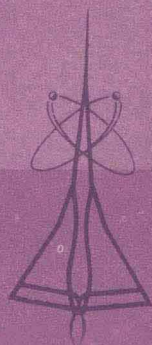


航空高等院校教材

对流换热理论

北京航空学院 王丰等编著



航空专业教材编审组

内 容 简 介

本书为对流换热理论的专著。第一章介绍了描述对流换热问题的微分方程组和求解时的单值性条件；第二章和第三章分别讨论了用微分方程组与动量积分方程和能量积分方程求解绕流平壁、楔形体 and 曲面时的流阻和换热；第四章研究了用米塞斯变换、多罗德尼仓变换和克洛克变换求解高速层流时的换热和流阻问题；第五章介绍了用微分方程组和积分方程组在第一类和第二类边界条件下，求解流体沿竖壁作自由运动时的换热问题；第六章讨论了流体在通道内流动时流动起始段和热起段的概念以及起始段换热的分析解；第七章简要地介绍了湍流流动和换热的半经验理论。

在某些情况下换热系数、摩擦阻力系数与传质系数之间是相互联系的，这是因为热能、动量及质量迁移这些物理过程的机理是一致的。湍流时热能迁移、动量迁移及质量迁移是依靠流体微团的掺混来实现的，上述三种过程之间的联系表现得更为明显，因此本书较详细地讨论了换热与流阻之间的关系。

本书可作为工程热物理、热能动力、高速飞行器设计和喷气推进的传热与传质等专业的研究生教材或参考书，也可供从事对流换热研究的科技人员、有关专业的大学教师和学生参考。

对 流 换 热 理 论

北京航空学院 王丰等编著

责任编辑 王坡麟

航空专业教材编审组

北京航空学院印装 内部发行

*

787×1092 1/16 396千字

1983年12月第一版 1984年元月第一次印刷 印数：0,001—1,300册

统一书号：23118j 定价：1.65元

基本符号说明

- u —— x 轴向速度
 v —— y 轴向速度
 w —— z 轴向速度
 p —— 压力
 ρ —— 密度
 T —— 温度
 t —— 时间
 μ —— 动力粘性系数
 ν —— 运动粘性系数 (或称动量扩散系数)
 λ —— 导热系数
 c_p —— 等压比热
 c_v —— 等容比热
 k —— 绝热指数
 a —— 导温系数 (或称热扩散系数)、音速
 U —— 内能、主流速度
 h —— 焓 (单位质量)
 q —— 热流量
 m —— 质量、分子量
 L —— 长度
 r —— 圆管半径、动温恢复系数
 d —— 圆管直径
 R —— 总摩擦阻力; 气体常数; 相对半径
 σ —— 正应力
 τ —— 切应力 (或称单位面积上的摩擦阻力)
 c_f —— 局部摩擦阻力系数 (或称范宁摩擦系数)
 f —— 通道内摩擦系数; 无因次流函数
 α —— 换热系数
 g —— 重力加速度
 ΔT —— 过余温度, $\Delta T = (T - T_w)$ 或 $(T - T_\infty)$
 θ —— 无因次温度, $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$
 ψ —— 流函数
 δ —— 速度附面层厚度
 δ^* —— 位移厚度
 δ_M^* —— 动量损失厚度

δ_k^{**} ——动能损失厚度

δ_E^{**} ——能量损失厚度（或称焓损失厚度）

δ_t ——温度附面层的厚度

$Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$ ——雷诺数

$Pr = \frac{\nu}{a}$ ——普朗特数

$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$ ——努赛数

$Pe = Pr \cdot Re = \frac{U_\infty L}{a}$ ——培克列数

$St = \frac{\alpha}{\rho U_\infty C_p}$ ——斯坦顿数

$Gr = \frac{g\beta \Delta T_w L^3}{\nu^2}$ ——葛拉晓夫数

$Gr^* = \frac{g\beta q_w L^4}{\nu^2 \lambda}$ ——修正的葛拉晓夫数

$Ra = \frac{g\beta q_w L^4}{\lambda \nu a}$ ——瑞利数

$M = \frac{u}{a}$ ——马赫数

注 角

w ——壁面参数

∞ ——远前方气流参数（或称主流参数）

δ ——附面层边界处的参数

x ——从前缘计算起的局部值

max ——极大值

l ——层流参数

t ——温度附面层的参数

m ——湍流附面层的参数

c ——通道中心处的参数

前 言

对流换热理论目前正处在迅速发展的时期,它是传热学中最活跃的部分。一方面是由于分析方法和数值解法在不断地改进,另一方面对流换热理论还在向一些新的领域渗透发展,因此编者无意全面地介绍对流换热理论和它的最新成就,而是着眼于单相介质对流换热的分析解法,其中包括附面层微分分析方法和积分分析方法,因为这种方法能使读者更深刻地理解问题的物理本质。本书的目的是要尽可能地说明对流换热的本质和基本理论,说明如何将物理过程转化为数学语言,使读者能深入地理解和掌握对流换热的规律和分析方法。

具体来说,本书将介绍对流换热理论中最简单、最基本的内容,它将阐明流体绕流平壁、楔形体 and 曲面时流阻和换热的物理本质,它们之间的类比关系以及流体在圆管和两个无限大平行平壁内在起始段的换热问题。在编排上根据由浅入深、循序渐进的原则,首先讨论常物性不可压流体绕流壁面的速度附面层和温度附面层,在这种情况下附面层的速度型和附面层的形式将不受换热的影响,因此速度附面层的问题,就是一个单纯的流体动力学问题,这种解的价值在于它带有普遍意义。随后将讨论高速变物性可压缩流体的流阻和换热问题,不同流体其粘性系数和导热系数随温度变化的规律不同,根据某种流体的热物性参数随温度变化的规律所得到的解,仅适用于该种或某一类流体,因此这种解具有局限性,但它能更准确地反映客观规律。内部流动换热研究了流体在不同几何形状的通道内,流体在流动起始段和热起始段的流阻和换热问题。最后两章讨论了流体沿竖壁自然对流的换热问题与湍流流动和换热的半经验理论。在叙述方式上注重说明重要的物理概念和过程的物理本质;说明如何从过程的物理模型出发来建立相应的数学模型;说明如何通过相似变换将原始的偏微分方程组转化为常微分方程组以及解题的思路。全书推导比较详细,适合于自学,但在某些关键性的推导地方留有伏笔供读者思考,这样作的目的在于希望通过阅读本书,不仅能熟悉对流换热理论的基本内容,同时还希望能培养读者掌握分析问题的方法和独立地解决某些实际问题的能力。

本书是编者根据自己多年来为我院有关专业研究生讲授“对流换热理论”的讲稿编写而成。全书共分七章,第一章基本方程由陆大有同志编写,其余六章由王丰编写。在编写过程中康滢等同志给予了大力协助,编者在此对他们表示衷心地感谢,西安交大陈钟頤同志详细地审阅了原稿,并提出了宝贵的意见,编者对他的支持致以谢意。

由于编者水平有限,加之时间紧迫,缺点和疏漏之处在所难免,敬希读者指正,我们将诚肯地接受并表示诚挚的谢意。

编 者

1982年于北航

目 录

绪 论

第一章 基本方程

§1—1 质量方程.....	3
§1—2 运动方程.....	5
§1—3 能量方程.....	8
§1—4 单值性条件.....	12
§1—5 描述对流换热过程的无因次方程组及相似准则.....	13

第二章 绕流平壁和楔形体时层流换热的精确解

§2—1 速度附面层的物理概念及其基本特征.....	19
§2—2 速度附面层的微分方程.....	20
§2—3 附面层微分方程解法概述及单值性条件.....	23
§2—4 纵向绕流平壁层流速度附面层的解.....	25
§2—5 温度附面层的物理概念.....	36
§2—6 温度附面层的微分方程和边界条件.....	37
§2—7 纵向绕流等温平壁层流温度型和对流换热系数.....	39
§2—8 摩擦阻力与换热之间的关系.....	44
§2—9 曲面上附面层的分离.....	46
§2—10 位移厚度、动量损失厚度和动能损失厚度.....	48
§2—11 绕流楔形体层流速度附面层的理论解.....	54
§2—12 纵向绕流等温楔形体层流附面层的换热.....	63
§2—13 绕流不等温楔形体的温度型和对流换热系数.....	66

第三章 用积分方程求解流体绕流平壁和曲面时换热和流阻问题

§3—1 概述.....	70
§3—2 纵向绕流平壁的动量积分方程及其解.....	71
§3—3 能量积分方程 ($Pr > 1$)	78
§3—4 绕流等温平壁时能量积分方程的解.....	80
§3—5 绕流平壁湍流附面层动量和能量积分方程的分析及解法.....	89
§3—6 绕流曲壁的动量积分方程及其解.....	91
§3—7 积分分析方法的改进.....	103

第四章 高速气流换热

§4—1 概述.....	108
--------------	-----

§ 4—2	库埃特流动	109
§ 4—3	动温恢复系数	117
§ 4—4	高速层流附面层的微分方程组	120
§ 4—5	常物性流体绕流平壁时的高速层流附面层	128
§ 4—6	高速附面层速度型与温度型之间的关系	134
§ 4—7	米塞斯变换	144
§ 4—8	求解平壁上高速层流附面层的卡门—钱学森方法	145
§ 4—9	多罗德尼仓变换	153
§ 4—10	高速气流纵向绕流平壁时的放热和摩擦阻力	157
§ 4—11	克洛克变换	163

第五章 通道内的对流换热和流阻

§ 5—1	流体动力稳定段和热稳定段	174
§ 5—2	圆管内完全发展段的速度型与摩擦阻力系数	176
§ 5—3	两个无限大平壁间完全发展段的速度型与阻力系数	180
§ 5—4	通道内的层流换热	183
§ 5—5	圆管热起始段的层流换热	186

第六章 自然对流换热

§ 6—1	概述	192
§ 6—2	垂直竖壁自然对流换热的微分方程组	193
§ 6—3	第一类边界条件下自然对流微分方程组的解	195
§ 6—4	第二类边界条件下自然对流微分方程组的解	199
§ 6—5	第一类边界条件下自然对流积分方程组的解	201
§ 6—6	第二类边界条件下自然对流积分方程组的解	204
§ 6—7	自然对流时阻力与换热之间的关系	206

第七章 湍流流动和换热

§ 7—1	概述	208
§ 7—2	湍流的物理过程和基本概念	209
§ 7—3	时均化法则	211
§ 7—4	湍流附面层的动量方程和能量方程	213
§ 7—5	普朗特混合长度假设	217
§ 7—6	卡门湍流相似假设	219
§ 7—7	光滑圆管内湍流的速度型	220
§ 7—8	光滑圆管与粗糙管的阻力系数	225
§ 7—9	湍流换热	227

附 录

参考资料

绪 论

与其它学科的建立和发展一样，对流换热理论也是在解决生产实践中各种换热问题的过程中产生和发展起来的，各种动力装置和热工设备的应用，都要求详细地研究换热现象。热机性能的改善，其经济性和可靠性的提高，以及工业用的各种换热器效率的提高都促进了换热理论的发展。

在本世纪初，换热学说还处在萌芽状态，它只不过汇集了某些个别的经验数据。近几十年来物理学的成就，尤其是流体的层流及湍流运动的研究，使人们能较深刻地阐明换热过程的物理本质。与此同时创立了制造模型实验、整理及综合实验数据的一般方法论——相似理论。相似理论的建立对于推动传热学、流体力学等学科的发展起着重要的作用，它不仅是把数学分析与实验研究结合起来的桥梁和用实验方法求解微分方程组的一种有效手段，而且也是寻求相似变量将偏微分方程转变为常微分方程的重要方法。此后人们将已有的全部传热学方面的资料，经过重新审定、修正使之成为一定的系统。当换热理论在生产实践中得到广泛应用时，传热学才达到迅速发展的时期，并成为一门独立的技术学科，从卅年代起传热学才成为一门普通的技术课程。

目前，在国民经济的很多部门中，换热现象具有重要意义，换热过程在热能动力、石油、化工、冶金、建筑、机械制造、农业、制冷工程、电气工程、飞机制造、火箭、导弹制造以及航空发动机的生产实践中均起着重要的作用。可以毫不夸张地说，几乎在所有的现代技术部门中都会遇到换热过程。例如：在涡轮喷气发动机中涡轮盘和叶片的计算、燃烧室和加力燃烧室的冷却计算。超音速飞行器的设计师在设计时，不仅应进行空气动力计算，而且还必须进行完整的热计算。对于设计以高超音速飞行于大气层内的带翼火箭的设计师们来说，当计算人造地球卫星或装有各种仪器的容器的下降轨道时，也会碰到较复杂的热计算。现代弹道火箭的飞行速度约为 $6 \sim 8$ 公里/秒，当火箭重返大气层时它的壁面被强烈地加热，因而引起壁面材料的熔化和烧蚀，这里就产生了选择复盖层、确定最佳轨道、准确计算熔蚀的材料以及确定所需冷却剂的重量等问题。在超音速飞行时，由于高温空气中的氧和氮分子开始离解，以及复盖层材料和空气之间产生化学反应，使计算的困难大大增加。以上所列举的远非现代喷气发动机和飞行器的设计师们所遇到的全部问题，但它足以说明在航空、航天工业里必须广泛地发展换热方面的理论和实验的研究，同时也说明航空工程师必须具有换热理论的深厚知识，和很好地掌握传热学方面的有关研究成果。

把实际情况理想化是研究物理现象经常采用的方法，所谓理想化就是把实际物理现象中的主要因素和次要因素分开，暂时撇开次要因素，只就主要因素进行研究。这种处理方法的好处是使复杂问题简化，并能抓住问题的本质进行深入探讨。附面层理论实质上就是在这种方法的指导下，通过对运动方程和能量方程中各项数量级的比较建立起来的。

对流换热的计算在很多情况下可归结为附面层的计算，在实际流体的流动中，粘性、导热和扩散的影响，通常只在靠近壁面某一相当薄的区域内，即所谓附面层里表现出来。

1904年普朗特建立了层流速度附面层的基本方程，四年后即1908年布拉修斯成功地解

出了速度附面层的微分方程组,在流体动力学发展史上第一次从理论上计算了摩擦阻力。1921年数学家伊·普尔豪森把附面层理论成功地应用于计算流体与固体壁之间的换热,1921年卡门提出了动量积分方程求解层流和湍流附面层的近似计算方法,随后克·普尔豪森应用卡门的动量积分方程近似地解决了流体纵向绕流平壁的附面层问题。能量积分方程是在1936年克鲁日林首先提出的。由于利用积分方程计算简便并具有较高的精确高,使附面层理论很快的在工程技术界推广起来,并在飞机、燃气轮发动机、造船、火箭发动机等专业的实际应用中占据了应有的地位。1925~1929年普朗特和卡门又研究出简单的半经验湍流理论,这就使附面层理论推广到湍流流动和换热中去了。

高速附面层理论对解决现代航空、航天技术中的实际问题具有重要意义,一些最简单问题的个别解法早在三十年代就出现了,如巴斯曼、卡门—钱学森、法克拉和克洛克等人的解法。1942年苏联科学家多罗德尼仓将高速可压层流附面层转化为不可压的附面层相近似的形式求解,以后斯提瓦特森、霍尔思等著名学者又作了些改进,上述这些工作对于对流换热理论的一个重要组成部分——高速气流换热的进一步发展起了很大的推动作用。1939年意大利空气动力学家克洛克提出了另一种求解高速附面层微分方程组的方法,这种方法是基于利用气流的纵向分速作为变量使原始方程组简化。

从数学角度来看,自建立起附面层微分方程组以来,由于方程是非线性的,在求解过程中就要求用近似数值积分方法,在早期求解这些微分方程组时可以用多项式展开求解的方法、应用逐次近似或各种可能线性化的方法求解,随着所讨论的问题日益复杂,就必须用电子计算机来进行积分了。

由于大容量高速电子计算机的应用,使得过去认为不可能求解的传热问题,有可能获得数值解。目前很多复杂而又有工程意义的流动和换热问题也可以求得数值解。正因为如此数值传热学近年来得到了较大的发展。

人类对湍流流动和换热的研究已近一百年了,一百年来世界上千百万科技工作者,其中包括许多著名的科学家,为探索湍流流动和换热的机理付出了巨大的劳动。近三十年来由于高速电子计算机的应用,特别是热线风速仪和激光全息技术的发展,大大地加深了人们对湍流本质的认识,在理论上人们提出了各种各样的物理模型,概括起来说这些模型可分为四大类。它们是:1. 代数模型、这种模型把雷诺应力用已有变量的代数组合作来表示。2. 微分模型、用一些新的微分方程解出几个新的变量,然后用这些新变量来表达雷诺应力。3. 大涡流模拟模型和。4. 概率分布模型。但是要彻底弄清湍流的物理本质,提供为工程技术计算的准确公式,人们还需要付出长期艰苦的劳动。立志献身于科学事业的青年们,向湍流这座坚固的科学堡垒进军吧!

恩格斯说:“只要自然科学在思维着,它的发展形式就是假设”。以假设的形式所反映的客观现实是具有相对真理的性质,也就是说这种反映是客观世界的近似反映,是对自然现象一种假定的说明。科学知识的进一步发展,使一种假设代之以另一种假设,或者是由被证实的理论所替代。

自然界的一切都是在变化发展的,反映世界规律的理论也在不断地发展,人们不应该把任何理论看做是一种一成不变的和神圣不可侵犯的东西,正因为如此唯物辩证法对一切都采取批判的态度,我们不仅应该用这种态度来对待对流换热理论,而且也应该用同样的态度来对待其它科学理论,这才是一种正确的学习态度。

第一章 基本方程

研究对流换热过程和流体力学一样，一般用宏观的方法，也就是将流体看作是连续介质，用温度 T 、压力 p 和流速 U 等宏观状态参数来描述所研究过程的规律。至于流体物性参数如密度 ρ 、比热 c_p 、粘性系数 μ 和导热系数 λ 等一般是温度和压力的函数。如果流体中的速度型和温度型已经求得时，则流动阻力和流体与壁面之间的换热等都可得到解决。

为了确定流体中的速度型和温度型，可从物理的基本定律出发，导出所需的方程式，这些基本规律是：质量守恒定律，动量守恒定律和能量守恒定律。所导出的基本方程有质量方程、运动方程和能量方程，如果再加上状态方程（对于完全气体）以及流体物性随温度变化的关系后，就组成完整的描述对流换热过程的微分方程组。配合以相应的单值性条件，就可使该微分方程组得出定解。下面来导出这些基本方程。

§ 1—1 质量方程

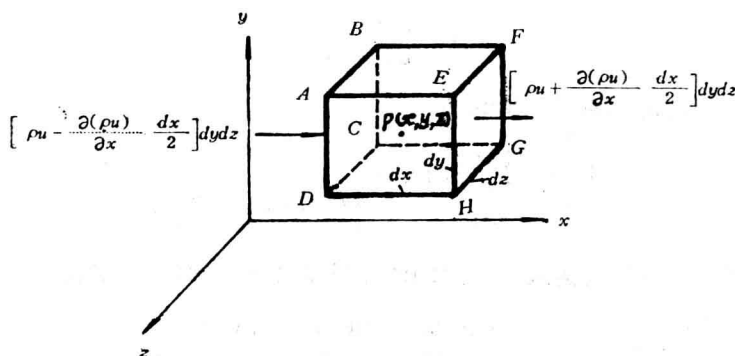


图1—1 质量方程的推导

质量方程又叫做连续方程，它是质量守恒定律在运动流体中的具体表达式。如图1—1所示，在流场中划定一个边长分别为 dx 、 dy 和 dz 的矩形六面控制区，令其中心点 P 的坐标为 $P(x, y, z)$ 。在某一瞬间 t ，经过 P 点的流体的三个分速为 u 、 v 、 w ，其密度为 ρ 。

单位时间内通过 $ABCD$ 面流入控制区的流体质量为

$$\left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

通过 $EFGH$ 面，由控制区流出的质量流量为

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz$$

则在 x 方向上，流入控制区的流量与流出流量之差为

$$\left\{ \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] \right\} dy dz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

同理，在 y 、 z 方向上，流入与流出控制区的流量之差分别为

$$- \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz ;$$

$$- \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

上述三个方向上的差值之和就是整个控制区内总流入与总流出的流量之差，可写为

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

若控制区内原有的流体质量为

$$\rho \, dx \, dy \, dz$$

在 dt 时间后，控制区内的流体质量改变为

$$\left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right] dx \, dy \, dz$$

则控制区在单位时间内流体质量的增量为

$$\left[\frac{\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) - \rho}{dt} \right] dx \, dy \, dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz$$

根据质量守恒定律，控制区内流入与流出的流体质量之差应等于控制区流体质量的增量，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx \, dy \, dz = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx \, dy \, dz$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-1a)$$

根据全导数（或叫真导数）的概念，可知

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ &\quad + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

因而 (1-1a) 式也可写为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-1b)$$

或
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1-1c)$$

上式中 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 是速度的散度，即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

上述 (1-1a)、(1-1b) 或 (1-1c) 式就是可压流微分形式的质量方程。因该方程只是从质量守恒的角度导出的，不涉及到力的问题，所以无论流体是否考虑粘性，都是适用的。

对于定常可压流， $\partial \rho / \partial t = 0$ ，则 (1-1a) 式改为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-2)$$

上式表明，在定常流中，由于控制区内的流体质量不随时间变化，则单位时间内流入控制区的流体质量必等于流出的质量。

对于不可压流，流体的密度 $\rho = \text{常数}$ ，则质量方程简化为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1-3)$$

上式表明，对于不可压流来说，流体微团的体积膨胀率等于零。

§ 1—2 运动方程 (納維尔—斯托克斯方程)

如图1—2所示，在流体中取出一流体微团，其边长为 dx 、 dy 和 dz ，体积 $dV = dxdydz$ 。在

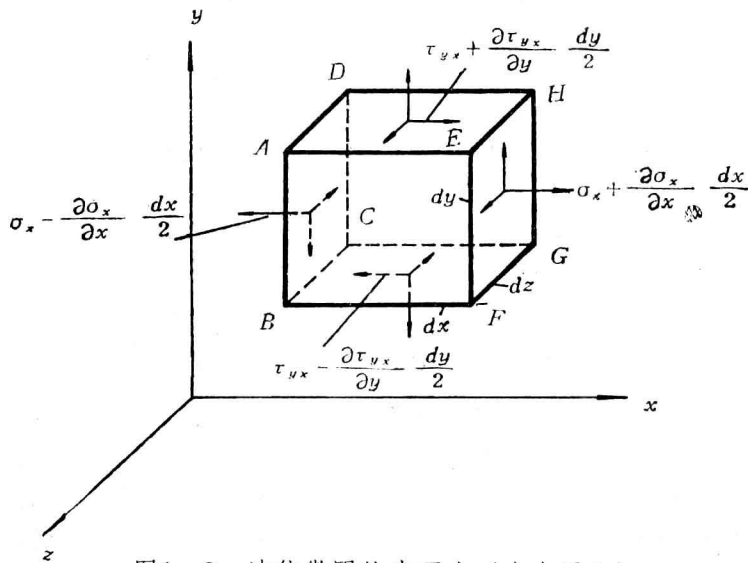


图1—2 流体微团的表面力 (力未画全)

有粘性的流动中，流体微团的表面力，除设法向应力外，还有与表面相切的剪切应力。根据

应力分析，微团的九个应力分量可写为

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz},$$

$$\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz},$$

$$\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z,$$

其中 σ 为法向应力， τ 为剪切应力。应力符号的记法为： σ_x 是与 x 轴相垂直的平面上的法向应力， τ_{xy} 是在与 x 轴相垂直的平面上并在 y 方向上的剪切应力，其余则类同。

对于六个剪切应力，并非全部独立，根据力矩平衡的条件，并略去高阶微量，则可以证明 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 和 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ，称为剪切应力互等定理。

对于法向应力 σ 应包括压力 p 和与流体粘性有关的法向应力 σ' ，即

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x$$

$$\sigma_y = -p + \sigma'_y$$

$$\sigma_z = -p + \sigma'_z$$

参看图1—2，作用在 $ABCD$ 面上的法向应力为 $\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ ，作用在 $EFGH$ 面上的法

向应力为 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ 。则作用在这两个侧面上的法向力之差为

$$\left[\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dy dz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz$$

同样地，在 $DAEH$ 和 $CBFG$ 上下两表面并在 x 方向上的切向力之差为

$$\left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

在 $ABFE$ 和 $DCGH$ 前后两表面并在 x 方向上的切向力之差为

$$\left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

设流体微团单位质量所受的体积力为 f_x ， f_y 和 f_z ，则按牛顿第二定律，可写出在 x 方向上的运动方程为

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x + \left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (1-4)$$

下面将上式中应力的导数改为速度的各阶导数。从产生应力的角度来看，固体和流体不同之处在于：固体有变形就有应力，它们之间的关系，在弹性限度内，服从虎克定律。流体有变形率（单位时间的变形）就产生应力。因此，流体的应力是和流体微团的线变形率 ϵ （单位时间内单位长度的变形量）和角变形率 2γ （单位时间内一个直角的变化量）直接相关的。根据对流体微团运动的分析，流体微团在 x 、 y 、 z 三个方向上的线变形率 ϵ_x ， ϵ_y ， ϵ_z 分别为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

在与 x, y, z 三个坐标轴相垂直的平面（即 yz 平面， xz 平面和 xy 平面）内，流体微团的角变形率 $2\gamma_x, 2\gamma_y, 2\gamma_z$ 分别为

$$2\gamma_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$2\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\gamma_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

在简单的剪切流动中，根据牛顿摩擦定律，可以写出

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 2\mu\gamma_z \quad (1-5)$$

但对于一般的三维流动，其应力和应变率之间的关系没有简单的实验可以直接验证，只能采用假设。在有关粘性流体力学的著作中已经说明，根据斯托克斯假设，即应力与应变率成线性关系并与坐标系无关。对于各向同性的流体，其应力和应变率之间的关系为

$$\sigma_x = -p + \sigma'_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1-6a)$$

$$\sigma_y = -p + \sigma'_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1-6b)$$

$$\sigma_z = -p + \sigma'_z = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1-6c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1-7a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu\gamma_x = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (1-7b)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 2\mu\gamma_y = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1-7c)$$

将 (1-6) 和 (1-7) 式代入 (1-4) 式，可得

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-8a)$$

同理，在 y, z 方向上的运动方程分别为

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (1-8b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (1-8c)$$

上面 (1-8a) ~ (1-8c) 式就是粘性流体的运动方程, 即纳维尔—斯托克斯方程。

若流体的粘性系数 $\mu = \text{常数}$, 则运动方程可简化为

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 u \quad (1-9a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 v \quad (1-9b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \nabla^2 w \quad (1-9c)$$

对于低速不可压流, 其密度 $\rho = \text{常数}$, 则 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ 。于是 (1-9a) ~ (1-9c) 式可简化为

$$\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1-10a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1-10b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (1-10c)$$

§ 1-3 能 量 方 程

如图 1-3 所示, 在流场中取一矩形六面体的流体微团。根据能量守恒定律, 对于流体微团所加入的热量 dQ 与微团表面力对流体所作的功 dW 应等于流体微团的能量增量 dE , 即

$$dQ + dW = dE \quad (1-11)$$

1. 列出 dQ 的表达式

根据傅立叶定律, 单位时间内在 x 方向上通过 $ABCD$ 面以导热方式传入微团的热量

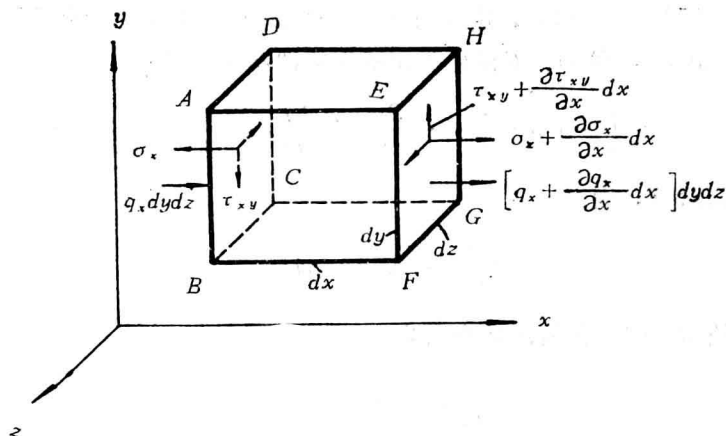


图1—3 能量方程的推导

$$- \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz$$

而通过 $EFGH$ 面由微团传出的热量为

$$\left[- \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(- \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz$$

则单位时间内在 x 方向上传入微团的净热量为

$$\begin{aligned} & - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz - \left\{ - \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] \right\} dydz \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dydz \end{aligned}$$

同理，在 y, z 方向上传入微团的净热量分别为

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dydz;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dydz;$$

则单位时间内以导热方式传入微团的净热量 dQ 为

$$\begin{aligned} dQ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dydz \\ &= \text{div}(\lambda \text{grad} T) dx dydz \end{aligned} \quad (1-12)$$

2. 列出 dW 的表达式

流体微团的表面力包括法向应力 σ 和剪切应力 τ ，将各表面力与该方向上的分速度相乘之，然后求其代数和，则可得单位时间内所有表面力对流体微团所作的功 dW 。

先分析单位时间内法向应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 对流体微团所作的功。在 $ABCD$ 面上的法

向应力为 σ_x ，其所作的功为 $-u\sigma_x dydz$ ，负号表示应力与速度的方向相反。在 $EFGH$ 面上的法向应力为 $\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx$ ，速度为 $u + (\partial u/\partial x)dx$ ，其所作的功为 $[\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx][u + (\partial u/\partial x)dx]dydz$ ，则 σ_x 对流体微团所作的净功为

$$\left[-\sigma_x u + \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \right] dydz$$

将上式展开并略去高阶项，则得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u) dx dydz$$

同理， σ_y 、 σ_z 对流体微团所作的净功分别为

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y v) dx dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z w) dx dydz$$

再分析单位时间内各表面的剪切应力 τ_{xy} 、 τ_{yz} 等对流体微团所作的功。在 $ABCD$ 面上，剪切应力 τ_{xy} 对微团所作的功为 $-\tau_{xy} v dydz$ 。在 $EFGH$ 面上，剪切应力对微团所作的功为 $[(\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial x)dx)[v + (\partial v/\partial x)dx] dydz$ 。则在单位时间内， τ_{xy} 对流体微团所作的净功为

$$\left[-\tau_{xy} v + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \right] dydz$$

将上式展开并略去高阶项，可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} v) dx dydz$$

同理，在单位时间内 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{xz} 、 τ_{zx} 对流体微团所作的净功分别为

$$\tau_{yx}: \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u) dx dydz$$

$$\tau_{yz}: \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz} w) dx dydz$$

$$\tau_{zy}: \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy} v) dx dydz$$

$$\tau_{xz}: \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz} w) dx dydz$$

$$\tau_{zx}: \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} u) dx dydz$$

则单位时间内所有表面力对流体微团所作的总功 dW 为

$$dW = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) \right]$$