成功笔记系列丛书·依/据/2000/年/教/育/部/颁/布/的/最/新/考/试/大/纲/编/写

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学（一）

（附模拟试卷）

全国各类成人高考考试命题研究组编

哈尔滨工程大学出版社

依据2000年教育部颁布的
最新考试大纲编写

成功笔记系列丛书

全国各类成人高考
复习考试辅导教材
（专科起点升本科）

高等数学(一)

（附模拟试卷）

全国各类成人高考考试命题研究组编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国各类成人高考复习考试辅导教材(专科起点升本科)高等数学(一)/全国各类成人高考考试命题研究组编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2000.10
ISBN 7-81073-089-4

Ⅰ.全… Ⅱ.全… Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 56045 号

内 容 简 介

本书根据教育部最新成人高考专升本统一招生考试大纲,由北大,人大,首都师大,中央教科所等著名专家、教授编写而成。全书包括七部分。内容为函数、极限和连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分学,无穷级数,常微分方程等。书中除帮助考生全面复习新大纲涵盖的全部基础知识和考核知识点以外,还从实战出发,编写了复习题和全真模拟试题,并附有参考答案。本书具有较强的权威性、规范性和实用性,是一本具有很强指导意义的复习参考书,适合各类专升本考生复习备考的需要。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂 印 刷
*
开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 12.5 字数 240 千字
2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月第 1 次印刷
印数:1~8 050 册
定价:15.00 元

出版说明

全国各类成人高等学校(专升本)招生统一考试,从2001年起使用新的考试大纲,并且命题也以新的大纲为依据。与原大纲相比,新大纲在考试科目及考试知识点上,都做了较大调整。对考生来说,迫切需要一套根据全新大纲编写的,具有较强指导意义的复习参考书。为满足考生复习备考的需要,我社组织北京大学、中国人民大学、首都师范大学、中央教科所、中国人民公安大学、中国人民解放军装甲兵工程大学的教授、博士和专家编写了这套复习考试辅导教材。

本套复习考试辅导教材有以下特点:

1.本套书根据2000年教育部颁布的最新考试大纲编写,可使考生准确把握新大纲的内容和考核知识点。

2.本套书作者都是多年从事成人教育的专家,具有丰富的指导学生备考的经验。该套书的选材结构严谨,循序渐进,难易适度,内容权威。既适合办班,也适合自学。

3.本套书从备考实战出发,编写了适量的复习题,3套模拟题(有的分册则配有全真模拟试卷),并附有参考答案,对考生模拟实战会起到事半功倍的效果。

2000年10月

全国各类成人高考复习考试辅导教材

（专科起点升本科）

编委会

高等数学(一)考试说明

高等数学是成人高考专升本招生全国统一考试的重要科目。这项考试多年来由教育部考试中心统一组织命题,考试工作已逐步走向了规范化、标准化和科学化。

一、考试性质

全国成人专升本招生考试是为具有大专学历或相当水平的成人取得进入成人高校深造的机会而设置的。考试的评价标准是大专毕业生能达到的及格或及格以上水平,以保证被录取后具有基本的数学素质完成本科阶段的学习并且有得于成人高校择优录取。它是具有选拔性质的水平考试。

二、考试大纲的制订与修订

为了使我国成人高考专升本招生考试科学规范,并朝着标准化考试的方向前进,从而保证成人高校录取学生的质量,由教育部考试中心统一制订和颁布《全国成人高等学校招生高等数学(一)复习考试大纲》。

1.考试大纲的制订

考试大纲的制订是为成人高校招生服务的,它一般根据高等学校数学教材的数学建设、教学实际情况来制订,同时考虑一般大专院校学生应具备的基本数学素质和应达到的水平,实质是对考生基本数学素质的综合考查。

历年来考试大纲的基本内容包括了考试的总要求、内容、试卷结构、标准样卷。

2.考试大纲的修订

考试大纲自制订颁布至今已多年。在此期间每年都根据大专院校数学教材建设和教学实际情况,以及成人高校招生的需要进行适当的、或多或少的修改和调整,从而为全国成人高考统一考试的命题工作打下了良好的基础,同时也使数学考试本身朝着科学化、规范化的方向迈进。

三、2001年高等数学(一)考试大纲的基本内容简介

本大纲适用于理工类专业的学生。

1.考试范围:

函数、极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元微积分学、无穷级数、常微分方程。

注:上述各部分的基本内容及要求将在第二部分中有具体说明。

2.评价目标:

高等数学(一)的考试重在考查对基本知识、基本理论的掌握。考生应能:

(1)了解高等数学中的基本要领和基本理论;

(2)学会、掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法;

(3)注意到上述各部分的结构及知识的内在联系;

(4)具有一定的抽象思维能力、逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力;

(5)能运用基本要领基本理论和基本方法正确地推理证明,准确地计算;

(6)能综合运用所学知识分析并解决简单的实际应用。

3.考试形式与试卷结构

在考试形式上，目前采用闭卷、笔试；试题全部为必答题。答题时间为150分钟，满分150分。

试卷内容比例：

函数、极限和连续	约15%
一元函数微分学	约25%
一元函数积分学	约20%
多元函数微积分学（含向量代数与空间解析几何）	约20%
无穷级数	约10%
常微分方程	约10%

试卷题型比例：

选择题	约15%
填空题	约25%
计算题	约40%
综合题	约20%

试题难易比例：

容易题	约30%
中等难度题	约50%
较难题	约20%

4.大纲说明

本考试大纲是命题的法规性文件，命题人员将严格按照其设计试卷、命制试题，这一点考生要一定注意到，它的地位和性质也是任何辅导资料所不能取代的；同时它又是考生复习的依据，考生必须仔细阅读和研究考试大纲，把握它的主要内容和能力要求。

四、2001年高等数学(一)命题特点

2001年数学命题的特点将是信息量较大，知识面宽，有一定的综合性，难度不会太大，题目总量不变。相应措施：

1.应掌握一些题型的快速解法，熟记重要的定理和公式，并能熟练运用，在考试时减少追忆的时间。

2.重点掌握常用的解题方法和技巧，尽可能多地看一点具有综合性的题目以启迪思维。

3.经常做数学练习，尤其对一些基础性的运算要非常熟练。

4.考试时思想一定要放松，情绪要平静。特别是当见到一些平时没见过的题时，千万别乱了方寸，要有成功的自信。

五、考生应注意的问题

1.吃透考试大纲要求，准确定位。

国家教育部考试中心制定的考试大纲，严格划定了考试的范围和难度要求，这是考生复习的依据。2001年的考试大纲与2000年的大纲接近，但有所不同，如对柯西中值定理等不再做要求，考生应仔细阅读本书第二部分各章节的考试范围与考试要求，并结合近年的试题体会考题的题型类别和难度特点。

2.重视对基本概念、基本定理和基本方法的复习，打好基础。

谈到基本概念、基本定理与基本方法，一些考生可能不以为然，事实上，只要对历年考题进行认真分析就可以看出，试题大多是对基础知识的考查，或是在大纲划定的基础知识上的稍加延伸、深化，是对基本概念、基本定理和基本方法的综合应用。

3. 加强综合能力的训练，力争在解题思路问题上有所突破。

"思路"是考生解决问题的突破口。本教程对题目都做思路上的分析，这正是本书最大的特点，以期对考生有所帮助。

4. 要合理安排时间，切忌搞突击。

数学成绩是长期积累的结果，准备时间可适当提前拉长，循序渐近。应在熟悉大纲的基础上，对考试必备的基础知识进行系统地复习；其后要注意归纳条理，掌握相应题型的解题思路。

5. 考前最后阶段，对基础知识作梳理，熟练记忆定理、公式，系统地做本书后所附的模拟试题，进行实践的训练，自测复习成果。

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数、极限与连续作为高等数学引论，在高等数学中占有非常重要的地位. 纵观历年考试，本章内容都占有相当的题目和分数. 本章重点：函数、极限和连续的概念. 要取得好成绩，请务必肯下功夫理解这三个重要概念并能灵活运用之.

§1.1　函　　数

函数是变量之间相互依赖关系的数学描述，是高等数学研究的主要对象.

一、大纲要求

[考试范围]

1. 函数的概念：函数的定义、函数的表示法、分段函数.
2. 函数的简单性质：单调性、奇偶性、有界性和周期性.
3. 反函数：反函数的定义、反函数的图像.
4. 函数的四则运算和复合运算.
5. 基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.
6. 初等函数.

[考试要求]

1. 理解函数的概念、会求函数的定义域、表达式及函数值. 会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单的分段函数的图像.
2. 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，会判断所给函数的类别.
3. 了解函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像)，会求单调函数的反函数.
4. 理解和掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程.
5. 掌握基本初等函数的简单性质及其图像.
6. 了解初等函数的概念.
7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

注意：以上考试要求范围比较广，对有些知识虽作了要求，但真正考到的可能性很小，即在考试中不可能面面俱到. 因此，结合对历年考题进行考点和热点分析，进一步剖析大纲要求，以期能帮助考生达到事半功倍的作用.

二、考点要点分析

在考点、要点分析过程中，主要是结合典型题目的分析来剖析考点、要点.

(一) 函数的概念

1. 定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，数集 D 叫做这

个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，y 的取值范围叫做**值域**，即 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

注意：定义域和对应法则是函数概念的两大要素. 判定两个函数相同的充分必要条件是定义域和对应法则都相同. 求函数的定义域是一重要题型，请重视.

2. 分段函数 分段函数是函数表示的一种形式，即在定义域内的不同点集内由不同的分析式子表示. 对于分段函数，不论它由多少段组成，它只能表示一个函数，而不是几个函数. 特别地，求分段函数值时，一定要从自变量所在的点集的分析式中去计算.

例 1 求下列函数的定义域：

$$(1)y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2};\quad (2)y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}.$$

思路分析 求函数的定义域，就是求使算式有意义时自变量可取的一切实数，所以往往是先列出不等式组，再解不等式组.

解 (1)$y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$，要使 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 有意义的自变量的值是 $1 - x^2 \neq 0$，因为 $1 - x^2 = 0, x = \pm 1$，所以 $x \neq \pm 1$.

要使 $\sqrt{x+2}$ 有意义的自变量的值是 $x + 2 \geqslant 0$，即 $x \geqslant -2$，

因此所求函数的定义域是 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2)$y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$，要求 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x \neq 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

所以定义域 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$ 或 $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, x \neq 0\}$.

例 2 求函数 $y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的定义域和值域.

思路分析 分段函数是一个函数，分段函数的定义域是各段自变量允许值集合之并，分段函数的值域是各段函数值集合之并.

解 定义域：$(-\infty, +\infty)$，值域：$[-1, 1]$.

例 3 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1)$f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$；

(2)$f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$；

(3)$f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

思路分析 如果两个函数：① 定义域相同，② 对应法则相同，则这两个函数相同，否则它们就不相同.

解 (1)$f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$ 不是相同函数，因为定义域不同.

(2)$f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 不是相同函数，因为对应法则不同.

(3)$f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$ 是相同函数，因为它们的定义域和对应法则均相同.

例 4　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试问：(1) $f(x^2)$，(2) $f(x+a)(a>0)$，(3) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域各是什么？

思路分析　$f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，这也就意味着 $f[g(x)]$ 中的 $g(x)$ 取值在 $[0,1]$ 上，即 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$.

解　(1) 因为 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，因此 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$；

(2) 因为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，所以 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$，因此 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a,1-a]$；

(3) 因为 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

因为 $a>0$，分两种情形：

当 $1-a<a$ 时，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组无解；

当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，上面不等式组的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$. 因此 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 $[a,1-a]$. 若 $a>\dfrac{1}{2}$，定义域不存在.

例 5　已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$.

思路分析　求函数表达式常用也往往是最重要的方法是变量替换，这种数学思想非常重要.

解　令 $t=e^x+1$，得 $e^x=t-1$ 代入 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$ 得

$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1,$$

因此函数 $f(x)=x^2-x+1$.

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\in[2,+\infty),\\ -x^2, & x\in[0,2),\\ -x, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$

求 $f[f(1)]$，$f[f(2)]$，$f[f(3)]$.

思路分析　解这类分段函数求值问题最重要的是搞清函数的具体定义范围，确定相应表达式.

解　因为 $1\in[0,2)$，所以 $f(1)=-1^2=-1<0$，故 $f[f(1)]=f(-1)=-(-1)=1$.

同理 $f[f(2)]=4$，$f[f(3)]=6$.

* 对于分段函数，要了解下面几个常见的分段函数.

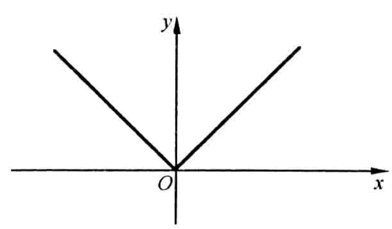

图 1－1(a)

1° 绝对值函数(图 1－1(a))

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

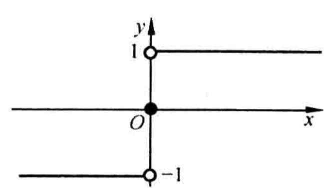

图 1－1(b)

2° 符号函数(图 1－1(b))

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

3° 取整函数(图 1 - 1(c))

$$f(x)=[x],\text{定义为“不超过 } x \text{ 的最大整数”}.$$

4° 单位阶跃函数(图 1 - 1(d))

$$x=u(t)=\begin{cases}1,t\geqslant 0,\\0,t<0.\end{cases}$$

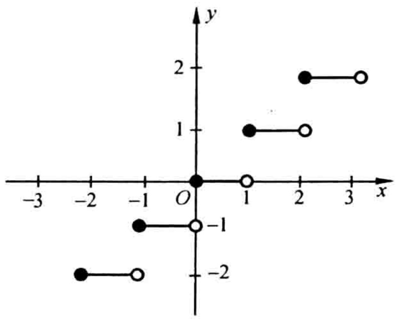

图 1 - 1(c)

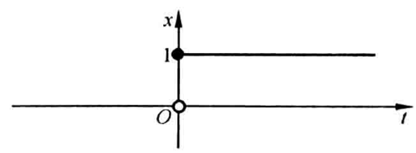

图 1 - 1(d)

(二) 函数的简单性质

下面对函数 $y=f(x)$ 给出有界性、单调性、奇偶性和周期性等四个基本性质.

1. 函数的有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $Z\subset D$. 如果存在正数 M,使得对于一切 $x\in Z$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 Z 上**有界**. 否则称 $f(x)$ 是无界的.

2. 函数的单调性　若对 Z 上的任意两点 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),称 $f(x)$ 在 Z 上**单调增加(或单调减少)**. 单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**.

若 $f(x)$ 在整个定义域 D 上单调增加(或单调减少),简称 f **单调增加**(或**单调减少**).

3. 函数的奇偶性　若定义域 D 在 x 轴上关于原点对称,当 $x\in D$ 时,有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为**偶函数**;又当 $x\in D$ 时,有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 奇函数的图形关于原点是对称的.

4. 函数的周期性　若存在 $T\neq 0$,当 $x\in D$ 时,$f(x+T)=f(x)$,称 $f(x)$ 为**周期函数**,满足上式的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的**周期**.

注意:① 判断函数奇偶性的方法:一是用定义,二是用图形. 一般地,奇 + 奇 = 奇;偶 + 偶 = 偶;奇 × 奇 = 偶,偶 × 偶 = 偶;奇 × 偶 = 奇;奇 + 偶 = 非奇非偶;定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数总可表示为一个奇函数与一个偶函数的和;

② 判别函数周期性的方法:一是用定义,二是用运算性质,一般是来求方程 $f(x+l)-f(x)=0$ 与 x 无关的 l 的非零常数解. 相同周期的两个周期函数经四则运算后仍为周期的函数;但非相同周期的函数之和未必为周期函数;若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

③ 两个单调增加(减少) 函数的和仍为单调增加(减少);但两个单调增加(减少) 函数之

差、积、商(分母不能为0)未必是单调增加(减少)的函数.

例7 判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　(2)$y=x(x-1)(x+1)$;

(3)$y=\sin x-\cos x+1$.

思路分析 判断奇偶性的方法一:根据定义,若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;方法二:根据图形,若 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称,则称 $y=f(x)$ 为奇函数;若 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称,则称 $y=f(x)$ 为偶函数,无论是奇函数还是偶函数,其定义域都是关于原点对称的数集.

解 (1)因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以此函数是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$,所以此函数是奇函数.

(3)因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq\pm f(x)$,所以此函数为非奇非偶函数.

例8 求 $f(x)=\sin 6x+\cos 15x$ 的周期.

思路分析 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数.

解 $\sin 6x$ 的周期是$\frac{2\pi}{6}$,$\cos 15x$ 的周期是$\frac{2\pi}{15}$,$\frac{2\pi}{15}$,$\frac{2\pi}{6}$ 和$\frac{2\pi}{15}$的最小公倍数为$\frac{2\pi}{3}$.所以$f(x)=\sin 6x+\cos 16x$ 以$\frac{2\pi}{3}$为周期.

(三)反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 W,如果对于 W 中任一y值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值,则**称变量 x 为变量y的函数**.记为 $x=\varphi(y)$,它为函数 $y=f(x)$ 的反函数.习惯上,$y=f(x)$ 的**反函数**记为 $y=f^{-1}(x)$.

注意:①$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合;$y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称;

②严格地讲,只有单调函数才有反函数.

例9 求下列函数的反函数:

(1)$y=\frac{1-x}{1+x}$;　(2)$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$.

思路分析 求 $y=f(x)$ 的反函数的步骤是:

①反解,即由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$　　(*)

②改写,即将(*)式中的自变量和因变量按习惯分别改用 x、y 表示,得 $y=\varphi(x)$.

解 (1)由 $y=\frac{1-x}{1+x}$,解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,所以反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(2)由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,所以反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(四)基本初等函数

中学里已学过的常量函数 C,幂函数 $x^{\mu}(\mu \in R)$,指数函数 $a^x(a>0, a \neq 1)$,对数函数 $\log_a x(a>0, a \neq 1)$,三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 以及反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.要熟练掌握它们的图像和相应的简单性质,这里就不再赘述.

(五)复合函数与初等函数

1.复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义,而 $W_2=\{u \mid u=\varphi(x), x \in D_2\}$,且 $W_2 \subset D_1$,那么,对于任一 $x \in D_2$,通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u \in W_2$ 与之对应.由于 $W_2 \subset D_1$,因此对于这个 u 值,通过 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应.这样,对于任一 $x \in D_2$,通过 u 有确定的 y 值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**.记作 $y=f[\varphi(x)]$,而 u 称为中间变量.

注意:① 当 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域交集非空时才能复合成 $y=f[\varphi(x)]$.不是任何两个函数都可以复合成复合函数的;② 中间变量可以不只一个,即复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

2.初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例 10 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$.求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

思路分析 这类问题要求理解复合过程,运算时按部就班.

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1, \\ 0, & |e^x|=1, \\ -1, & |e^x|>1,\end{cases}$$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x>0.\end{cases}$$

同理

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1=e, & |x|<1, \\ e^0=1, & |x|=1, \\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 11 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40^{\circ}$(见图 1-2),当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

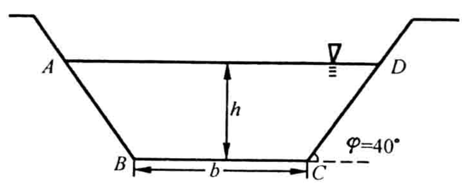

图 1-2

思路分析 建立函数关系除给出对应法则外,应当同时给出定义域.特别地,定义域的确定原则是:既要使表达式有意义,又要使实际问题

有意义.

解 $AB = DC = \frac{h}{\sin 40^\circ}$,

从 $S_0 = \frac{1}{2}h[BC + 2\cot 40^\circ \cdot h]$ 得 $BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h$,

所以 $L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$. 自变量 h 的取值应由不等式组 $\begin{cases} h > 0, \\ \frac{S_0}{h} - \cos 40^\circ \cdot h > 0 \end{cases}$ 确定,故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}$.

三、典型考题解析(1995 ~ 2000 年)

例 1 填空题(1996 年,3 分)

若 $f(x^2 + 1) = x^4 + 3x^2 + 2$,则 $f(x) =$ ______.

思路分析 主要考查对函数概念的理解,主要有两种方法.法一:令 $x^2 + 1 = u$ 用 $x^2 = u - 1$ 代入原式得 $f(u)$ 的表达式.法二:配方法.

解 法一:设 $x^2 + 1 = u$,则 $x^2 = u - 1$,于是有,

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (u-1)^2 + 3(u-1) + 2 = u^2 + u,$$

即 $f(u) = u^2 + u$,故 $f(x) = x^2 + x$.

法二:因为 $f(x^2 + 1) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1)$,

所以 $f(x) = x^2 + x$.

同类考题:

填空题:(1998 年,4 分)

设 $f(x + 1) = x^2 + 3x + 5$,则 $f(x) =$ ______.

例 2 选择题(1997 年,4 分)

函数 $y = \frac{1}{x}\ln(2 + x)$ 的定义域为 ( )

A. $x \neq 0$ 且 $x \neq -2$ B. $x > 0$

C. $x > -2$ D. $x > -2$ 且 $x \neq 0$

思路分析 函数定义域为使表达式有意义的 x 的取值范围.

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 2 + x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad x > -2 \text{ 且 } x \neq 0.$$

解 答案 D.

例 3 填空题(1999 年,4 分)

设 $y = 3^u$, $u = v^2$, $v = \tan x$,则复合函数 $y = f(x) =$ ______.

思路分析 理解复合过程,两个中间变量 u, v.

$$y = 3^u = 3^{v^2} = 3^{\tan^2 x}.$$

解 $3^{\tan^2 x}$.

例 4 选择题(1995 年,4 分)

函数 $f(x) = \cos(x^3)$ 在 xOy 平面上的图形是 ( )

A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称