锻　压
系统动力学

王运赣
王紫薇　编著

华中理工大学锻压教研室

一九八八年六月

第四章　系统数学模型的建立

建立系统数学模型的方法可分为理论分析法与实验法两大类。用理论分析法建模时，根据各变量所遵循的物理、化学定律，运用数学手段直接列写出如上一章介绍的某种模型。这种方法概念清晰、逻辑推理严密，但对于机理比较复杂或不够清楚的系统通常难以建立准确、实用的模型。用实验法建模时，通常需对研究系统施加一种激励信号，同时记录系统的输出响应，并对此进行加工处理，从而得到系统的数学模型。有时也可不对系统施加专门的激励信号，仅利用系统正常运行时记录到的信息进行加工，就能得到系统的模型。实验法能解决复杂系统的建模问题，可以得到更精确、更实用的数学模型。

考虑到在力学、电学、机械学、流体力学等学科中，已经介绍过各自有关的理论建模法，因此不再在本书中重复。本章仅论述新近发展的、可以解决涉及多种能量范畴的复杂系统建模的键合图法，以及实验建模的一个新分支——系统辨识。

§4—1　键合图的基本概念

键合图从功率（能量）的观点来反映系统中信息的流向及相互关系，因此，又称为功率键合图、功率流图，简称键图。

一、通口与广义变量

系统可看作由多个子系统（或元件）组成，它们之间存在着功率的传递。其中相互连接处即为功率流通的必经之道，并称之为通口。

在各个通口上存在着不同的变量。例如在电动机驱动油泵的系统中（图4－1），存在两个2—通口元件—电动机与泵。其中电动机的左通口为输入电能的通口，有变量电压 e 与电流 i；电动机

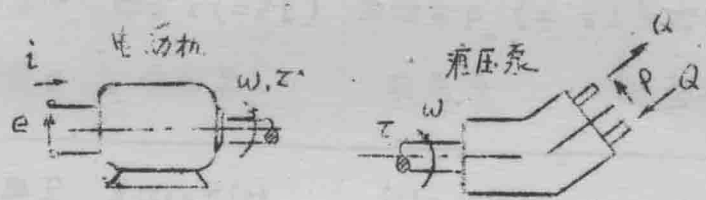


图4－1　　电动机驱动油泵系统

的右通口为其输出机械能的通口，有变量转矩 τ 与角速度 ω。泵的左通口为其输入机械能的通口，也有变量 τ 与 ω；泵的右通口为其输出液压能的通口，有变量压力 P 与流量 Q。为了统一处理、分析不同能量范畴的变量，在键合图中定义了4种广义变量。

1、势变量 $e(t)$ 和流变量 $f(t)$

这两个变量一般是时间的函数，且其乘积等于流入或流出通口的瞬时功率，即

$$P(t)=e(t)\cdot f(t) \qquad (4-1)$$

因此，$e(t)$与$f(t)$又统称为功率变量。

表4—1列出了不同能量范畴、不同运动形式中相应的势变量和流变量。

表4—1　广义变量与对应变量

广义变量 \ 对应变量	机械平动	机械转动	液压	电
势 e	力 F	转矩 τ	压力 P	电压 e
流 f	速度 V	角速度 ω	流量 Q	电流 i
动量 P	动量 P(=Ft)	角动量 p_τ (= t)	压力动量 P_p	磁通链变量 λ
变位 q	位移 X	转角 θ	体积 V	电荷 q
功率 P	$F(t)\cdot V(t)$	$(t)\cdot\omega(t)$	$p(t)\cdot Q(t)$	$e(t)\cdot i(t)$
能量 E	$\int^{x} F\,dX$，$\int^{p} V\,dp$	$\int^{\theta}\tau\,d\theta$，$\int^{p}\omega\,dp_\tau$	$\int^{v} p\,dv$，$\int^{P} Q\,dP_p$	$\int^{q} e\,dq$，$\int^{\lambda} i\,d\lambda$

2、动量变量$p(t)$和变位变量$q(t)$。

定义动量变量$p(t)$为势变量$e(t)$的时间积分，即

$$p(t)=\int^{t} e(t)\,dt=p_0+\int_{t_0}^{t} e(t)\,dt \qquad (4-2)$$

式中　p_0—t_0时的初始动量。

定义变位变量$q(x)$为流变量$f(t)$的时间积分，即

$$q(t)=\int^{t} f(t)\,dt=q_0+\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \qquad (4-3)$$

式中　q_0—t_0时的初始变位。

因为，流入或流出一个端口的能量E(t)是功率$p(t)$的时间积分，即

$$E(t)=\int^{t} p(t)\,dt=\int^{t} e(t)\cdot f(t)\,dt \qquad (4-4)$$

将式（4—3）与（4—2）代入上式可得

$$E(t)=\int^{t} e(t)\cdot f(t)dt=\int^{t} e(t)\cdot dq(t)$$

或 $$=\int^{t} f(t)\cdot e(t)dt=\int^{t} f(t)\cdot dp(t) \qquad (4-5)$$

若将上式中的自变量 t 分别换成 q 与 p，则有

$$E(q)=\int^{q} e(q)dq \qquad (4-5a)$$

或 $$E(p)=\int^{p} f(p)dp \qquad (4-5б)$$

因此，统称 $p(t)$ 与 $q(t)$ 为能量变量。表4—1列出了不同能量范畴、不同运动形式中相应的动量变量与变位变量。其中 p_p 和λ是根据广义变量的定义所得到的。

图4—2表达了功率变量 $e(t)$、$f(t)$ 与能量变量 $p(t)$、$q(t)$ 之间的关系。

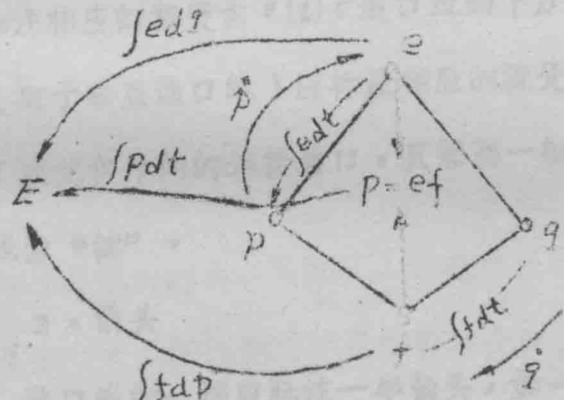
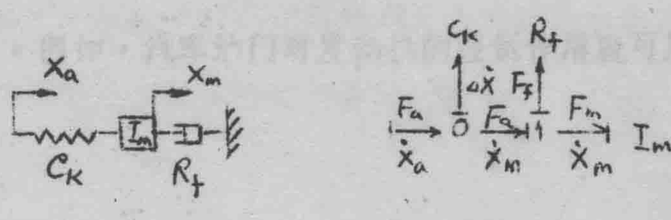


图4—2　功率变量·能量变量之间的关系

二、键合图的约定画法规则

图4－3 b 是图4－3 a 所示系统的键合图例。从此例可以看出，



(a)　　　　　　　　　　　　(b)

图4－3　质量—弹簧—阻尼系统及其键合图

键合图有如下基本组成部分：

1、通口线

它是一段水平线或垂线，对应每一通口都有一条通口线。

通口线的上方（对于水平通口线）或左方（对于垂直通口线）应标注相应的势变量 $e(t)$；通口线的下方（对于水平通口线）或右方（对于垂直通口线）应标注相应的流变量 $f(t)$。两个相连的子系统（或元件）间的连接通口，只需画一根通口线，并且此时称该通口线为“键”。

2、箭头

通口线的一端应标注一半箭头，如⇀，它表示势和流变量两者正好都是正值时的功率流动方向。（据此也可由箭头方向确定变量的正、负符号：若变量的方向与箭头方向相同，则变量为正值；反则为负值）。

在通口线的一端也可加注全箭头，如→，它表示控制关系，此

时通口线的两端之间只有信号（ e 或 f ）的传递，而没有（或仅有很小的）功率作用。例如，汽车油门对发动机的控制作用就可用全箭头表示。

3、因果线

因果线是通口线一端与其相垂直的短线，它表明势信号 $e(t)$所指的方向。图4－4为一泵一阀系统的键合图例，因为系统中的势 e（＝油压 p ）是由泵A指向阀B（即 $p_A > p_B$），所以因果线应画在通口线的右端（靠近B处）。同时据此也可判断，系统的流 f

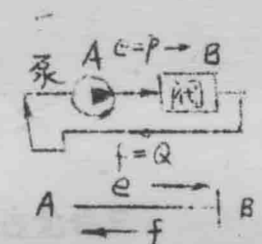


图4－4　　泵一阀系统键合图

（＝流量Q）必然由阀B流回泵A。这说明，通口线上没有因果线的一端就是流信号 $f(t)$的指向，也即势和流变量中一个是输入时，则另一个必为输出。

4、通口元件符号

在键合图上，用字母表示参与作用的元件类型，例如阻性元件R、容性元件C、惯性元件I、源元件 S_e 或 S_f、变换器TF与调制变换器MTF、回转器GY与调制回转器MGY。

5、通口结符号

在键合图上，用数字表示子系统或元件间的连接关系，例如“0”代表共势关系，“1”代表共流关系。

三、基本通口元件

基本通口元件有基本1—通口元件和基本2—通口元件两种。

1、基本1—通口元件

此种元件只涉及一个单独的功率通口，并分为耗散功率的阻性元件、贮存能量的容性元件与惯性元件，以及提供功率的源元件等种形式。

(1) 阻性元件R

其键合图为

$\xrightarrow[f]{e}$R，表明功率流进元件R；

或 $\xleftarrow[f]{e}$R，表明功率自元件R流出，即此种阻性元件既向外提供功率，本身又消耗功率，如发电机。

表4—2列出了常见的阻性元件$\xrightarrow[f]{e}$R的类型及关系式。其中R（包括b、c）统称为阻率，$\frac{1}{R}$（包括$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$）统称为导率。由此表可见，阻性关系式描述势e与流f的关系。

(2) 容性元件C

容性元件可贮存能量（位能）和释放能量，但均无能量损耗，

其键合图为

$$\xrightarrow[f=\dot{q}]{e} \mathrm{C}$$

表 4－2　阻性元件 $\frac{e}{f}\mathrm{R}$

		一般关系式	可能的线性关系式
广义变量		$e=\phi_R(f)$ 或 $f=\phi_R^{-1}(e)$，为静态关系式，即式中不含时间 t 及其微分、积分	$e=Rf$ 或 $f=\frac{1}{R}e=Ge$
对应变量	机械平移（如直线阻尼器）	$F=\phi_R(V)$ 或 $V=\phi_R^{-1}(F)$	$F=bV$（b—粘性阻尼系数）
	机械转动（如旋转阻尼器）	$\tau=\phi_R(\omega)$ 或 $\omega=\phi_R^{-1}(\tau)$	$\tau=C\omega$（C—粘性阻尼系数）
	液压（如节流器、管道阻尼）	$P=\phi_R(Q)$ 或 $Q=\phi_R^{-1}(P)$	$P=RQ$（R—液阻）
	电（如电阻器）	$e=\phi_R(i)$ 或 $i=\phi_R^{-1}(e)$	$e=Ri$（R—电阻）或 $i=\frac{1}{R}e=Ge$（G—电导）

容性元件贮存的能量可按式（4－5 a）计算，其常见的类型及关系式见表4－3。其中C统称为容度。由此表可见，容性关系式描述势e与变位q的关系。

⑶ 惯性元件I

惯性元件可贮存能量（动能）和释放能量，亦无能量损耗，其键合图为

表4－3　容性元件 $\xrightarrow[f=\dot{q}]{e}$ C

		一般关系式	可能的线性关系式
广义变量		$q=\phi_c(e)$ 或 $e=\phi_c^{-1}(q)$，为静态关系式	$q=ce$ 或 $e=\dfrac{q}{c}$
对应变量	机械平移（如直线弹簧）	$X=\phi_c(F)$ 或 $F=\phi_c^{-1}(X)$	$X=CF$（C—刚度）或$F=kX$（k—弹性系数或柔度）
	机械转动（如扭转弹簧、扭力棒）	$\theta=\phi_c(\tau)$ 或 $\tau=\phi_c^{-1}(\theta)$	$\theta=C$ 或 $\tau=k\theta$
	梁的弹性变形	$f=\phi_c(F)$（f—挠度）	$f=\dfrac{L^3}{3EJ}F$（L—悬臂长度，E—弹性模数，J—惯性矩）
	液压（如水箱）	$V=\phi_c(p)$ 或 $p=\phi_c^{-1}(V)$	$V=CP=\dfrac{S}{\gamma}p$（S—水箱截面积，γ—液体比重）
	电（如电容器）	$q=\phi_c(e)$ 或 $e=\phi_c^{-1}(q)$	$q=ce$ 或 $e=\dfrac{q}{c}$（C—电容）

$\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}$ I

惯性元件贮存的能量可按式（4－5 b）计算，其常见的类型及关系式见表4－4。由此表可见，惯性关系式描述动量 p 与流 f 的关系。

表4－4　惯性元件 $\xrightarrow[f]{e=\dot{p}}$ I

		一般关系式	可能的线性关系式
广义变量		$p=\varnothing_{I}(f)$ 或 $f=\varnothing_{I}^{-1}(p)$ 为静态关系式	$P=If$ 或 $f=\dfrac{P}{I}$
对应变量	机械平移（如直线惯性运动）	$p=\varnothing_{I}(V)$ 或 $V=\varnothing_{I}^{-1}(p)$	$P=mV$ 或 $V=\dfrac{P}{m}$　（m—质量）
	机械转动（如回转惯性运动）	$p_{\tau}=\varnothing_{I}(\omega)$ 或 $\omega=\varnothing_{I}^{-1}(p_{\tau})$	$P_{\tau}=J\omega$ 或 $\omega=\dfrac{P_{\tau}}{J}$　（J—转动惯量）
	液　压（如管道中液体流动）	$p_{p}=\varnothing_{I}(Q)$ 或 $Q=\varnothing_{I}^{-1}(p_{p})$	$p_{p}=IQ=\dfrac{\rho L}{S}Q$ （ρ—液体密度，S—管道截面积，L—管道长度）
	电（如电感器）	$\lambda=\varnothing_{I}(i)$ 或 $i=\varnothing_{I}^{-1}(\lambda)$	$\lambda=Li$ 或 $i=\dfrac{\lambda}{L}$　（L—电感）

上述R、C、L三种元件与广义变量之间的关系，可以归纳成图4－5

图4—5　R、C、L与广义变量间的关系

(4) 源元件S_e与S_f

其中S_e称为势源，它是给定势e、流f任意的源（或说e不受f的影响的源）。S_f称为流源，它是给定流f、势e任意的源（或说f不受e影响的源）。S_e和S_f都有恒定或时变两种。

表4—5列出了常见源元件的键合图和定义关系式。

表4—5　常见源元件的键合图和定义关系式

		键合图例	定义关系式
广义变量		$S_e \rightharpoondown\!\mid$	$e(t)$给定，$f(t)$任意一势源，且功率、势均流至与源相连的子系统
		$S_f \mid\!\rightharpoondown$	$f(t)$给定，$e(t)$任意一流源，且功率、流均流至与源相连的子系统
对应变量	机械平移	$S_F \rightharpoondown\!\mid$	$F(t)$给定，$V(t)$任意一势源，如重力作用
		$S_V \mid\!\rightharpoondown$	$V(t)$给定，$F(t)$任意一流源，如输入速度作用
	机械转动	$S_\tau \rightharpoondown\!\mid$	$\tau(t)$给定，$\omega(t)$任意一势源，如输入转矩作用
		$S_Q \mid\!\rightharpoondown$	$\omega(t)$给定，$\tau(t)$任意一流源，如输入转速作用

对应变量	液压	S_p ⊣	$p(t)$给定，$Q(t)$任意—势源，如泵—蓄势器动力站（恒压源）
		S_Q ⊢	$Q(t)$给定，$p(t)$任意—流源，如直传式动力站（恒流源）
	电	S_e ⊣	$e(t)$给定，$i(t)$任意—势源，如电源插座
		S_i ⊢	$i(t)$给定，$e(t)$任意—流源，如输入电流作用

2、基本2—通口元件

此种元件涉及2个功率通口，包括变换器与回转器。它遵守功率守恒（或称"直通功率"）的原则，即正在流入该2—通口一侧的功率，均同时从另一侧流出，既无消耗（或存贮），也无新产生。

(1) 变换器

其键合图为

$$\xrightarrow[f_1]{e_1} \mathrm{TF} \xrightarrow[f_2]{e_2}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} e_1 &= m e_2 \\ m f_1 &= f_2 \end{aligned}\right\} \quad (4-6)$$

m—变换器模数。

因此 $e_1 \cdot m f_1 = m e_2 \cdot f_2$

即 $e_1 \cdot f_1 = e_2 \cdot f_2$，遵守功率守恒。

例1 理想的刚性杠杆（图4—6）

当杠杆为无质量、无摩擦的刚性件时有

$F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2$

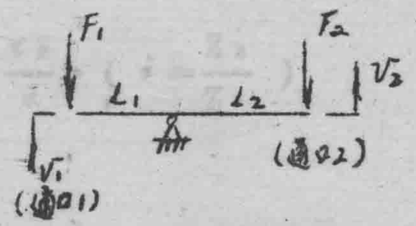


图 4－6　理想的刚性杠杆

所以　$F_1=\frac{L_2}{L_1}F_2=mF_2$　　（4－7 a）

式中　m－杠杆比，$m=\frac{L_2}{L_1}$

又因　$\frac{V_1}{L_1}=\frac{V_2}{L_2}$

所以　$\frac{L_2}{L_1}V_1=V_2$

即　$mV_1=V_2$　　（4－7 b）

式（4－7 a）、（4－7 b）与式（4－6）相似，且知

$$F_1\cdot mV_1=mF_2\cdot V_2$$

即　$F_1V_1=F_2V_2$，遵守功率守恒

因此，理想的刚性杠杆是一种变换器，且变换器模数等于杠杆比。

例 2　理想的齿轮副（图 4－7）

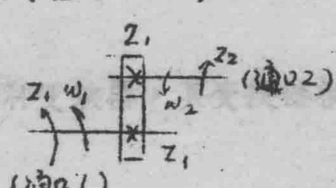


图 4－7　理想的齿轮副

因为 $\tau_1=\frac{Z_1}{Z_2}\tau_2=\frac{\tau_2}{i}$，（$i=\frac{Z_2}{Z_1}$）

$$\frac{\omega_1}{i}=\omega_2$$

$\tau_1\omega_1=\tau_2\omega_2$，功率守恒

所以，理想的齿轮副是一种变换器，且变换器模数等于速比的倒数，

即 $m=\frac{1}{i}$。

例3　理想液压缸（图4－8）

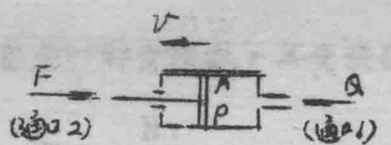


图4－8　理想液压缸

它将液压功率转换成机械功率，并且有

$$P=\frac{1}{A}F$$

$$\frac{1}{A}Q=U$$

$$PQ=FV$$

所以，理想的液压缸是一种变换器，其变换器模数等于活塞面积的倒数，即 $m=\frac{1}{A}$。

例4　理想变压器（图4－9）

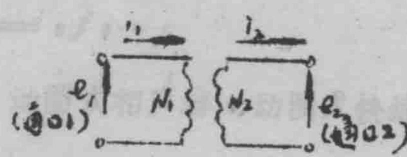


图 4－9　理想变压器

因为　$e_1=\frac{N_1}{N_2}e_2$

$\frac{N_1}{N_2}i_1=i_2$

$e_1 i_1=e_2 i_2$

所以，理想变压器是一种变换器，其变换器模数等于初级线圈与次级线圈的匝数比，即 $m=\frac{N_1}{N_2}$ 。

(2) 回转器

其键合图为

$\xrightarrow[f_1]{e_1}\mathrm{GY}\xrightarrow[f_2]{e_2}$

其中　$\left.\begin{array}{l} e_1=rf_2 \\ rf_1=e_2 \end{array}\right\}$　（4－8）

r—回转器模数

从上式可见，它互换了势和流的作用，且同样遵守功率守恒：

$e_1\cdot rf_1=rf_2\cdot e_2$

即　$e_1f_1=e_2f_2$。

例5　动圈式相声器、动圈式快速阀（图4－10）

因为　$e=rv$

$ri=F$

$e\cdot i=F\cdot V$

所以，它们是一种回转器

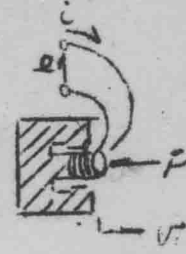


图4－10　动圈式相声器、动圈式快速阀

(3)　调制变换器和调制回转器

对于元件TF和GY，当其模数m、r非常数时，则构成调制变换器MTF和调制回转器MGY。

它们的键合图分别为

$$\xrightarrow[f_1]{e_1}\overset{\downarrow m}{\mathrm{MTF}}\xrightarrow[f_2]{e_2}\qquad\xrightarrow[f_1]{e_1}\overset{\downarrow r}{\mathrm{MGY}}\xrightarrow[f_2]{e_2}$$

其中，m和r起控制作用，它们变化时不会涉及原来两个通口的功率，仍有$e_1f_1=e_2f_2$。

例6　理想自耦变压器

若图4－9所示变压器为自耦变压器，则转动其手轮时，改变了初级线圈和次级线圈的匝数比$\frac{N_1}{N_2}$（$=m$），此即表明模数m非常数。但这种改变不花费原两通口的任何功率，所以，理想自耦变压器是一种调制变换器。

例7　有如图4－11所示理想转臂AO（无质量、无摩擦、