1700 吨、1100 吨、200 吨、100 吨，所以 x_{ij} 还应该满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=1700 \\ x_{12}+x_{22}=1100 \\ x_{13}+x_{23}=200 \\ x_{14}+x_{24}=100 \end{cases} \tag{1.2}$$

x_{ij}是运量，不能是负数，所以还应该满足：

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2;j=1,2,3,4) \tag{1.3}$$

除满足上述要求以外，还应该使运费最少，总的运费应该是所有的产地到销地的运量乘以运费之和，即

$$f = 21x_{11} + 25x_{12} + 7x_{13} + 15x_{14} + 51x_{21} + 51x_{22} + 37x_{23} + 15x_{24}$$

总之，我们要找的是 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3,4)$在满足(1.1)，(1.2)，(1.3)的条件下，使 f 达到最小。写成数学形式，即

$$\begin{cases} \min f = 21x_{11} + 25x_{12} + 7x_{13} + 15x_{14} + 51x_{21} + 51x_{22} + 37x_{23} + 15x_{24} \\ s.t.\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2000 \\ \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1100 \\ \quad x_{11} + x_{21} = 1700 \\ \quad x_{12} + x_{22} = 1100 \\ \quad x_{13} + x_{23} = 200 \\ \quad x_{14} + x_{24} = 100 \\ \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad i=1,2;j=1,2,3,4 \end{cases}$$

这里 s. t. 是 subject to 的缩写，意为"满足于"。s. t. 后面的式子称为约束条件。

一般运输问题可以表达如下：

设有若干地点(称为发点)$A_1, A_2, \cdots, A_m$，分别拥有某种物资 $a_1, a_2, \cdots a_m$。现在要把这些物资调运给其他若干个需要这种物资的地点(称为收点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$)，而这些地点的需要量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。已知从 A_i 运一个单位物资到 B_j 的运费为 c_{ij}。问应当如何分配这些物资，才能使运费达到最少(已知 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$)。

用 x_{ij}表示从 A_i 运到 B_j 的物资数量，则 x_{ij}应该满足下列约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,2,\cdots,,m \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{1.5}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n \tag{1.6}$$

(1.4)表示从 A_i 发出的物资总量是 a_i，(1.5)式表示在 B_j 处收到的物资总量是 b_j，(1.6)式表示运输的物资数量是非负的。

运输问题可归结为：求 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，满足(1.4)、(1.5)、(1.6)，并且使运输费用达到最小，即

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ s.t.\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\cdots,n \\ \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

二、合理下料问题

例 2 某车间有长度为 180cm 的钢管(数量充分多),今要将其截为三种不同长度,长度分别为 70cm 的管料 100 根,而 52cm、35cm 的管料分别不得少于 150 根,120 根,问应采取怎样的截法,才能完成任务,同时使剩下的余料最少?

所有可能的截法共有 8 种,列表如下:

截	法	一	二	三	四	五	六	七	八	需要量
长度	70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
	52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
	35	1	0	1	3	0	2	3	5	120
余	料	5	6	23	5	24	6	23	5	

挑选其中一种余料最少的截法,但不能完成任务。所以我们必须同时采取若干种截法,配合起来,在完成任务的条件下,使总的余料最少。

用 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$采用第 i 种截法的钢管数目,那么截出 70cm 的管料数目应为$(2x_1+x_2+x_3+x_4)$根,其总数应为 100,即

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$$

同理可得

$$2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geqslant 120$$

由题意可知:$x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,8)$

余料的总长度为

$$f = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$$

于是上述下料问题的数学模型为

$$\begin{cases} \min f = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8 \\ s.t.\ \ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150 \\ \qquad x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geqslant 120 \\ \qquad x_j \geqslant 0,(j = 1,2,\cdots,8) \end{cases}$$

三、活动性分析问题

例 3 某公司掌握了几种数量固定的资源(如原材料,劳动力和设备),合起来能生产若干不同产品中的几种或这些产品的某种组合,已知公司每生产一个单位的 j 种产品所能获得利润的数量。公司希望生产的产品组合能使其获得的总利润为最大。

对此问题可以作如下定义:

m=资源的种类数

n=产品的种类数

a_{ij}=生产一个单位的 j 种产品所需 i 种资源的数量

b_i=i 种资源的最大可用量

c_j=生产单位 j 种产品的利润数

x_j=j 种产品的产量(活动水平)

有时称 a_{ij} 为投入一产出系数或技术系数。

使用 i 种资源的总量可表示为线性函数

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad i = 1,2,\cdots,m$$

因为上述使用 i 种资源的总量必须小于或等于 i 种资源的最大可用量,所以对 i 种资源有下列线性不等式。

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i \quad i = 1,2,\cdots,m$$

由于 $x_j<0$ 无实际意义,所以我们要求所有 $x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$ 生产 x_j 单位的 j 种产品所获得的利润为 c_jx_j。现在要作一个能够充分利用现有资源的生产计划,使每种产品在不超过现有资源的条件下,总利润为最大,其数学模型为:

$$\begin{cases} \max f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t.\ \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ \qquad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \max f = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ s.t.\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \qquad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

四、选址问题

例 4 设有 n 个地区 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,在某一个计划期内,A_i 生产某原料 a_i 吨,同时需要用这种原料加工的某种产品 b_i 吨$(i=1,2,\cdots,n)$,已知 k 吨原料可制造 1 吨该产品。设这 n 个地区所产原料的总数恰好能生产各地所需该产品的总数,即 $\sum_{i=1}^{n} a_i = k\sum_{i=1}^{n} b_i$。另外已知在 A_i 设厂加工该产品的加工费为每吨 d_i 元。在 A_i 设厂生产该产品数最多为 e_i 吨,最少为 f_i 吨$(i=1,2,\cdots,n)$。从 A_i 运原料或产品到 $A_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 每吨运价为 c_{ij} 元。问应在何地设厂,生产多少该产品,才能既满足需要,又使生产费用(包括原料和产品运费、产品加工费)最少?

设 x_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的原料数(单位:吨)$(i,j=1,2,\cdots,n)$,其中 j=i 表示 A_i 留用数;y_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的成品数(单位:吨)$(i,j=1,2,\cdots,n)$,其中 j=i 时,表示 A_i 留用数;y_i 表示 A_i 设厂的年产成品数(单位:吨)$(i=1,2,\cdots,n)$。它们之间的关系如下表示:

	A_1	A_2	…	A_n	生产原料数	生产成品数	加工费
A_1	x_{11} c_{11} y_{11}	x_{12} c_{12} y_{12}	…	x_{12} c_{1n} y_{1n}	a_1	$f_1 \leqslant z_1 \leqslant e_1$	d_1

A_2	x_{21} c_{21} y_{21}	x_{22} c_{22} y_{22}	…	x_{2n} c_{2n} y_{2n}	a_1	$f_2 \leqslant z_2 \leqslant e_2$	d_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_n	x_{n1} c_{n1} y_{n1}	x_{n2} c_{n2} y_{n2}	…	x_{nn} c_{nn} y_{nn}	a_n	$f_n \leqslant z_n \leqslant e_n$	d_n
需成品数	b_1	b_2	…	b_n			
需原料数	kz_1	kz_2	…	kz_n			

由题得数学模型如下：

求一组变量 $x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$y_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$z_i(i=1,2,\cdots,n)$的值，使它满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

（从 A_i 运往各地原料总数以及 A_i 的留用数应等于 A_i 的原料产量）。

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = kz_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

（从各地运往 A_j 的原料总数以及 A_j 的留用数应等于在 A_j 设厂所需原料数）。

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = z_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

（由 A_i 运往各地的成品总数以及 A_i 的留用数应等于 A_i 的产品数）

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

（从各地运到 A_j 的成品数以及 A_j 的留用数应等于 A_j 所需成品数）

$$f_i \leqslant z_i \leqslant e_i$$

（在 A_i 生产的成品数必须在 f_i 至 e_i 之间）

$$x_{ij} \geqslant 0, y_{ij} \geqslant 0, z_i \geqslant 0$$

（调运原料数，调运成品数，生产成品数都不能为负）。

生产总费用为：

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij} + y_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} d_i z_i$$

其数学模型为：

$$
\begin{cases}
\min f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij} + y_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} d_i z_i \\
s.t.\ \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\
\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = kz_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\
\qquad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = z_j \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\
\qquad \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n) \\
\qquad f_i \leqslant z_i \leqslant e_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \\
\qquad x_{ij} \geqslant 0, y_{ij} \geqslant 0, z_i \geqslant 0
\end{cases}
$$

五、工作安排问题

例 5 设某工厂有甲、乙、丙、丁四台机床，生产 A、B、C、D、E、F 六种产品，假定每种产品都要经过两台机床加工，根据机床性能和以前生产情况可知，制造每一单位产品机床所需的工作时数，每台机床最大工作能力及每种产品的单价如下表：

	A	B	C	D	E	F	最大能力（小时）
甲	0. 01	0. 01	0. 01	0. 03	0. 03	0. 03	850
乙	0. 2			0. 05			700
丙		0. 02			0. 05		100
丁			0. 03			0. 08	900
单价（元）	0. 40	0. 28	0. 32	0. 72	0. 64	0. 60	

问在机床能力许可的条件下，每种产品生产多少才能使这个工厂的总产值最大？

设 $x_i(i=1,2,\cdots,6)$ 分别表示生产 A、B、C、D、E、F 六种产品的单位数目，则其数学模型为：

$$
\begin{cases}
\max f = 0.40x_1 + 0.28x_2 + 0.32x_3 + 0.72x_4 + 0.64x_5 + 0.60x_6 \\
s.t.\ \ 0.01x_1 + 0.01x_2 + 0.01x_3 + 0.03x_4 + 0.03x_5 + 0.03x_6 \leqslant 850 \\
\qquad 0.02x_1 + 0.05x_4 \leqslant 700 \\
\qquad 0.02x_2 + 0.05x_5 \leqslant 100 \\
\qquad 0.03x_3 + 0.08x_6 \leqslant 900 \\
\qquad x_i \geqslant 0, (i = 1,2,\cdots,6)
\end{cases}
$$

以上我们建立了几个常见的实际问题的数学模型，它反映了客观事物数量间的本质规律，是实际问题的抽象的数学形式。这些实际问题尽管各式各样，但它们的共同特点是，求变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值，使某个问题的目标 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 达到最大或最小。这常将 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 称为目标函数记为 $f(x)$ 或 f。由于这类问题的目标函数和表示约束条件的数学式子都是

线性式，所以我们把具有这种模型的问题称为线性规划问题。

由于实际问题中，目标函数可能取最大值，也可能取最小值，约束条件可能是等式也可能是不等式，这就给统一处理带来了困难。为此我们给出线性规划问题数学模型的标准形式：

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \qquad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

我们可以将一般的线性规划问题全部转化成标准形式，其方法如下：

1. 极大值问题极小化

对 $\operatorname{man} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，只要令 $g(x) = -f(x)$，则目标函数 $f(x)$ 的极大值问题就转化为求 $g(x)$ 的极小值。

2. 松驰变量

对“$\leqslant$”约束，可引入松驰变量使它变为等式约束，如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j \leqslant b_p$$

引入转变量 $x_{n+p} \geqslant 0$，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j + x_{np} = b_p$$

称 x_{n+p} 为松驰变量。

3. 剩余变量

对“$\geqslant$”约束，可引入剩余变量使它变为等式约束，如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{qj} x_j \geqslant b_q$$

引入转变量 $x_{n+q} \geqslant 0$，使

$$\sum_{j=1}^{n} a_{qj} x_j - x_{n+q} = b_g$$

称 x_{n+q} 为剩余变量

4. 自由变量

标准形式要求 $x_j \geqslant 0$，模型中如果出现 x_i 可任取值，则称 x_i 为自由变量，此时可作如下处理：

引入新变量 $x_i^+ \geqslant 0$，$x_i^- \geqslant 0$，令

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

这就消除了自由变量

例 6 将下面线性规划化为标准形

$$\begin{cases} \max(x_1 - 2x_2 + 3x_3) \\ s.t.\ \ 2x_1 - 7x_3 \leqslant 0 \\ \qquad 3x_1 + 2x_2 \geqslant 0 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 任意} \end{cases}$$

解 极大问题极小化：

$$\max(x_1 - 2x_2 + 3x_3) = \min(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

引入松弛变量 $x_4 \geqslant 0$，使

$$2x_1 - 7x_3 + x_4 = 0$$

引入剩余变量 $x_5 \geqslant 0$，使

$$3x_1 + 2x_2 - x_5 = 0$$

消除自由变量 x_3

$$\text{令 } x_3 = x_6 - x_7, x_6 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0$$

则原规划的标准形式为

$$\begin{cases} \min(-x_1 + 2x_2 - 3x_3) \\ s.t.\ \ 2x_1 - 7x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_6 - x_7 = 5 \\ \qquad x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

值得指出的是：标准形中还可要求 $b_i \geqslant 0$，$(i=1,2,\cdots,m)$ 因若某个 $b_i < 0$，则可在 b_i 所在等式两端同乘以 (-1) 即可。

为了书写及运算的简捷，线性规划的标准形还可以写与矩阵形式。

若 $c^T = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ $\quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

则线性规划的标准形式又可以写成矩阵形式：

$$\begin{cases} \min c^T x \\ s.t.\ \ Ax = b \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

若记 $P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$

则标准形式又可记为向量形式：

$$\begin{cases} \min c^T x \\ s.t.\ \ \sum_{j=1}^{n} x_j p_j = b \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

如例 6 的矩阵形式为：

$$c^T = (-1,2,0,0,0,3,-3)$$
$$b = (0,0,5)^T, x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)^T$$

则

$$\begin{cases} \min c^T x \\ s.t.\ \ Ax = b \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

§1.2 二维线性规划的图解法

对线性规划

$$\begin{cases} \min f(x) = c^T x \\ s.t.\ \ Ax = b \\ \qquad x \geqslant 0 \end{cases}$$

定义其可行集为 $R=\{x|Ax=b, x\geqslant 0\}$，其最优解即为 R 中使 f(x)取得最小值的点 x^*。

当 $x=(x_1,x_2)^T$ 时，可以用图解法来求此线性规划，这对于理解高维时一般线性规划的理论将是有益的，同时也可从二维的几何直观上看出许多一般结论。

例 1 用图解法求解

$$\begin{cases} \min f(x) = -x_1 - 2x_2 \\ s.t.\ \ -x_1 + 2x_2 \leqslant 4 \\ \qquad 3x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ \qquad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 先绘出可行集，因 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$ 可知，可行集在第一象限内；因 $-x+2x_2\leqslant 4$ 可知，可行集在以直线 $-x_1+2x_2=4$ 为分界线，且含原点的半平面内；而约束条件 $3x_1+2x_2\leqslant 12$ 表示包含坐标原点的、以直线 $3x_1+2x_2=12$ 为分界线的半平面。这两个半平面在第一象限的交集就是可行集，如图 2—1 阴影部分。

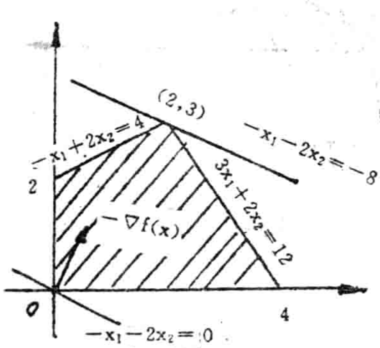

图 2—1

再绘出目标函数的等值线。当目标函数值为 g_0 时，其等值线为

$$-x_1 - 2x_2 = z_0$$

这是一条直线，当 z_0 取不同值时，可得到其它等值线。因具有相同的斜率，所以等值线是彼此平行的直线。例如当 $z_0=0$ 时得一通过坐标原点的等值线

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

然后确定目标函数的负梯度方向(即函数值下降最快的方向)：

$$-\nabla f(x) = (1,2,)^T$$

如图 2—1 箭头指的方向。

最后沿$(1,2)^T$ 方向，作目标函数值的等值线。由图可知，当目标函数值为−8 时，直线

$$-x_1-2x_2=-8$$

与可行集有唯一交点 $(2,3)^T$。若目标函数值继续下降，相应等值线与可行集将不再相交。故点 $x^*=(2,3)^T$ 为此线性规划的唯一解。

在例 1 中如果再加约束条件 $x_1+x_2\leqslant-1$，则可行集 $R=\phi$，此时线性规划显然无解。

例 2 解线性规划

$$\begin{cases}\min(2x_1+2x_2)\\ s.t.\ x_1-x_2\geqslant 1\\ \quad -x_1+2x_2\leqslant 0\\ \quad x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\end{cases}$$

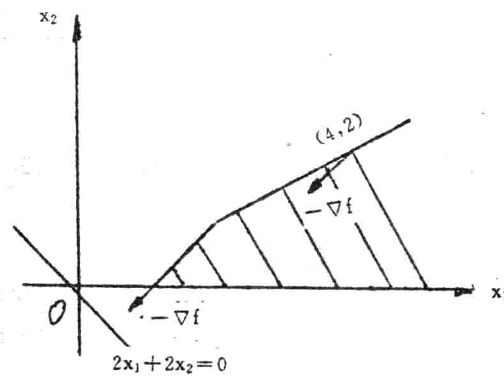

图 2—2

解 可行集如图 2—2 阴影部份

绘出过原点的等值线 $2x_1+2x_2=0$；求出目标函数的负梯度方向：

$$-\nabla f(x)=(-2,-2)^T;$$

沿 $(-2,-2)^T$ 的方向作目标函数的等值线，也即 $2x_1+2x_2=0$ 的平行线，易见 $x^*=(1,0)^T$ 是此规划的最优解

将例 2 的 min 改为 max，即 $\min(-2x_1-2x_2)$ 此目标函的下降方向与例 2 的相反，由图可知此线性规划没有最优解。

例 3 将例 1 的目标函数改为

$$f(x)=-3x_1-2x_2$$

而约束条件不变，则负梯度方向为

$$-\nabla f(x)=(3,2)^T$$

此时，$3x_1+2x_2=12$ 是目标函数的一等值线，由图 2—3 可见，点 $(2,3)$ 与 $(4,0)$ 之间的所有点都是该线性规划的最优解，此线性规划有无穷多个解。

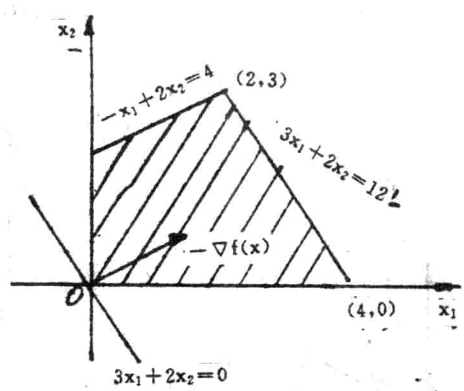

图 2—3

由以上几个例子可见：

(1) 若可行集 $R=\phi$，则线性规划无最优解；

(2) 若线性规划的最优解存在，则必可在 R 的某个"顶点"处取得。

(3) 若 R 的某两个顶点是最优解，则这两个顶点所联结的线段上任一点都是最优解。

§1.3 线性规划的基本概念及解的性质

考虑线性规划

$$\begin{cases}\min c^T x\\ s.t.\ Ax=b\\ \quad x\geqslant 0\end{cases}\tag{3-1}$$

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，设 $R(A)=m$，则 $m\leqslant n$，$x\in R^n$，$c\in R^n$，$b\in R^m$，用 P_j 表示 A 的第 j

列，则 Ax 可记为 $\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b$。

基：若 $B=(P_{j1},P_{j2},\cdots,P_{jm})$ 可逆，则称 B 为线性规划(3—1)的基。$P_{ji}(i=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量。x_{ji} 称为基变量。其余变量称为非基变量。

基本解：设 $B=(P_{j1},P_{j2},\cdots,P_{jm})$ 是(3—1)的一个基，相应的基变量为 $x_B=(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jm})^T$，则方程组 $Bx_B=b$ 有唯一解：

$$x_B = B^{-1}b = (x_{j1}^0,x_{j2}^0,\cdots,x_{jm}^0)^T$$

令非基变量全部为 0，得 $Ax=b$ 的一组解：

$$x_{j1}^0,x_{j2}^0,\cdots,x_{jm}^0,0,0,\cdots 0$$

称此解为(3—1)的基本解。

若 $B=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$，$N=(P_{m+1},P_{m+2},\cdots,P_n)$，则 $A=(B,N)$，$x=\binom{x_B}{x_N}$，则 $Ax=b$ 变为：

$$(B,N)\binom{x_B}{x_N} = Bx_B + Nx_N = b,$$

令

$$x = \binom{x_B}{0} = \binom{B^{-1}b}{0}, \text{则}$$

$$Ax = (B,N)\binom{B^{-1}b}{0} = b$$

若令 $B^{-1}b=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)^T$，则

$$x = (x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)$$

是线性规划(3—1)的一个基本解。

可行解：满足 $Ax=b$，$x\geqslant 0$ 的向量称为(3—1)的可行解。

基本可行解：若 x 即是可行解又是基本解，称 x 为(3—1)的基本可行解。此时的 B 称为可行基。

因 A 为 $m\times n$ 矩阵，所以(3—1)的不同基最多有 C_n^m 个，可以证明有(3—1)的基本可行解最多有 C_n^m 个。即基本可行解的个数是有限的。

最优解：使 c^Tx 取得最小值的可行解 x^*，称为(3—1)的最优解。

例 1 求约束

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

的所有基本可行解。

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{即,}$$

$$p_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (P_1,P_2), B_2 = (P_2,P_3), B_3 = (P_1,P_3)$$

都是线性规划的基

(1) 取 B_1 为基

$$x_{B_1} = B_1^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

由于 $x_1=-2<0$，故 x 不是可行解，故不是基本可行解。

(2) 取 B_2 为基，则 x_2,x_3 为基变量。

$$x_{B_2} = B_2^{-1}b = (1,1)^T, x^2 = (0,1,1)^T$$

(3) 取 B_3 为基，则 x_1,x_3 为基变量。

$$x_{B_3} = B_3^{-1}b = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})^T$$

$$x^3 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3})^T$$

x^2,x^3 都是基本可行解。

例 2 求约束

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$$

的所有基本可行解。

解
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(1) 基 $B_1=(P_1,P_2)$，令 $x_3=0$ 即 x_3 为非基变量，由

$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1+2x_2=4 \end{cases}$ 解出 $x_{B_1}=(0,2)^T$，得 $x^1=(0,2,0)^T$ 是一个退化的基本可行解

(2) 基 $B_2=(P_2,P_3)$，则 x_1 为非基变量，取 $x_1=0$，由 $\begin{cases} x_2+x_3=2 \\ 2x_2+4x_3=4 \end{cases}$ 得 $x_{B_2}=(2,0)^T$，$x^2=(0,2,0)^T$ 这也是退化的基本可行解。

(3) 基 $B_3=(P_1,P_3)$，则 $x_2=0$ 是非基变量，由

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 ++ 4x_3 = 4 \end{cases} \quad 得 \quad x_{B_3} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})^T, x^3 = (\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$$

这是一个非退化的基本可行解。

为研究线性规划解的性质下面引入凸集、极点的定义。

定义 1 设 $D\subset R^n$，若对 $\forall\ x^1,x^2\in D$，及 $\alpha\in[0,1]$，都有 $\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\in D$，则称 D 为凸集，又可等价为：若令 $\alpha_1=\alpha,\alpha_2=1-\alpha$，则有 $\alpha_1\geqslant 0,\alpha_2\geqslant 0$，且 $\alpha_1+\alpha_2=1$，于是都有 $\alpha_1x^1+\alpha_2x^2\in D$，D 为凸集。规定空集 ϕ 与单元集也是凸集。从几何直观来讲，若集合 D 中任意两点连线仍属于 D，则 D 为凸集。例如三角形、圆、椭圆、椭球、凸多边形，第一象限、第一卦限等都是凸集。

定义 2 设 $x^1,x^2,\cdots,x^m\in R^n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为一组非负实数，且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=1$，则

$$\alpha_1x^1 + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_mx^m = \sum_{i=1}^{m}\alpha_ix^i$$