数 学 地 质

华东石油学院勘探系

1977年9月

目　录

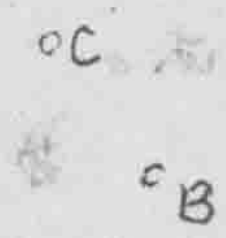
预备知识

第一章　排列与组合

第一节　排列

一、全排列

例1：三个钻井队到三个井位上分别钻井，共有多少种配置的方法？



解：设有A、B、C三个井位，甲、乙、丙三个钻井队，到A井位上钻井的队，可以在甲、乙、丙三个井队中任选一个，有3种方法；A井位上的队选定后，到B井位上钻井的队，只能在剩下的两个队中选一个，有二种方法；A、B两个井位上的队选定后，最后只剩下一个队，到C井位上去，只有一种方法。

故把甲、乙、丙三个井队到A、B、C三个井位上去钻井，共有 $3\times2\times1=6$ 种不同的配置方法

例2，用四个数字1、2、3、4可以组成多少个不同的四位数？

解：这个问题相当于说，把四个数字分别放在十位、百位十位和个位上，有几种不同的放法？

十位上可以从从1、2、3、4中任选一个，有4种方法；百位上在其余三个数字中任选一个，有3种方法；十位上则在剩下的两数字中选一个，有2种方法；最后只剩下一个数字放在个位上，只有一种方法，于是，共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种方法，即是说可以组成24个不同的四位数。

我们把所考察的对象，如井队，数字等叫做元素，上面的问题，就是把若干个不同的元素按照一定的顺序排成一列，要求一共有几种不同的排法。

定义：把n个不同的元素按照一定的顺序排成一列，叫做

n个不同元素的全排列。

所有不同的全排列的种数，用P_n表示，于是例1中的算式可以写成$P_3=6$，例2中的算式可以写成$P_4=24$

我们来研究计算P_n的公式，这里n是正整数，可以和前面的例同样考虑。

第一个位置可以从n个元素中任取一个来排，共有n种方法。

第二个位置只能在剩下的n－1个元素中任取一个来排，共有n－1种方法。

第三个位置只能在剩下的n－2个元素中任取一个来排共有n－2种方法。

这样继续下去，直到最后一个位置，也就是第n个位置，只剩下一个元素，只有一种方法。

于是，就得到公式：

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

右边是前n个自然数的连乘积，用符号n！表示，读作n的阶乘、即

$$P_n=n!$$

例3、计算 P_5和P_7

解：$P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

$P_7=7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$

二、选排列

例1、飞行在北京——上海——广州航线的民航飞机，要准备多少种不同的飞机票？

解：每一站到另一个站，就要一种飞机票，例如北京到上海和上海到北京的票不同，其他站也一样，就是每一个起点站和一个终点站要一种票。

三个站中任一个站都可以作起点站，终点站在其余两个站中任选一个，就要准备一种票，于是，共需要 $3\times2=6$ 种不同的飞机票。

这和全排列不同，它是从三个不同的元素中，每次取两个不同的元素按照不同的顺序排列的问题，要求一共有几种不同的排法。

定义：从 m 个不同的元素中，每次取出 n（$n<m$）个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同元素的选排列。

所有不同的选排列的种数，用符号 A_m^n 表示，如例1，可以写成 $A_3^2=6$。

选排列和全排列，相同的是都要按照一定的顺序排列，不同的是选排列每次只取部分元素。在选排列中，元素相同顺序不同，或元素不同顺序也不同的排列，都是不同的排列；只有元素相同顺序也相同的排列，才是同一个排列。例1中，北京到上海和上海到北京就是两种不同的排列。

下面来研究计算 A_m^n 的公式，这里 m、n 是正整数，并且 $m>n$，可以和全排列同样考虑。

第一个位置上可以从 m 个元素中任取一个来排，有 m 种方法。

第二个位置上在剩下的 $m-1$ 个元素中任取一个来排，有 $m-1$ 种方法。

这样继续下去，到第 n 个位置上，经过前面 $n-1$ 次后，还剩下 $m-(n-1)$ 个元素，从中任取一个元素来排，有 $m-(n-1)$ 即 $m-n+1$ 种方法。

到此已经选够 n 个元素，所以不再往下选取了。于是，我们得到公式：

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

例2 (1) $A_7^4 = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$

(2) $A_{10}^3 = 10\cdot9\cdot8 = 720$

(3) $A_{100}^2 = 100\cdot99 = 9900$

(4) $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$

例3、用五面不同颜色的旗，按不同的次序挂在旗杆上表示信号，可以单用一面，或二面，三面并用，一共可以得到几种不同的信号。

解：用一面旗做信号有 A_5^1 种，用二面旗做信号有 A_5^2 种，用三面旗做信号有 A_5^3 种，故信号总数是

$$A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 = 5 + 20 + 60 = 85$$

答：一共可以得到85种不同的信号

第二节 组合

我们来看下面的问题

例1、飞行在北京——上海——广州航空线上的民航飞机，有几种不同的飞机票价？

解：这个问题和上节计算飞机票的种数不同，飞机票的种数和起点站，终点站有关，从北京到上海和从上海到北京，应当准备两种不同的飞机票；但飞机票价只和起点站与终点站的距离有关，从北京到上海和从上海到北京，飞机票价是一样的，因此，票价的种数只有票的种数的一半，即 $\frac{A_3^2}{2} = 3$ 种不同的票价。

这个问题和排列问题不同，它是从三个不同的元素中，每次取出两个并成一组，而不管顺序，要求一共有多少种方法。

定义：从m个不同的元素中，每次取出n（$n \leq m$）个不同

的元素，不管顺序并成一组，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同元素的组合。

所有不同的组合的种数，用符号 C_m^n 来表示。例1中就是求组合数，可以写成 $C_3^2=3$

计标组合数 C_m^n 的公式，可以从排列数 A_m^n 的公式推导出来。

我们知道，排列和组合的区别，在于排列有顺序的要求，而组合没有顺序的要求，例如，从 a、b、c 三个不同的元素中每次取两个的排列有：

ab，ba，ac，ca，bc，cb

其中 ab 和 ba，ac 和 ca，bc 和 cb，虽然所含的元素相同，但顺序不同，标作不同的排列。但是从 a、b、c 三个不同的元素中每次取两个的组合，ab 和 ba，ac 和 ca、bc 和 cb，都只能标作一种，所以只有3种：

ab，bc，ca

可以看出，排列要两个步骤：第一步，从三个不同的元素中，每次取出两个，不管顺序并成一组，这就是组合种数 C_3^2；第二步，把每一种组合里的两个元素作全排列，共有 P_2 种，于是，得：

$$A_3^2=C_3^2\cdot P_2$$

概括地说，就是

$$A_m^n=C_m^n\cdot P_n$$

故得到计标组合种数的公式：

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

例2、计标组合数

(1) $C_{15}^{2}=\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}=105$

(2) $C_{100}^{3}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}=161700$

例3、1961年在北京举行的第26届世界乒乓球锦标赛，参加女子团体赛的有20个代表队.

(1)、采用单循环制，一共要比赛多少场？

(2)、比赛时把所有的队分成三组，第一组7队，第二组6队，第三组7队。三组各采用单循环制，决定分组第一名，再由三组的第一名，仍采用单循环制，决定世界冠军，这样一共要比赛多少场？

解：(1) $C_{20}^{2}=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}=190$

答：一共要比赛190场

(2) 第一、三组各比赛 C_7^2 场，第二组比赛 C_6^2 场，冠军赛的比赛是 C_3^2 场。

$$2C_7^2+C_6^2+C_3^2=2\cdot\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=60$$

答：一共要比赛60场.

第二章　矩阵与线性方程组的解法

第一节　矩阵及其运算

一张地震记录，如果我们每隔0.1秒取一个数据，则5秒钟之内每一道可得50个数据，24道记录共得1200个数据，为了便于数据处理，我们可以把这些数据有规则地排列起来，每一道数据排成一行，每一行中按时间先后排50个数据，这样就得到一个长方形的阵列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,50} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,50} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{24\,1} & a_{24\,2} & & a_{24\,50} \end{bmatrix},$$

其中a_{ij}表示第i行第j列的数据，这种由数排列的阵行就叫做矩阵，上面这个矩阵共有24行50列（我们规定横的叫行，竖的叫列），我们可以用$A_{24\ 50}$表示它，行数和列数相等的矩阵，有时也叫做方阵。

矩阵的写法通常象上面的例子那样用一对方括弧括起来，有时也可简写成(a_{ij})。

矩阵中的数，我们称为矩阵的元素，可以是实数，也可以是复数，如果不特别声明的话，一般总假定是复数，这样的矩阵就叫做复数域上的矩阵。

矩阵A和B如果其行数和列数分别相等，并且对应的元素也彼此相同，则称矩阵A和B相等，记作A＝B。有了矩阵相等的概念之后，我们就可以讨论矩阵的运算了。

1、加法

若矩阵A和B的行数和列数分别相等，则可以相加，其结果用A+B表示，称为A与B的和，矩阵A+B的元素等于矩阵A与B的对应元素之和。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

根据加法的定义容易证明

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

所有元素均为零的矩阵称为零矩阵，记作0，显然

$$0+A=A$$

若矩阵A用(a_{ij})表示，则我们把矩阵$(-a_{ij})$记作$-A$，显然

$$A+(-A)=0$$

以后，我们就把$A+(-B)$记作$A-B$。

2. 数乘

一个数可以同一个矩阵相乘，我们规定数a与矩阵A相乘得到的矩阵，就是把A中每个元素都乘以a后得到的矩阵。

例

$$5\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$$

根据数乘的定义容易得到以下性质

1) $1\cdot A=A$,

2) $0\cdot A=0$

3) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A.$

4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

5) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B.$

、乘法

若矩阵A为n行s列，矩阵B为s行m列（即A的列数等于B的行数），则矩阵A与B可以相乘，其乘积记作AB，它是一个n行m列的矩阵，其第i行第j列的元素等于A的第i行各元素与B的第j列各元素依次两两相乘所得乘积之和

换句话说，若

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ns} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & & b_{sm} \end{bmatrix},$$

则

$$AB=C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \qquad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$$

例

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 3 & 24 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}.$$

由矩阵乘法的定义可知，并不是任何两个矩阵都可以相乘的，两个矩阵相乘时，第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数

矩阵乘法不满足交换律，即AB不一定等于BA。

例

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix},$$

而

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

因此，谈到矩阵的乘法时，必须注意到矩阵相乘的次序

两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵，例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故由 $AB = 0$ 不能推出 $A = 0$ 或 $B = 0$，同样，由 $AC = BC$ 不能推出 $A = B$

矩阵乘法有以下性质[1]：

1) $$(AB)C = A(BC),$$

即乘法满足结合律

2) $$(A+B)C = AC + BC,$$
$$C(A+B) = CA + CB,$$

即乘法与加法满足分配律

3) $$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

读者不难自己证明这些性质。

4、矩阵的行列式

一个二行二列矩阵（也称二阶方阵）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

它的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

这是大家所熟悉的，那么，高阶行列式怎样计算呢？我们可以把它化为二阶行列式来计算。一般的n阶行列式可以化为$(n-1)$阶行列式计算．令

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把n阶行列式划掉第i行和第j列后，剩下的$(n-1)$阶行列式称为原行列式中元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为原行列式中元素a_{ij}的代数余子式，所谓n阶行列式的值就等于某一行或某一列的元素分别乘上对应的代数余子式的和，即

$$d=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad\left(\text{或 } d=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\right).$$

可以证明，挑选那一行（或列）来进行计算，结果都是相同的（证明从略）．这样，计算n阶行列式，最后都可归结为计算二阶行列式．

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-8\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=-3\times(-3)-(-3)+2(-1)-8\times 2+2-(-1)$$

$$=-3.$$

以后，我们把方阵 A 的行列式记作 $|A|$。

矩阵的行列式有以下性质：

1) 若 A 和 B 是 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A||B|$$

即矩阵乘积的行列式等于其行列式的乘积，这个性质我们在这里不证明了。

由此性质可推得

$$|A_1A_2\cdots A_m| = |A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

以及

$$|A^n| = |A|^n.$$

2) 若 A 为 n 阶方阵，α 为任一复数，则

$$|\alpha A| = \alpha^n|A|$$

这个性质不难证明，我们首先证明行列式一行的公因子可以提出来，令

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{K=1}^{n} \alpha a_{1K}A_{1K} = \alpha\sum_{K=1}^{n} a_{1K}A_{1K} = \alpha d$$

因此对 $|\alpha A|$ 连续提出 n 次公因子 α，就得到

$$|\alpha A| = \alpha^n|A|$$

附　录

我们先证明行列式有如下性质：

若行列式中有两行相等，则此行列式等于零，用数学归纳法证，对二阶行列式，这个结论是显然的。

若 n 阶行列式具有这个性质，我们要证明 $n+1$ 阶行列式也具有这个性质。

设 $n+1$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的第 i 行与第 j 行相等，则

$$|A|=\sum_{K=1}^{n+1} a_{S}A_{SK} \quad (S\neq i,j),$$

其中 A_{SK} 是 n 阶行列式并且有两行相等，因此，根据假设应等于零，故

$$|A|=\sum_{K=1}^{n+1} a_{SK}A_{SK}=0$$

所以，行列式的这个性质对任意阶数都成立。

现在，我们来证明：

$$\sum_{K=1}^{n} a_{iK}A_{jK}=0 \qquad (i\neq j)$$

令

$$A=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

因A的第 i 行与第 j 行相等，故根据行列式的上述性质有

$$|A| = 0$$

但将第 j 行元素乘以对应的代数余子式并求和，就得到

$$|A| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

第二节 逆矩阵

1、逆矩阵的定义

对角线元素均为1，其余元素均为零的方阵称为单位矩阵，用E或I表示

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法，容易证明：对于任意 n 阶方阵A及 n 阶单位矩阵E，都得到

$$AE = EA = A$$

若 $AB = BA = E$ 则称B为A的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$，也可以称A为B的逆矩阵，记作 $A = B^{-1}$。

若 A^{-1} 存在，则称矩阵A是可逆的。

由于

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1,$$

故

$$|A| \neq 0, \quad |A^{-1}| \neq 0, \quad 且 |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$