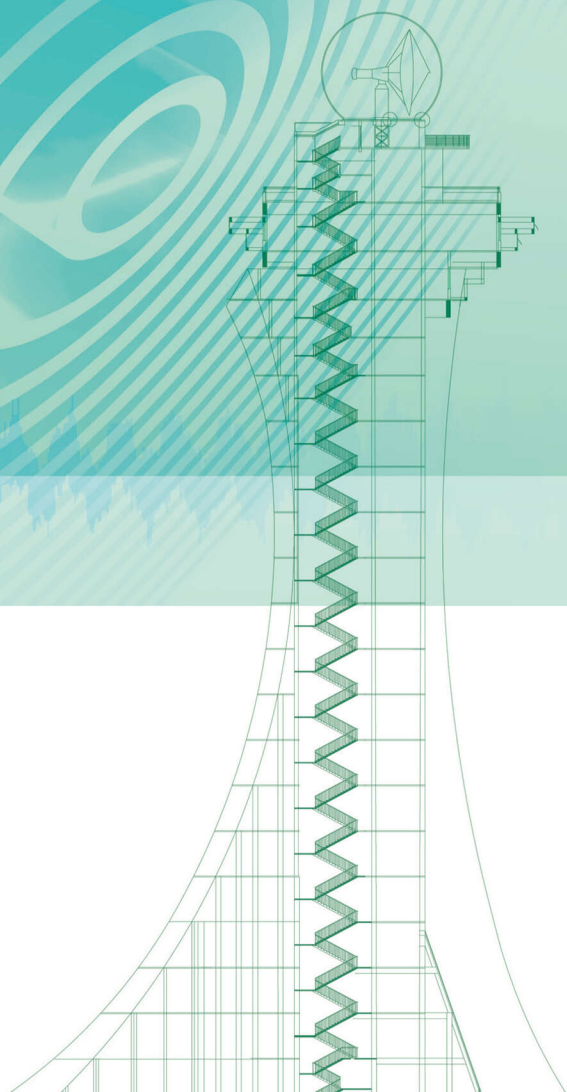


塔式结构频率设计

吴泽玉 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn



塔式结构频率设计

吴泽玉 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

为了避免设备与结构发生共振，通常对上置特殊设备的塔式结构的基本频率有特殊要求。为了满足设备工作需要，塔式结构一般较高，如何提高其基频成为设计者十分困惑的问题。本书主要探讨了通过合理改变结构参数，快速提高结构的基本频率的设计方法。

本书的频率提高方法计算程序都是基于 Matlab 语言编制，可以作为相关教师和工程技术人员学习利用 Matlab 编写有限元法的参考用书，也可以利用本书学习编写大型 Matlab 程序。

图书在版编目 (C I P) 数据

塔式结构频率设计 / 吴泽玉著 . -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2017.8
ISBN 978-7-5170-5844-1

塔... 吴... . 建筑结构 - 结构动力学
- 计算机辅助设计 - Matlab软件 . TU311.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 230298 号

书 名	塔式结构频率设计 TASHI JIEGOU PINLÜ SHEJI
作 者	吴泽玉 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	虎彩印艺股份有限公司
规 格	184mm×260mm 16 开本 8.5 印张 202 千字
版 次	2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
定 价	38.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

前言

为了避免设备与结构发生共振，通常对上置特殊设备的塔式结构的基本频率有特殊要求。为了满足设备工作需要，塔式结构一般较高，如何提高其基频成为设计者十分困惑的问题。本书主要探讨了通过合理改变结构参数，快速提高结构的基本频率的方法。

Matlab 有限元程序编写简单，可读性与可扩展性强且计算功能强大。作为高效计算机语言的 Matlab 程序，对数据的处理都基于矩阵理论，因此特别适合求解矩阵方程。将有限元法和 Matlab 程序相结合，先后求解了平面问题应力分析、动力特征值计算和动力响应等问题。

本书首先介绍了结构动力学知识、有限元离散方法和动力响应计算方法，在此基础上，分别给出了例题和 Matlab 程序；通过简单例题利用有限元方法给出了快速提高结构频率的基本手段；利用这些提高基频设计方法，先后设计并验证了商丘、郑州和驻马店 3 座气象雷达塔的频率调整，使其满足雷达工作需要；最后通过现场测试验证了有限元法的可靠性和有效性。

本书出版得到国家自然科学基金（50978232）、河南省教育厅项目（14B560029）和华北水利水电大学高层次人才启动基金（201246）资助，特此致谢！

由于作者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

吴泽玉

2017 年 5 月于华北水利水电大学龙子湖校区



目录

前言

第1章 结构动力学基础知识	1
1.1 结构动力学概述	1
1.2 有限元基本理论	7
第2章 人-结构耦合振动计算基本理论	32
2.1 动力平衡方程式	32
2.2 动力平衡方程式的数值求解	35
第3章 有限单元法和数值积分	49
3.1 一维单元	49
3.2 二维单元	53
3.3 三维单元	58
3.4 高斯积分	59
3.5 对数高斯积分	62
3.6 有限元法例题	63
第4章 塔式结构频率调整基本方法	71
4.1 概述	71
4.2 国内外研究状况	72
4.3 频率调整研究的方法、意义及主要内容	75
第5章 调整结构频率的基本方法	76
5.1 共振的放大原理	76
5.2 调整自振频率的基本方法	76
第6章 多普勒雷达塔的避频设计	83
6.1 商丘雷达塔	83
6.2 郑州雷达塔	90
6.3 驻马店雷达塔	96
第7章 塔式结构基本频率测试	101
7.1 频率测试必要性	101
7.2 塔式结构概况	101
7.3 测试方案的制定	101

7.4 测试结果计算	110
7.5 现场测试与有限元计算值对比分析主要结论	124
第8章 结论与展望	125
8.1 结论	125
8.2 展望	126
参考文献	127

第 1 章

结构动力学基础知识

1.1 结构动力学概述

结构动力学是研究结构在动力环境作用下发生反应的一门学科。一切物体都具有质量、阻尼和弹性等三大动力特性，在动力环境中均将产生不同程度的动力反应；振动是物体动力反应的主要形式之一。在动力环境的作用下，使得建筑结构的振动成为一种不可忽略的反应时，该结构便必须作为动力学的研究对象，进行相应的分析或设计。

结构的振动可分为线性振动和非线性振动。对于正常使用的建筑结构，一般均应当将其控制在线性振动的范围以内。

频率、振型等动力参数的计算以及基于动力参数的模态分析是结构线性振动理论的主要研究内容。结构在各种激励条件下的运动状态与激励条件之间的关系均可以通过相应的模态分析模型加以计算。

1.1.1 单自由度体系

对于单自由度体系，有阻尼条件下的结构动力方程为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) \quad (1.1)$$

式中 m , k , c ——结构质量、刚度和阻尼；

$F(t)$ ——外加荷载。

或

$$\ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t) \quad (1.2)$$

其中

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.3)$$

$$\xi = \frac{c}{2\omega m} \quad (1.4)$$

进一步，有

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.5)$$

式中 ω ——结构的圆频率或角频率，表示 2π 单位时间内结构的振动次数；
 f ——结构的自振频率，表示每秒单位内结构的振动次数；
 ξ ——结构的阻尼比。

对于振动圆频率为 $\bar{\omega}$ 的简谐激励荷载 $F(t) = F_0 \sin(\bar{\omega}t)$ ，结构的位移稳态振动解为

$$x(t) = X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi) \quad (1.6)$$

其中

$$X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.7)$$

称为振动的幅值。

$$\Phi = \arctan \frac{2\xi\omega\bar{\omega}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} \quad (1.8)$$

称为相位角。

已知位移响应的表达式后，可进一步得到结构的速度和加速度表达式，即

$$\dot{x}(t) = \bar{\omega} X_m \cos(\bar{\omega}t + \Phi) = \bar{\omega} X_m \sin \bar{\omega}t + \Phi + \frac{\pi}{2} \quad (1.9)$$

$$\ddot{x}(t) = -\bar{\omega}^2 X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi) = \bar{\omega}^2 X_m \sin(\bar{\omega}t + \Phi + \pi) \quad (1.10)$$

由式 (1.7) 可知，即使简谐激励荷载的幅值 F_0 不变，仅圆频率 $\bar{\omega}$ 发生变化，结构的振动幅值 X_m 也会发生变化。

现在研究位移、速度和加速度等 3 种响应的幅值分别在何种条件下可达到各自的最大值。

1. 位移幅值的极值条件

已知

$$X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.11)$$

为求 X_m 的极值，可对 $\frac{1}{X_m}$ 求导数，即

$$\frac{d}{d\bar{\omega}} [(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2] = 0 \quad (1.12)$$

可得当

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1.13)$$

时，位移幅值 X_m 达到最大值。

2. 速度幅值的极值条件

同理，由

$$\bar{\omega} X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{1}{\bar{\omega}} \sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.14)$$

可得当

$$\bar{\omega} = \omega \quad (1.15)$$

时，速度幅值 ωX_m 达到最大值。

3. 加速度幅值的极值条件

由

$$\bar{\omega}^2 X_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{1}{\bar{\omega}^2} \sqrt{(\omega^2 - \bar{\omega}^2)^2 + (2\xi\omega\bar{\omega})^2}} \quad (1.16)$$

可得当

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (1.17)$$

时，加速度幅值 $\bar{\omega}^2 X_m$ 达到最大值。

上述 3 种条件下的幅值极值所对应的荷载频率发生时，称为共振；对应的频率称为共振频率。表 1.1 列出了单自由度系统的各种特殊频率。表 1.2 列出了 3 种响应的幅频特性曲线上的几个特殊频率处的幅值。

表 1.1 各种特殊频率

各种情况	无阻尼	有阻尼
自由振动频率	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega \sqrt{1 - \xi^2}$
位移共振频率	ω	$\omega \sqrt{1 - 2\xi^2}$
速度共振频率	ω	ω
加速度共振频率	ω	$\frac{\omega}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}$

表 1.2 特殊频率处的幅值

幅值	$\bar{\omega} = 0$	$\bar{\omega} = \omega$	共振时	$\bar{\omega} = \infty$
X_m	$X_0 = \frac{F_0}{k}$	$\frac{X_0}{2\xi}$	$\frac{X_0}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$	0
ωX_m	0	$\frac{1}{2\xi} \frac{F_0}{k} \omega$	$\frac{F_0}{m} \frac{1}{2\xi\omega} = \frac{v_0}{2\xi}$	0
$\bar{\omega}^2 X_m$	0	$\frac{\omega^2}{2\xi} \frac{F_0}{k} = \frac{A_0}{2\xi}$	$\frac{A_0}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$	$A_0 = \frac{F_0}{m}$

1.1.2 模态位移法

1. 模态方程

多自由度系统的动力学基本方程为

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + Ku = P(t) \quad (1.18)$$

初始条件

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

存在, 有

$$(K - \omega_r^2 M) \eta_r = 0 \quad r=1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

其中, 各 η_r 间满足正交关系, 即

$$\eta_r^T K \eta_s = \eta_r^T M \eta_s = 0 \quad r \neq s \quad (1.21)$$

进而, 可得模态质量为

$$M_r = \eta_r^T M \eta_r \quad (1.22)$$

模态刚度为

$$K_r = \eta_r^T K \eta_r \quad (1.23)$$

模态矩阵为

$$\Phi = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_N] \quad (1.24)$$

模态力为

$$P_r(t) = \eta_r^T P(t) \quad (1.25)$$

通过解耦变换, 式 (1.18) 可变换成用模态坐标表示的单自由度模态方程, 即

$$M_r \ddot{\eta}_r + C \dot{\eta}_r + K \eta_r = P_r(t) \quad r=1, 2, \dots, N \quad (1.26a)$$

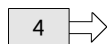
原初始条件变换为

$$\begin{cases} \eta_r(0) = \frac{1}{M_r} \eta_r^T M u(0) \\ \dot{\eta}_r(0) = \frac{1}{M_r} \eta_r^T M \dot{u}(0) \end{cases} \quad (1.27)$$

设外激励力为 $P_r(t) = F_r \cos(\bar{\omega}t)$, 并忽略阻尼效应, 则式 (1.26a) 可简化为

$$M_r \ddot{\eta}_r + K \eta_r = F_r \cos(\bar{\omega}t) \quad r=1, 2, \dots, N \quad (1.26b)$$

系统稳态响应解为



$$u(t) = \sum_{r=1}^N r \eta_r(t) = \sum_{r=1}^N r \frac{F_r}{K_r} \frac{1}{1 - (\bar{\omega}/\omega_r)^2} \cos(\bar{\omega}t) \quad (1.28)$$

故而，该方法又称为模态叠加法。

2. 模态截断

在模态分析中，并不需要知道全部的模态。一方面，在实际工程中并非所有的模态都能被外激励激起；另一方面，当系统的响应仅包含较少的模态时，模态叠加法将更能有效地显示出其优越性。模态选取的个数可根据计算精度要求或工程中的实际经验而定。

设模态选取的个数为 \hat{N} ，则有

$$\hat{u}(t) = \hat{\Phi} \hat{\eta}(t) = \sum_{r=1}^{\hat{N}} r \eta_r(t) \quad (1.29)$$

其中

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

对一个无阻尼系统的模态方程，即

$$M \ddot{\eta} + K \eta = \hat{P}(t) \quad (1.30)$$

可以写成 \hat{N} 个解耦的方程组，即

$$M_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = P_r(t) \quad r=1, 2, \dots, \hat{N} \quad (1.31)$$

1.1.3 模态加速度法

无阻尼多自由度体系运动方程为

$$M \ddot{u} + Ku = P(t) \quad (1.32)$$

对式 (1.32) 进行变换，可得

$$u = K^{-1}(P - M \ddot{u}) \quad (1.33)$$

将 \ddot{u} 近似地由模态位移法中的 \hat{u} 代替，则

$$\tilde{u} = K^{-1}(P - M \hat{u}) \quad (1.34)$$

\tilde{u} 即是由模态加速度法得到的近似解，再利用前面的结果，进一步展开得

$$\tilde{u} = K^{-1}P - K^{-1} \sum_{r=1}^{\hat{N}} M_r \ddot{\eta}_r \quad (1.35)$$

联立特征值方程

$$(K - \omega_r^2 M)_r = 0 \quad (1.36)$$

解得

$$\tilde{u} = K^{-1}P - \sum_{r=1}^{\hat{N}} \frac{1}{\omega_r^2} M_r \ddot{\eta}_r \quad (1.37)$$

其中，第一项称为“伪静力响应项”，第二项称为“模态加速度项”。从式 (1.37) 可以看出， r 越大的项，对响应的影响越小， r 趋向无穷时， $\frac{1}{\omega_r^2}$ 趋于零。因此，高振型对结构的整体振型影响不大，多数情况下可不必考虑。

【例 1.1】 图 1.1 所示为 4 层框架模型。其质量矩阵 $[\mathbf{M}]$ 、刚度矩阵 $[\mathbf{K}]$ 为已知，进而，其圆频率向量 $\{\omega\}$ 和振型矩阵 $[\Phi]$ 均为可求，激励 $P_1 = F_1 \cos(\omega t)$ 。

试求该结构的模态质量 M_r 、模态刚度 K_r 和模态力 P_r 。

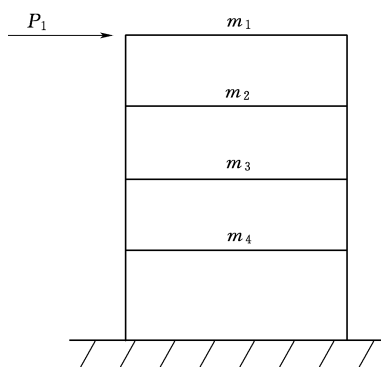


图 1.1 4 层框架模型

解 已知

$$[\mathbf{M}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad [\mathbf{K}] = 800 \quad [\mathbf{K}] = 800 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

进而

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 0.17672 \\ 0.87970 \\ 1.68746 \\ 3.12279 \end{vmatrix} \times 10^3 \quad \omega = \begin{vmatrix} 13.294 \\ 27.660 \\ 41.079 \\ 55.882 \end{vmatrix}$$

以及

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0.90145 & 0.15436 \\ 0.77910 & 0.09963 & 1.0000 & 0.44817 \\ 0.49655 & 0.53989 & 0.15869 & 1.0000 \\ 0.23506 & 0.43761 & 0.70797 & 0.63688 \end{vmatrix}$$



由式 (1.22)、式 (1.23) 以及式 (1.25) 可得

$$\begin{aligned} M_1 &= 2.87288 & M_2 &= 2.17732 & M_3 &= 4.36658 & M_4 &= 3.64239 \\ K_1 &= 507.695 & K_2 &= 1915.39 & K_3 &= 7368.43 & K_4 &= 11374.4 \\ P_1 &= F_1 & P_2 &= F_1 & P_3 &= 0.90145F_1 & P_4 &= 0.15436F_1 \end{aligned}$$

1.2 有限元基本理论

1.2.1 有限元法解题基本思想

有限元法的基本思想是将连续的求解区域离散成一组有限个, 且按一定方式相互连接在一起的单元组合体。由于单元能按不同的连接方式进行组合, 且单元本身又可以有不同的形状, 因此可以模拟几何形状复杂的求解域。

有限元法作为数值分析方法的另一个重要特点, 是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个节点的数值和其插值函数来表示。这样一来, 在有限元分析中, 未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量(也即自由度), 从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量, 就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值, 从而得到整个求解域上的近似解。显然, 随着单元数目的增加, 也即单元尺寸的缩小, 或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高, 解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的, 近似解最后将收敛于精确解。

运用有限元求解问题主要有以下 3 步。

1. 单元离散化

把整体求解域进行分割, 划分成有限多个简单的小单元体, 各个单元之间仅靠节点连接。

2. 单元分析

单元分析的任务就是要形成各个单元的刚度矩阵 $[k]^e$, 建立各单元的平衡方程。

3. 整体分析

整体分析的任务就是在单元刚度矩阵 $[k]^e$ 的基础上形成总体刚度矩阵 $[K]$, 以建立整个结构的平衡方程。求解方程, 得到各节点的位移, 再根据节点位移求出单元的应力和应变。

1.2.2 薄板有限元简介

1. 薄板有限元

薄板弯曲变形问题的基本假定(取薄板的中面为 xy 面, z 轴垂直于中面)如下:

(1) 变形前的中面法线在变形后仍是弹性曲面的法线, $\gamma_{xz} = 0, \gamma_{zy} = 0$ 。

(2) 变形前后薄板的厚度不变, $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 。

(3) 板弯曲时中面无伸缩, 中面 $\mu = \nu = 0$ 。

(4) 薄板内各平行层之间无相互挤压, $\sigma_z = 0$ 。

2. 位移模式

作为基本未知量的节点位移, 包括一个线位移 (挠度 ω) 和两个角位移 (绕 x 轴的转角 θ_x 及绕 y 轴的转角 θ_y), 即

$$\{\boldsymbol{\delta}_i\} = [\omega_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T \quad (1.38)$$

但只有挠度 ω 是独立的函数, 因此, 只选挠度 ω 作为位移插值函数。对于矩形单元而言, 位移模式可采用 12 项的多项式:

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \\ &= N_i \omega_i + N_{xi} \omega_{xi} + N_{yi} \omega_{yi} + N_j \omega_j + N_{xj} \omega_{xj} + N_{yj} \omega_{yj} \\ &\quad + N_m \omega_m + N_{xm} \omega_{xm} + N_{ym} \omega_{ym} + N_l \omega_l + N_{xl} \omega_{xl} + N_{yl} \omega_{yl} \end{aligned} \quad (1.39)$$

用矩阵可表示为

$$\{\boldsymbol{\omega}\} = [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (1.40)$$

式中 $[\mathbf{N}]$ ——形函数矩阵。

3. 荷载的移置

矩形薄板单元上与各个节点位移相对应的节点荷载可表示为

$$\{\mathbf{R}\} = [Z_i \quad T_{xi} \quad T_{yi} \quad Z_j \quad T_{xj} \quad T_{yj} \quad Z_m \quad T_{xm} \quad T_{ym} \quad Z_p \quad T_{xp} \quad T_{yp}] \quad (1.41)$$

由集中荷载 P 移置产生的荷载为

$$\{\mathbf{R}\}^e = [\mathbf{N}]^T P \quad (1.42)$$

由分布面力 $\{\bar{P}\}$ 移置产生的节点荷载为

$$\{\mathbf{R}\}^e = \iint [\mathbf{N}]^T \{\bar{P}\} dA \quad (1.43)$$

由分布体力 $\{P\}$ 移置产生的节点荷载为

$$\{\mathbf{R}\}^e = \iiint [\mathbf{N}]^T \{P\} dV \quad (1.44)$$

4. 单元的内力矩阵

单元内力为

$$\{\mathbf{M}\} = [\mathbf{M}_x \mathbf{M}_y \mathbf{M}_{xy}]^T \quad (1.45)$$

单元形变为

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (1.46)$$

单元应力-单元内力的关系为

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \frac{12}{l^3} Z \{\mathbf{M}\} \quad (1.47)$$

单元应变-单元形变的关系为

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = Z \{\mathbf{X}\} \quad (1.48)$$

单元形变-节点位移的关系为

$$\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (1.49)$$

单元内力-单元节点位移的关系为

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{D}] \{\mathbf{X}\} = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (1.50)$$

式中 $[\mathbf{B}]$ ——应变矩阵；

$[\mathbf{D}]$ ——弹性矩阵；

$[\boldsymbol{\delta}]$ ——内力矩阵。

5. 单元刚度矩阵和整体刚度矩阵

应用虚功原理建立薄板弯曲问题单元的虚功方程，得板单元的节点平衡方程为

$$\{\mathbf{F}\}^e = [\mathbf{K}]^e \{\boldsymbol{\delta}\}^e \quad (1.51)$$

式中 $[\mathbf{K}]^e$ ——单元刚度矩阵。

将结构上各节点的平衡方程集合起来进行整体分析，得到整个结构的平衡方程组为

$$[\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\delta}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (1.52)$$

式中 $[\mathbf{K}]$ ——整体刚度矩阵。

1.2.3 三维实体有限元简介

1. 常应变四面体单元

对于四面体单元，以 4 个角点 i, j, m, l 为节点。每个节点有 3 个平移自由度，一个单元有 12 个自由度，因此由广义坐标给出的位移函数是线性函数，即

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.53)$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi} = [1 \quad x \quad y \quad z]$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_{12}]$$

用 4 个节点坐标代入式 (1.53)，可得到

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^e = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{A}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}} \end{vmatrix} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} \quad (1.54)$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^e = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

由式 (1.54) 求出广义坐标 β ，再代入式 (1.53) 可得到

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m + N_l u_l \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m + N_l v_l \\ w &= N_i w_i + N_j w_j + N_m w_m + N_l w_l \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \\ N_j &= \frac{1}{6V} (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) \\ N_m &= \frac{1}{6V} (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

其中

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \\ 1 & x_l & z_l \end{vmatrix} \quad d_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_l & y_l \end{vmatrix} \quad (i, j, m, l)$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad (1.57)$$

式中 V ——四面体 i 、 j 、 m 、 l 的体积。

单元位移的矩阵为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \omega \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}^e = [\mathbf{I}N_i \quad \mathbf{I}N_j \quad \mathbf{I}N_m \quad \mathbf{I}N_l]\boldsymbol{\alpha}^e \quad (1.58)$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}^e = [u_i \quad v_i \quad \omega_i \quad u_j \quad v_j \quad \omega_j \quad u_m \quad v_m \quad \omega_m \quad u_l \quad v_l \quad \omega_l]^T \quad (1.59)$$

\mathbf{I} 是 3 阶单位矩阵。

2. 应变矩阵

在空间问题中，每个节点有 6 个应变分量，即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

将式 (1.58) 代入式 (1.60)，得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}^e = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_l]\boldsymbol{\alpha}^e \quad (1.61)$$

应变矩阵 \mathbf{B} 的每个分块子矩阵是 6×3 的矩阵，如

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{6V} \begin{Bmatrix} b_r & 0 & 0 \\ 0 & c_r & 0 \\ 0 & 0 & d_r \\ c_r & b_r & 0 \\ 0 & d_r & c_r \\ d_r & 0 & b_r \end{Bmatrix} \quad r=i, j, m, l \quad (1.62)$$

可以看出应变矩阵 \mathbf{B} 是常量阵，单元中应变分量都是常量，当然其应力分量也是常量。

3. 单元刚度矩阵

单元刚度矩阵 \mathbf{B} 可由下式计算：