21世纪高职高专计算机专业基础规划教材

计算机数学

JISUANJI SHUXUE

主 编 庞进生 李杰 贺学海

河南大学出版社

21世纪高职高专计算机专业基础规划教材

计算机数学

JISUANJI SHUXUE

主　编　庞进生　李　杰　贺学海

副主编　高新慧　翟伟利　谢时新

编　委（以姓氏笔画为序）

孙一丹　刘建明　李　杰　宋益荣

张　瑛　庞进生　贺学海　高新慧

谢时新　韩欲青　翟伟利

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学/庞进生,李杰,贺学海主编. —开封:河南大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-5649-0071-7

Ⅰ.①计… Ⅱ.①庞…②李…③贺… Ⅲ.①电子计算机—数学基础—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 174139 号

责任编辑 党兰学
责任校对 阮林要
封面设计 王四朋

出 版	河南大学出版社		
	地址:河南省开封市明伦街 85 号		邮编:475001
	电话:0378—2825001(营销部)		网址:www.hupress.com
排 版	郑州市今日文教印制有限公司		
印 刷	河南郑印印务有限公司		
版 次	2010 年 9 月第 1 版	**印 次**	2010 年 9 月第 1 次印刷
开 本	787mm×1092mm 1/16	**印 张**	17
字 数	403 千字	**印 数**	1—2000 册
定 价	32.00 元		

前　　言

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，担负着为国家培养并输送生产、建设、管理、服务第一线高素质应用型人才的重任. 为加强高职高专教育的教材建设工作，我们在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等应用型人才和教材建设方面取得的成功经验，突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必须、够用、实用”为原则，以培养学生良好的学习习惯和创新精神为目的编写了本教材.

我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了高职高专院校负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入研讨，结合河南省内高职高专院校专业、学生以及教育教学的特点编写了本教材，并突出以下特点：

(1)本教材重视基本概念、基本运算技能的训练，内容由浅入深、循序渐进，结构严谨，概念、公式和定理多采用以例引入，淡化了理论推导与证明. 这样既保持了数学学科理论体系的完整，又增加了数学的实用性.

(2)本教材结合学生的专业特点，对概念、定理等采用了学生容易理解的方式进行叙述，便于学生自学；同时在多数章节后增加了与其章节相联系的应用实例，加强了与专业相结合的教学，培养了学生运用数学分析方法解决实际问题的能力.

(3)本教材增加了数学实验的内容，以培养学生运用数学软件和计算机等先进设备处理数学中的烦琐运算和解决有关实际问题的能力，同时简化了一些难度较大的以及技巧和方法较强的教学内容.

本教材包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，向量代数与空间解析几何初步，无穷级数，线性代数初步，图论等内容，其中带 * 号的可作为选学内容. 本教材大约需要 150 学时.

本书由庞进生、李杰、贺学海任主编，高新慧、翟伟利、谢时新任副主编，参加本书编写的有：孙一丹、刘建明、李杰、宋益荣、张瑛、庞进生、贺学海、高新慧、谢时新、韩欲青、翟伟利；全书由庞进生、李杰统稿和定稿。

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，敬请读者批评指正.

编者
2009 年 7 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

在我们周围的世界里，变化的量随处可见，变化的量之间相互制约的关系普遍存在，如行驶的汽车其路程随速度和时间而改变，气温随时间而改变，商品的需求量随价格而改变. 这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念——函数. 本章将在复习函数概念的基础上，通过对数列极限的研究，引入函数极限的概念，进而学习极限的计算方法，为随后微积分的学习奠定基础.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

一、函数的定义

在观察自然现象或工程问题时，常常发现几个变量在变化，它们的变化并非彼此无关，而是相互依赖地按照一定的规律在变化. 这是物质世界的一个普遍规律. 于是有如下的函数概念.

定义 1.1　设 D 是非空数集. 若存在对应关系 f，对 D 中任意数 $x(\forall x\in D)$，按照对应关系 f，总对应唯一一个 $y\in R$，则称 f 是定义在 D 上的函数，表示为

$$f: D\to R,$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，表示为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域，函数值的集合 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

关于函数概念的几点说明：

(1) 用符号“$f: D\to R$”表示 f 是定义在数集 D 上的函数，十分清楚、明确. 在具体函数中需要将对应关系 f 具体化为“$y=f(x)$”，有时甚至笼统地说“$f(x)$ 是 x 的函数(值)”.

(2) 定义域是构成函数的重要因素之一，使得函数有意义的自变量的取值范围构成了函数的定义域. 例如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，如果不显式地指出它的定义域，那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合，即闭区间 $[-1,1]=\{x|\sqrt{1-x^2}\}$.

具有实际意义的函数，它的定义域要受实际意义的约束. 例如，球的半径 r 与该球的体积 V 之间的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

其中 π 是圆周率，是常数. 从抽象的函数来说，r 可取任意实数；从它的实际意义来说，半径 r 只能取正数. 因此，它的定义域是区间 $(0,+\infty)$.

(3) 通过函数的定义可以发现，构成函数的两个重要因素是定义域和对应关系. 显然，只有当两个函数的定义域和对应关系完全相同时，才认为它们是相同的. 例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应关系完全相同，所以它们是相同的函数. 又如，函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数.

二、函数的表示

表示函数，要把它的定义域和对应关系表述清楚，一般可根据函数自身的特点选择适当的方法. 常用的方法有：表格法、图像法和公式法(解析法).

(1) 表格法

以表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示法.

(2) 图像法

用图形表示函数的方法称为函数的图像表示法.

(3) 公式法(解析法)

用数学式子表示函数关系的方法称为函数的公式表示法，也称为解析法. 在高等数学中讨论的函数几乎都是用公式法表示的.

微积分中还经常碰到这样的情形，一个函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数叫做分段函数. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0\end{cases}$$

是定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$ 的一个分段函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$.

三、数列

数列是一类特殊并且很有用的函数.

定义 1.2 定义在自然数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数 $f(n)$ 称为数列.

$\forall n\in\mathbf{N}^+$，设 $f(n)=x_n$. 因为自然数能够按照大小顺序排列起来，所以数列的值域 $\{x_n | n\in\mathbf{N}^+\}$ 中的数也能够相应地按照自然数 n 的顺序排列起来，即

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots. \tag{1}$$

x_n 称为数列(1)的第 n 项或通项. 将数列(1)简单地表示为 $\{x_n\}$.

1.1.2 函数的性质

一、函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意 $x\in D$，都有

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数；函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 都是偶函数；而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1－1 所示.

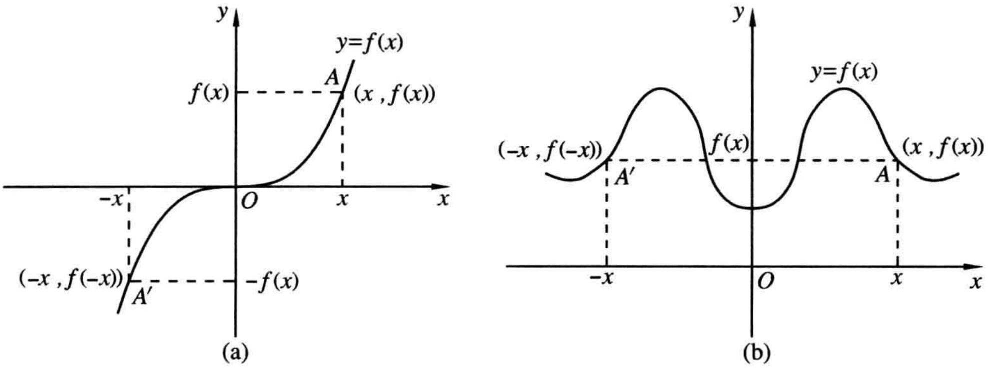


图 1－1

例 1　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解　因为

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\ln[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\
&=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

二、函数的单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果对于区间 D 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加（或单调减少），如图 1－2 所示.

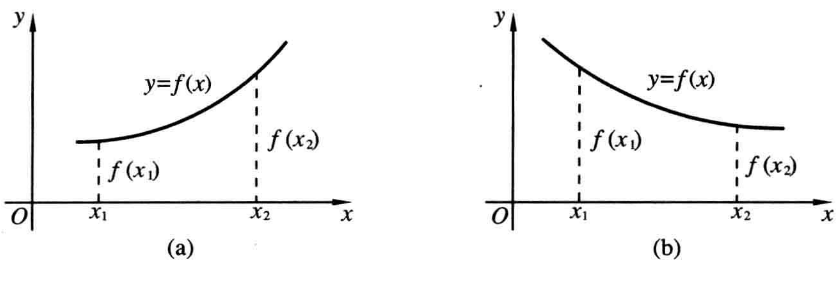


图 1－2

例 2　判断函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,0)$ 的单调性.

解 对于任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，若 $x_1<x_2$，则有 $x_1-x_2<0$.

又因为 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，所以 $x_1+x_2<0$.

故
$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0,$$
即
$$f(x_1)>f(x_2).$$
因此函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的.

三、函数的周期性

定义 1.5 一般地，对于函数 $y=f(x)$，设其定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期. 周期函数的图形特点是：在其定义域内间隔为 T 的区间上，函数图形有相同的形状.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数(如图 1—3 所示).

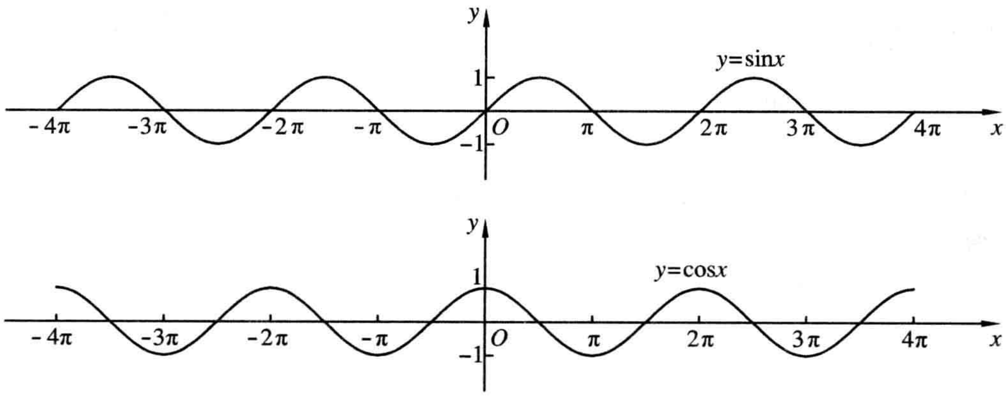


图 1—3

四、函数的有界性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于 (a,b) 内的任意 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界；如果不存在这样的数 M，称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上的图像位于以直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 为边界的带形区域之内.

例如，对于任意实数 x，都有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 有界；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，如图 1—4 所示.

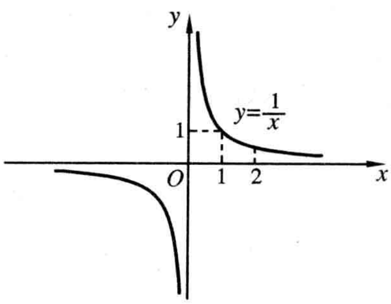


图 1—4

1.1.3 反函数

在圆的面积公式(函数) $S=\pi r^2$ 中，半径 r 是自变量，面积 S 是因变量，即对任意半径

$r\in(0,+\infty)$，对应唯一一个面积 S. 反之，对任意面积 $S\in(0,+\infty)$，也对应唯一一个半径 r，即 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 就是函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

对给定的函数 $y=f(x),x\in D$，由函数定义，$\forall x\in D$，按照对应关系 f，对应唯一一个 $y\in f(D)\subset R$，即单值对应. 反过来，$\forall y\in f(D)$ 就不一定只有一个 $x\in D$，使 $y=f(x)$，即一个函数不一定存在反函数.

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义. 若 $\forall x_1,x_2\in D$，有

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上一一对应.

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 在 D 上一一对应，即 $\forall y\in f(D)$，存在唯一一个 $x\in D$，使 $f(x)=y$，这是一个由 $f(D)$ 到 D 的新的对应关系，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，表示为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D).$$

注　(1) 由反函数的定义不难看到，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域恰好是函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

(2) 习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数经常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1　求函数 $y=\mathrm{e}^{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\mathrm{e}^{x+1}$ 得到 $x+1=\ln y$. 从而 $x=\ln y-1$. 交换 x 和 y，得 $y=\ln x-1$. 所以 $y=\mathrm{e}^{x+1}$ 的反函数为 $y=\ln x-1$.

1.1.4　复合函数

两个或两个以上的函数用中间变量传递的方法能生成新的函数. 例如，函数 $y=\ln u$ 与 $u=x-1$ 由中间变量 u 的传递生成新函数

$$y=\ln(x-1).$$

在这里，y 是 u 的函数，u 又是 x 的函数. 于是，通过中间变量 u 的传递得到 y 是 x 的函数. 为了使函数 $y=\ln u$ 有意义，必须要求 $u>0$，为了使函数 $u=x-1>0$，必须要求 $x>1$. 仅对函数 $u=x-1$ 来说，x 可取任意实数. 但是，对生成的新函数 $y=\ln(x-1)$ 来说，必须要求 $x>1$.

定义 1.9　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y 也是 x 的函数. 我们称这样的函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例如，函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$. 函数 $u=(x-1)(2-x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. 为了使其生成复合函数，必须要求

$$u=(x-1)(2-x)\geqslant 0,\ \text{即 } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

于是，对于 $\forall x\in[1,2]$，函数 $u=(x-1)(2-x)$ 与 $y=\sqrt{u}$ 生成了复合函数

$$y=\sqrt{(x-1)(2-x)}.$$

以上是两个函数生成的复合函数.不难将复合函数概念推广到有限个函数生成的复合函数.例如,三个函数

$$y=\sqrt{u},u=\ln v,v=2x+3$$

生成的复合函数是

$$y=\sqrt{\ln(2x+3)},x\in[-1,+\infty).$$

我们不仅能够将若干个简单函数生成为复合函数,而且还要善于将复合函数"分解"为若干个简单函数.例如,函数

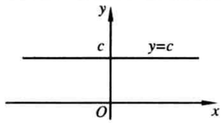
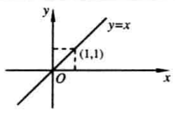
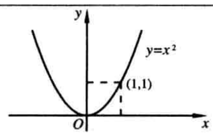
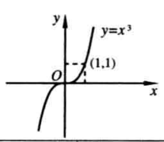
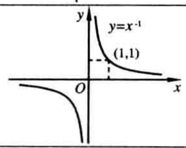
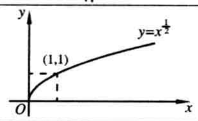
$$y=\tan^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$$

是由五个简单函数 $y=u^5,u=\tan v,v=\sqrt[3]{w},w=\lg t,t=\arcsin x$ 所生成的复合函数.

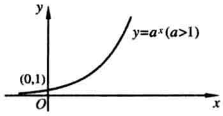
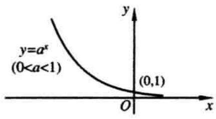
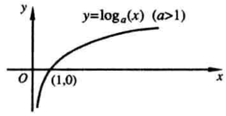
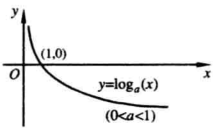
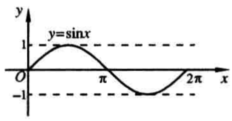
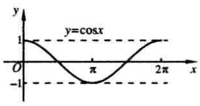
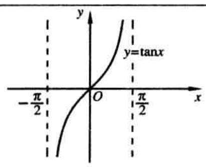
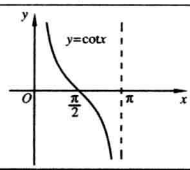
1.1.5 初等函数

在数学发展过程中,形成了最简单最常用的六类函数,即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这六类函数称为基本初等函数.这些基本初等函数在中学已经学过,现在表 1－1 中列出.

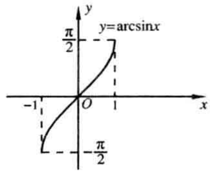
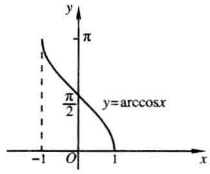
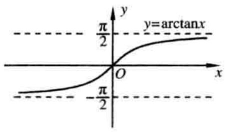
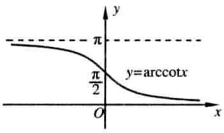
表 1－1 基本初等函数

<table>
<tr><th>名称</th><th colspan="2">函数</th><th>定义域与值域</th><th>图像</th><th>特性</th></tr>
<tr><td>常数函数</td><td colspan="2">$y=c$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>偶函数
有界</td></tr>
<tr><td rowspan="5">幂函数</td><td rowspan="5">$y=x^a$</td><td>$y=x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^2$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[0,+\infty)$</td><td></td><td>偶函数
在$(-\infty,0)$内单调减少
在$(0,+\infty)$内单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^3$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
单调增加</td></tr>
<tr><td>$y=x^{-1}$</td><td>$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</td><td></td><td>奇函数
单调减少</td></tr>
<tr><td>$y=x^{\frac{1}{2}}$</td><td>$x\in[0,+\infty)$
$y\in[0,+\infty)$</td><td></td><td>单调增加</td></tr>
</table>

续表

名称	函数	定义域与值域	图像	特性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq kx+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cos x$	$x\neq kx(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

续表

名称	函数	定义域与值域	图像	特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少,有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合而构成的,并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\lg\sin x$,$y=\sqrt{1+x^2}$,$y=\arcsin\frac{1}{x}$,$y=\frac{\cos x}{3+2x}$等都是初等函数.

分段函数若可以表示成一个算式,则为初等函数,否则不是.如

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, x>0,\\0, x=0,\\-x, x<0\end{cases}$$

是初等函数,可以看作是由函数 $y=\sqrt{u}$和 $u=x^2$ 复合而成的函数.又如

$$y=\begin{cases}x-1, x<0,\\x+1, x>0\end{cases}$$

不能用一个式子表示,所以不是初等函数.

1.1.6 函数模型及建立

用数学方法解决实际问题时,有时要建立函数关系(或称数学模型),因此有必要掌握建立数学模型的方法.下面从几个简单的实际问题来说明建立函数关系(或数学模型)的过程.

例1　某运输公司规定货物的运价为：在 a km 以内，每 km · t 为 k 元；超过 a km 时，超过部分每 km · t 为 $\frac{4}{5}k$ 元．求运价 m 和里程 s 之间的函数关系．

分析：当里程 $s \leqslant a$ 时，每 km · t 为 k 元，所以运价 $m=ks$．当 $s>a$ 时，运价分成两部分：前 a km 时每 km · t 为 k 元，所以运价为 ka；后 $(s-a)$km，每 km · t 为 $\frac{4}{5}k$ 元，所以运价为 $\left[\frac{4}{5}k(s-a)\right]$，所以运价 m 和里程 s 之间的函数关系为分段函数．

解　根据题意可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, 0<s\leqslant a, \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), s>a. \end{cases}$$

该分段函数的定义域为 $(0,+\infty)$．

例2　用铁皮做一容积为 V 的圆柱形罐头盒，试将它的表面积表示为底面半径的函数．

解　设罐头盒的底半径为 r，表面积为 S，且设其高为 h（如图1－5）．

根据体积公式和面积公式有：

$$V=\pi r^2 h,$$
$$S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

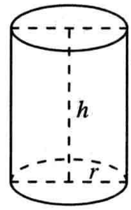


图1－5

由 $V=\pi r^2 h$ 得 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，代入 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，可得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}, r\in(0,+\infty).$$

这就是罐头盒的表面积 S 与底面半径 r 的函数关系．

1.2　极限的概念与运算

极限是本书中最重要的概念之一，我们今后要学习的连续、导数、定积分、级数等概念都是基于极限而定义的．

1.2.1　数列的极限

一、数列极限的定义

当 n 无限增大时，观察下面几个无穷数列的变化趋势：

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$；

(3) $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}},\cdots$;

(4) $2,-2,2,-2,\cdots,(-1)^{n+1}\cdot 2,\cdots$.

通过观察,我们发现,当 n 无限增大时,数列的变化趋势为:

(1) $x_n=\frac{1}{n}\to 0$;

(2) $x_n=\frac{n}{n+1}\to 1$;

(3) $x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}\to 0$;

(4) $x_n=2(-1)^{n+1}$ 在 2 和 -2 之间来回跳动,并不趋向于一个确定的值.

通过上述分析,下面给出数列极限的定义.

定义 1.10 设有数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于某个确定的常数 A,则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限(或数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A),记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

如果当 n 无限增大时,x_n 不能无限趋近于一个确定的常数,则称数列没有极限(或发散).

注 本应表示为 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$,但因为 n 是自然数,故数列的极限简写为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由定义可知,前面数列(1)、(2)、(3)均有极限,它们分别是:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}=0;$$

数列(4)没有极限.

二、数列极限的四则运算

前面介绍了数列极限的定义,并用观察法求出了一些简单数列的极限.但对于较复杂的数列,在求极限时很难用观察法求出,下面给出数列极限的四则运算法则.

定理 1.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

注 法则(1)、(2)可推广到有限多个函数的情况.特别地,在法则(2)中,若 $y_n=C$(C 是常数),则有 $\lim\limits_{n\to\infty}Cx_n=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n=CA$.

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-2}{n^2+1}$.