分析力学研究进展

Advances in Analytical Mechanics

梅凤翔　吴惠彬　张永发　著

科学出版社

分析力学研究进展

Advances in Analytical Mechanics

梅凤翔　吴惠彬　张永发　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为作者 30 多年来在学术刊物上发表的有关分析力学的综述性文章的汇编, 计 15 篇, 其中英文 3 篇. 内容是对分析力学、非完整力学、Birkhoff 力学、对称性与守恒量、变分原理等的发展概况发表的一些见解.

本书可作为高等院校力学、物理学、数学等专业的大学生和教师, 以及对分析力学感兴趣的人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

分析力学研究进展/梅凤翔, 吴惠彬, 张永发著. —北京：科学出版社, 2019.10

ISBN 978-7-03-062464-2

Ⅰ.①分… Ⅱ.①梅… ②吴… ③张… Ⅲ.①分析力学-文集 Ⅳ.①O316-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 215954 号

责任编辑: 刘信力 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 10 月第 一 版 开本: 720×1000 B5
2019 年 10 月第一次印刷 印张: 18
字数: 360 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

1788 年伟大科学家 Lagrange J L 出版名著 *Mécanique Analytique*, 奠定了分析力学学科基础. 1834~1835 年 Hamilton W R 建立正则方程和 Hamilton 原理, 发展了分析力学. 人们对分析力学的理解基本停留在 Lagrange 力学和 Hamilton 力学之上, 对分析力学后来的发展知之甚少. 北京大学朱照宣先生等的《理论力学》(1982) 中指出:“拉格朗日力学和哈密顿力学 (还有其他一些内容) 可统称 ‘分析力学’, 以区别于原来的 ‘向量力学’ ……”“其他一些内容”是什么? 经过多年学习和研究, 我们将非完整力学 (1894) 和 Birkhoff 力学 (1927) 理解为“其他一些内容”. 这样就形成了分析力学的 4 个发展阶段: Lagrange 力学、Hamilton 力学、非完整力学、Birkhoff 力学. 此外, 对称性与守恒量、几何动力学是 4 个发展阶段中的重要问题.

本书作者与合作者, 在分析力学各阶段的发展概况方面发表了一些综述性文章, 涉及学科及学科分支的历史、现状与未来研究. 将这些文章汇集成册出版, 相信对关心分析力学的读者会有些帮助. 全书收集了 15 篇文章, 其中英文 3 篇, 可分为 5 类:

1) 分析力学发展, 包括分析力学的近代发展 (1987), 经典力学从牛顿到伯克霍夫 (1996), 中国分析力学 40 年 (1997), 经典力学的历史贡献与启示 (2012). 从中介绍了分析力学的 4 个发展阶段.

2) 非完整力学发展, 包括非完整系统力学的历史与现状 (1979), 非完整系统力学积分方法的某些进展 (1991), 非完整系统稳定性的若干进展 (1998), *Nonholonomic mechanics* (2000), 非完整约束系统几何动力学研究进展 (2004).

3) Birkhoff 力学进展, 包括 Birkhoff 系统动力学的研究进展 (1997), *On the Birkhoffian mechanics* (2001).

4) 对称性与守恒量进展, 包括关于力学系统的对称性与不变量 (1993), *Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems* (2014).

5) 变分原理进展, 包括 Hamilton 原理 (2016), Gauss 原理 (2016).

以上这些综述文章最早发表于 1979 年, 最迟的发表于 2016 年. 这些文章有当时作者的认识局限, 但仍有一定的史料价值和现实意义.

作者衷心感谢《力学进展》《力学与实践》《力学学报》《动力学与控制学报》《科技导报》等刊物的大力支持, 感谢合作者罗绍凯教授、赵跃宇教授、朱海平博

士、郭永新教授、陈向炜教授、李彦敏教授的大力支持, 感谢陈菊博士在整理资料、校对文本中付出的辛劳. 特别感谢科学出版社刘信力同志的精心组织与安排.

作　者

2017 年仲夏

目　　录

前言

第一章　分析力学进展 ····· 1

§1.1　分析力学的近代发展 ····· 1

§1.2　经典力学从牛顿到伯克霍夫 ····· 9

§1.3　中国分析力学 40 年 ····· 17

§1.4　经典力学的历史贡献与启示 ····· 24

第二章　非完整力学进展 ····· 41

§2.1　非完整系统力学的历史与现状 ····· 41

§2.2　非完整系统力学积分方法的某些进展 ····· 47

§2.3　非完整系统稳定性的若干进展 ····· 63

§2.4　Nonholonomic mechanics ····· 80

§2.5　非完整约束系统几何动力学研究进展: Lagrange 理论及其他 ····· 139

第三章　Birkhoff 力学进展 ····· 169

§3.1　Birkhoff 系统动力学的研究进展 ····· 169

§3.2　On the Birkhoffian mechanics ····· 180

第四章　对称性与守恒量进展 ····· 200

§4.1　关于力学系统的对称性与不变量 ····· 200

§4.2　Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems ····· 216

第五章　变分原理进展 ····· 258

§5.1　关于 Hamilton 原理 ····· 258

§5.2　关于 Gauss 原理 ····· 270

第一章　分析力学进展

§1.1　分析力学的近代发展

1788 年伟大科学家 Lagrange J L 出版名著《分析力学》. Lagrange 以及后来的 Hamilton、Jacobi、Poincaré 和 Ляпунов 等的著作是那样完美, 以致众多聪明的后人去想再也没有什么本质的东西可以补充到有限自由度动力系统中去了. 19 世纪末出现的经典非完整系统分析力学无疑是将 Lagrange 的成果推进了一大步, 而近 20 年兴起的近代分析力学使 Lagrange、Hamilton 的理论更加完美. 本文就近代分析力学以及经典分析力学的近代发展作一综述.

1. 近代分析力学

分析力学近代发展的重要表现在于它的现代化. 近 20 年来分析力学发生了根本变化, 促进这种变化的主要因素有两个. 一个是微分几何的进步, 用以得到更几何更本质的观点. 这种观点充满物理学 (如规范场论), 特别是力学. 另一因素是数学分析以及流形上泛函分析的近代发展. 荷兰著名力学家 Koiter 说得好: “为使力学得到进一步的发展, 我们一定要逐步应用更加抽象和更加精密的数学”.

Lagrange 的分析力学重分析而轻几何, 而今, 近代微分几何的发展使得 Lagrange 力学和 Hamilton 力学更加清晰、更加美妙. 近代分析力学的代表作有三本书或称三本圣经: Godbillon C 的 *Géometrie Différentielle et Mécanique Analytique* (《微分几何和分析力学》, 1969) [另一说法是 Souriau J M 的 *Structure des Systèmes Dynamiques* (《动力系统的结构》, 1970)]; Арнольд В И 的 *Математические Методы Классической Механики* (《经典力学的数学方法》, 1974); Abharam R 和 Marsden J E 的 *Foundations of Mechanics* (《力学基础》, 1978, 1980).

近代分析力学的主要内容有以下三个方面:

1.1　*流形与* Lagrange *力学*

Lagrange 力学用位形 (configuration) 空间描述力学系统的运动. 力学系统的位形空间具有微分流形结构, 其同胚群作用在此结构上. Lagrange 力学的基本思想和定理相对此群是不变的.

一个 Lagrange 力学系统用一流形 (位形空间) 和在流形的切丛上的函数 (Lagrange 函数) 给出.

所有使 Lagrange 函数不变的位形空间的单参数同胚群定义一守恒律 (即运动方程的首次积分).

1.2　辛 (sympletic) 流形与 Hamilton 力学

没有微分形式就不能说明 Hamilton 力学. 微分形式的信息包括外积、外微分、积分和 Stokes 公式.

流形上的辛结构是一闭的、非蜕化的微分 2-形式. 力学系统的相空间具有自然辛结构.

在辛流形上, 如同在 Riemann 流形上, 在矢量场和 1-形式之间存在自然同构. 辛流形上一个矢量场对应一个函数的微分, 称为 Hamilton 矢量场. 流形上一个矢量场确定一相流, 即单参数同胚群. 辛流形上 Hamilton 矢量场保持相空间的辛结构.

流形上的矢量场形成 Lie 代数. 辛流形上的 Hamilton 矢量场也形成 Lie 代数. 此类代数中的运算称为 Poisson 括号.

1.3　KAM 定理 [1)]

60 年代初, Колмогоров А Н、Арнольд В И 和 Moser J 三人对近乎可积 Hamilton 系统解的性质给出一些重要结论, 称之为 KAM 定理. 现就两自由度系统作大略说明.

设有一个两自由度可积的 Hamilton 系统, 当系统的 Hamilton 函数有较小变化 (扰动) 时, 我们就称之为近乎可积系统. 按照分析力学的方法, 可将方程用两个作用量变量 J_1, J_2 和两相应的角变量 θ_1, θ_2 表示, 由于存在 Hamilton 函数作为首次积分, 可以只考虑三个变量 J_1, θ_1, θ_2. 对于原来未受扰动的可积情形, 可选取适当的变换使 $J_1 =$ 常量, 于是解的形式是 $\theta_1 = \theta_1(t), \theta_2 = \theta_2(t)$, 轨线总位于一个环面上. 此环面称为不变环面, 它们与 $\theta_2 =$ 常量相截得一族同心圆. 对一特定的轨线, 它在 $\theta_2 =$ 常量上的历次截点全在同一圆上. 这些截点或者组成有限点的点集 (当旋转数为有理数时), 或者布满圆圈 (当旋转数为无理数时).

当系统从可积情形受到扰动变为近乎可积时, 这些同心圆圈将变形. KAM 定理指出, 由于面积的保守性, 如出现双曲点, 双曲点的个数将与椭圆点个数一样多, 个数与相应有理旋转分数表示时的分母相适应. 于是在每一双曲点附近形成 Poincaré 栅栏和相应的混沌河. 这种混沌河在外面是为 “陆地” 包住的. 这种混沌河网络有无穷多个, 而每一个河中的 “岛” 放大看时又重复这种结构. 这种层次也有无穷多, 在陆地上的闭轨道相当于三维空间 $(J_1, \theta_1, \theta_2)$ 的一个环面, 称为 KAM 环面. KAM 定理适用于近乎可积系统. 如果偏离很大, 定理不再成立, KAM 环面破裂, 外层有

1) 关于 KAM 定理的几段摘自朱照宣的 “浑 (混) 沌” 讲义.

混沌海, 有些混沌河与海相连起来.

近代分析力学也可以叫做 “几何动力学”, 系指用近代微分几何 (如流形、微分流形、辛流形等) 观点研究分析力学的原理和方法. 1982 年 6 月在意大利都灵召开的分析力学近代发展讨论会上, 许多力学家、数学家和物理学家介绍了他们在几何动力学方面的研究成果. 法国人在用近代微分几何方法研究天体力学、刚体力学、动力系统的结构等方面取得重要进展; 意大利人在分析力学中的辛关系上贡献突出 [1]. 近年, 我国力学家也十分重视几何动力学和其他数学方法的研究工作. 值得庆贺的是我国有一些年轻的力学工作者已经在几何动力学的研究工作上迈出了可喜的一步. 最近由中国力学学会召开的近代数学与力学讨论会上所反映的情况表明, 我国对近代分析力学的研究兴趣大大提高了. 我们希望今后在完整系统和非完整系统的几何动力学研究方向上不断深入下去并取得更大成果.

2. 经典分析力学的理论与应用

分析力学近代发展的另一方面是经典理论与应用的发展. 本文就 Lagrange 力学逆问题、相对运动动力学、非完整系统动力学、Vacco 动力学、单面约束系统动力学以及分析力学与其他分支的交缘等问题作一介绍.

2.1 Lagrange 力学逆问题

众所周知, 对完整保守系统, 只要造出 Lagrange 函数 L ($L=T-V, T$ 为系统动能, V 为势能), 就可列写出系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

其中 q_s 为系统的广义坐标. 方程 (1) 的显式

$$\sum_{s=1}^{n} A_{ks}\ddot{q}_s+B_k=0 \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

为一个二阶常微分方程组. 由 (1) 至 (2) 可称为 Lagrange 力学正问题. 所谓 Lagrange 力学逆问题是指对给定的一个二阶常微分方程组 (2) 或更一般的

$$F_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{t})=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

欲构造一个函数 L 使 (2) 或 (3) 可写成形式 (1). 自然, 此时的 L 一般说来已不再是动能与势能之差, 而且逆问题的解也不是唯一的.

Lagrange 力学逆问题的研究可追溯到 Helmholtz 时代 (1887). 如果方程 (3) 的

左边函数 F_s, 满足 Helmholtz 条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F_s}{\partial \ddot{q}_k}=\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}_s},\quad \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F_s}{\partial \ddot{q}_k}+\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}_s}\right)\\&\frac{\partial F_s}{\partial q_k}-\frac{\partial F_k}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\quad (s,k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

那么可按一定规则构造出 L 来.

Lagrange 力学逆问题首先在物理学界受到重视. 近十几年来取得一系列重要成果, 如构造 L 的 Engels 方法、Santilli 方法 [2] 等.

Lagrange 力学的一系列积分理论, 如循环积分、正则方程、Hamilton-Jacobi 方法等都基于方程 (1), 而实际问题中遇到的作用力却大多是非有势力. 因此, 克服这种局限性的办法之一就是寻求构造一个新的 Lagrange 函数使一般非有势力的 Lagrange 方程转化为等效的方程 (1). 至于非完整系统动力学的积分理论也大多与 Lagrange 力学逆问题相关 [3].

2.2　相对运动动力学

随着近代科学技术的发展, 对复杂力学系统的动力学研究变得越来越重要. 这些复杂系统的运动包括载体的运动以及被载系统相对于载体的运动, 例如, 考虑地球自转时刚体的定点转动、带旋转飞轮的刚体运动、旋转软轴的平衡、人造卫星以及机器人动力学等.

用分析力学的方法研究复杂系统的相对运动动力学, 不仅从方法上得到统一, 而且系统越复杂越显示其优越性. 20 世纪初, Whittaker 研究了受匀速转动约束的完整系统的 Lagrange 方程 [4], 60 年代 Лурье А И 研究了完整系统的一般相对运动动力学 [5]. 这些研究可以推广到非完整系统 [3]、变质量系统以及其他各种专门问题.

2.3　非完整系统动力学的两个基本问题

文献 [6] 已对非完整系统力学作了较全面的介绍, 这里仅就一阶非线性非完整约束的物理实现以及 Appell-Четаев 定义的适用性问题作一介绍.

(1) 一阶非线性非完整约束的物理实现问题

一阶线性非完整约束一般可以被动地实现, 而且靠接触、靠摩擦来实现. 例如, 平面上球的纯滚动、冰刀的运动等. 而一阶非线性非完整约束和高阶非完整约束的实现问题却是个近代问题.

目前已知的非线性非完整约束的著名例子主要有四个: Appell-Hamel 椅子轮 [7]、Добронравов 例 [8]、导向陀螺例 [9] 和 Новоселов 例 [10].

Appell-Hamel 椅子轮的例子已为众多研究者所接受. Delassus 证明, 所有非线性非完整约束都可以用线性非完整约束来实现; 而 Неймарк 和 Фуфаев 认为

Appell 想象的机构在极限过程中发生微分方程组的降阶, 导致蜕化系统的运动本质上不同于极限运动, 因此 Appell-Hamel 例的实现不能成立 [11].

Добронравов 例和导向陀螺例都是人为的、主动的要实现的约束, 不是被动实现的.

Новоселов 例十分有趣. 这是一个质量变化引起运动学变化而产生的非线性非完整约束. 设在固定水平面 oxy 上滚动的匀质球的质量变化规律为

$$m = m_0(1 - \beta_s) \tag{5}$$

其中 m_0, β 为常数, s 为球与平面接触点走过的弧长. 设球心坐标为 x, y, z 密度为 γ, 则

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{4}{3}\pi\gamma z^3 \\ \dot{m} &= 4\pi\gamma z^2\dot{z} = -m_0\beta\dot{s} \\ \dot{s}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此有

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{16\pi^2\gamma^2}{m_0^2\beta^2} z^4\dot{z}^2 \tag{7}$$

公式 (7) 就是一个一阶非线性非完整约束.

最近, 有人用近代数学方法证明, 非线性非完整约束不能靠接触、靠摩擦来实现 [12]. 当然, 主动地实现, 例如, 靠伺服系统总可以实现随便怎样的非线性非完整约束.

(2) Appell-Четаев 定义的适用性问题

对形如

$$f_\beta(q_s, \dot{q}_s, t) = 0 \tag{8}$$

的非线性非完整约束, Appell 和 Четаев 给出的虚位移方程为

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \tag{9}$$

这个定义 (或称条件) 对线性非完整约束自动成立. 正因如此, Appell-Четаев 定义被广泛采用. 然而, 正如 Четаев 本人所说, 这个定义不是唯一的办法, 还可以有其他办法. 因此, 有人认为, Appell-Четаев 定义是一种强加的条件.

虽然还没有人明确提出 Appell-Четаев 定义的适用性问题, 但人们在研究非线性非完整系统动力学时总是事先小心地表明 “研究 Четаев 型非线性非完整约束”.

Новоселов 虽提出一个所谓非 Четаев 型约束的例子 [13], 然而仍有导致微分方程组的降阶问题. 当然, 伺服约束的虚位移方程可以不满足 (9), 或称非 Четаев 型的. 问题在于, 是否存在非伺服约束而不满足 (9)? 这是值得探讨的问题.

以上两个问题都是非线性所带来的困难.

2.4 Vacco 动力学

Vacco 动力学 (Vacco 为意大利词, 有 “没事闲待着” 之意, 很费解) 是苏联莫斯科大学 Козлов 近年提出的研究不可积分约束系统动力学的一种新的数学模型、新的方法 [14−16]. 认为不可积分约束应分为两类: 一类是传统的非完整约束, 另一类是 Vacco 约束.

Козлов 采用半固定端变分, 在此变分下变更运动满足约束方程, 运动方程总可以写成 Hamilton 形式. 如果系统受有形如 (8) 的非完整约束, 且力是有势的, 则 Vacco 动力学的 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n)\tag{10}$$

其中 λ_β 为不定乘子. 实际上, Vacco 动力学方程 (10) 是作用积分 $\displaystyle\int_{t_0}^{t_2}L\mathrm{d}t$ 在条件 (8) 下取驻值的 Lagrange 问题的 Euler 方程.

传统 Четаев 型非完整系统的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,2,\cdots,n)\tag{11}$$

其中 μ_β 为不定乘子.

Vacco 动力学方程 (10) 与传统方程 (11) 一般说来是不等价的. 但并不意味着两组方程 (10) 和 (11) 没有共同解. 两方程组有共同解的充要条件是 [3]

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0\tag{12}$$

当然, 仅对极个别的非完整系统, 条件 (12) 才成立.

Козлов 认为无论在有限自由度力学中, 还是在连续介质力学中, 都不排除可能有多种模型. Vacco 动力学与传统非完整系统动力学就具有不同的模式. 首先, 对于完整系统这两个模型是一致的, 而对不可积分约束系统两者相距甚远. 其次, 在 Vacco 动力学中具有所谓 “弱确定性”—— 力学系统的运动单值地由它在某固定时刻的状态来确定, 而传统非完整系统动力学有 “强确定性”—— 运动被系统在每一时刻的状态确定.

文献 [17] 中所论及的一整套理论与结果基本与 Vacco 动力学相近.

2.5 单面约束系统动力学

人们研究分析力学大多以双面约束为前提, 很少考虑单面约束问题. 实际上, 单

面约束较双面约束更为一般, 也更为不易研究. 一球沿一粗糙平面纯滚动, 另一与前一粗糙平面相垂直的平面对球来说便是一个简单的单面完整约束; 球沿粗糙平面在某固定方向又滚又滑 (限制滑动发生在一个方向上) 乃是一个简单的单面非完整约束. 研究又滚又滑比研究纯滚动更为一般, 也更为困难. 在工程实际中, 如带滚轮系统的送输机械, 往往不是每个轮子都作纯滚动, 总是有些轮子又滚又滑的. 如果系统的运动发生在有限空间中, 也只能用单面约束系统动力学来研究.

过去人们对单面约束系统静力学, 如单面约束系统的虚位移原理 [18], 有些了解. 近年, 对单面约束系统动力学的研究兴趣大大提高并取得了一些进展 [19,20].

2.6 分析力学与其他分支的交缘

分析力学在与其他力学分支和技术发展中得以应用与发展. 下面所述的六个方面值得我们注意与重视.

(1) 分析力学与刚体力学

分析力学作为一种方法应用于邻近分支, 出现诸如刚体分析力学、多刚体系统分析动力学、陀螺系统分析动力学、变质量体分析力学等.

(2) 分析力学与机器人动力学

目前迅速发展的机器人动力学广泛应用分析力学中的 Lagrange 方程、Appell 方程、Gauss 原理等, 而在机器人动力学中有可能实现高阶非完整约束.

(3) 分析力学与宇航力学

苏联人造地球卫星联盟 4 号与联盟 5 号对接问题中, 要求两卫星以同样角速度转动, 否则就会使联结件发生扭转而破坏. 这样一个技术问题需要用非完整系统动力学来研究.

(4) 分析力学与滚轮系统的线路稳定性

滚轮系统 (自行车、摩托车、汽车、火车车厢、飞机起落架等) 一般都是非完整系统. 自行车向右倾斜时, 需向右转动手把才不致摔倒. 这一日常现象可用轮滚系统的线路稳定性理论给以解释. 即使轮胎制造得非常好、在极平坦的路面上行驶, 汽车在一定速度范围内也会失去稳定、失去控制. 这一技术问题不能用随机干扰解释, 而可用非完整系统的线路稳定性理论加以说明.

(5) 分析力学与计算力学

电子计算机进入分析力学的问题值得重视. 微分变分原理和积分变分原理应用于工程近似计算的研究工作已经开始并逐步深入.

(6) 分析力学与工程力学系统

近代的动力机、运输机及发动机等一类机器, 不论原动力是机械的还是电力的, 它们大多数都可构成所谓工程力学系统. 20 世纪 30 年代 Kron 对旋转电机的研究, 50 年代近藤一夫等对旋转水力机以及实际力学系统中各种复杂性质的研究都相当

出色 [21]. 今后, 对复杂工程力学系统的理论背景进行深入探讨将是十分有意义的工作.

3. 结语

Ишлинский 的下面两段话是正确的, “力学是大科学的组成部分, 它在直接保证加速科学技术进步的科学中占有中心位置之一” “在利用物理学、数学分析和计算技术方法的基础上来处理工程问题的科学基础方面, 力学起主要作用”. 分析力学作为整个力学的基础和新学科的生长点之一, 应该在理论与实际两个方面不断向前发展.

参 考 文 献

[1] Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, T I, Academy of Sciences of Turin, Turin, June 7–11, 1982

[2] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics I, S-V, 1978

[3] 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985

[4] Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge, 1904

[5] Лурье А И. Аналитическая Механика, М, 1961

[6] 梅凤翔. 非完整系统力学的历史与现状. 力学与实践, 1, 4, 1979

[7] Appell P. Rendel circole mathematic di Palermo, T. 32, 1911

[8] Добронравов В В. Основы механнки неголономных систем, М, Высшая-школа, 1970

[9] Dooren R V. Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 14th IUTAM congress, Delft, The Netherlands, 30 August-4 September, 1976

[10] Новоселов В С. Вестн. ЛГУ, 1, 1960

[11] Неймарк Ю И, Фуфаев Н А. Динамика неголономных систем, М, 1967

[12] Бренделев В Н. Вестн. МГУ, Математнка, Механика, 1, 1983

[13] Новоселов В С. Уч.зап.ЛГУ, 280, 1960

[14]—[16] Козлов В В. Вестн. МГУ, Математика, Механика, 3, 1982; 4, 1982; 3, 1983

[17] Edelen D G B. Lagrangian mechanics of nonconservative nonholonomic systems, 1977

[18] 汪家訑. 分析动力学. 北京: 高等教育出版社, 1958

[19] Baumgarte J. ZAMM, 8, 1984

[20] Иванов А П. ПММ, Т. 49, В. 5, 1985

[21] 近藤一夫, 等. 工程力学系统. 刘亦珩译. 上海: 上海科技出版社, 1962

(原载《力学与实践》, 1987, 9(1): 10–15)

§1.2 经典力学从牛顿到伯克霍夫

几千年来, 人类对物质机械运动的认识, 即对力学规律的认识, 经历了由浅入深, 由表及里的过程, 人们对物质世界的认识总是在原先积累基础上进一步得到深化 [1].

牛顿 1687 年发表《自然哲学的数学原理》, 奠定了经典力学的基础. 三百年来, 经典力学经历了牛顿力学到拉格朗日力学, 拉格朗日力学到哈密顿力学, 哈密顿力学到伯克霍夫力学的漫长发展过程, 促进这个发展过程的原因主要有二: 一是生产和技术发展的需要, 另一是学科和科学自身发展的规律. 在一个时期技术走在前面, 在另一时期科学走在前面. 科学与技术总是相互交融, 互相促进的. 经典力学与近代力学、现代力学一样, 自身总是不断向前发展的, 而人们对经典力学的认识也在不断深化.

本文简述经典力学从牛顿力学到伯克霍夫力学的发展过程, 经典力学各阶段的经典与现代内容及其科学意义.

1. 牛顿力学

1.1 牛顿力学的内容

牛顿力学以牛顿运动定律和万有引力定律为基础, 研究速度远远小于光速的宏观物体的运动规律. 牛顿在《自然哲学的数学原理》(1687 年) 中提出了物体运动的三条基本规律, 即牛顿三定律.

牛顿第一定律, 即惯性定律, 它指出: 任何一个物体将保持它的静止状态或做匀速直线运动, 除非有施加于它的力迫使它改变此状态.

牛顿第二定律, 即运动定律, 它指出: 物体运动量的改变与所施加的力成正比, 并发生于该力的作用线方向上. 这里 “运动量的改变” 就是质点动量的变化率. 这个定律表示为公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

式中, m 为质点的质量, $\boldsymbol{v}$ 为质点的速度, $m\boldsymbol{v}$ 为质点的动量, $\boldsymbol{F}$ 为所施加的力.

牛顿第三定律, 即作用和反作用定律, 它指出: 对于任何一个作用必有一个大小相等而方向相反的反作用.

牛顿第一定律在伽利略的著作《关于两门新科学的谈话和数学证明》(1638 年) 中已有叙述, 笛卡儿在形式上又做过改进 (1644 年). 牛顿第三定律是牛顿总结雷恩、沃利斯和惠更斯等的结果而得出的.

牛顿万有引力定律是牛顿在行星运动的开普勒定律以及其他人成果上用数学方法导出的.

牛顿力学强调力、动量等具有矢量性质的量, 因此牛顿力学可称为矢量力学.

1.2　牛顿力学的意义

牛顿三定律为力学奠定了坚实的基础, 并对其他学科的发展产生了巨大影响. 牛顿三定律和万有引力定律把地球上的力学和天体力学统一到一个基本力学体系中, 创立了经典力学的理论体系, 实现了自然科学的第一次大统一.

牛顿运动定律是就单个自由质点而言的. 达朗贝尔在著作《动力学》(1743 年) 中指出, 牛顿第二定律也适用于非自由质点. 将牛顿第二定律 (1) 应用于质点系, 有近代的形式

$$m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{2}$$

式中, m_i 为系统第 i 个质点的质量, $\boldsymbol{v}_i$ 是它的速度, $\boldsymbol{F}_i^a$ 是对它施加的主动力, $\boldsymbol{F}_i^c$ 是它所受的约束力. 牛顿第二定律 (2) 可表示为达朗贝尔原理的形式

$$-m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c = 0 \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{3}$$

今天, 牛顿第二定律 (2) 作为大学本科《理论力学》课程的内容已成为学习和研究经典力学的基础. 由牛顿第二定律可以导出质点系动力学普遍定理, 进而可以导出刚体和刚体系统的动力学方程. 以三条基本定律为基础的牛顿力学不仅在天体力学中, 物理学中, 而且在现代工程技术中有十分重要的价值.

牛顿根据运动规律导出的万有引力定律是动力学逆问题中最经典的问题. 根据牛顿这一思想发展起来的新学科 “动力学逆问题”, 近 20 年取得了重要进展 [2].

尽管 20 世纪的三件大事: 相对论、量子力学和混沌对牛顿力学产生了极大冲击, 但牛顿力学今天仍然是研究宏观运动的不可缺少的基础和原则.

2. 拉格朗日力学

2.1　拉格朗日力学的内容

由牛顿第二定律 (2) 可以看出, 它特别适合单个自由质点在已知主动力作用下的运动. 对有两个质点或三个质点在万有引力作用下的运动 (二体问题或三体问题), 也显示优越性. 然而, 当组成系统的质点数目 N 很大时, 或者系统的诸坐标受有约束时, 方程 (2) 的应用便显得不方便. 为此, 从学科发展和技术进步中要求提出并要求解决受约束力学系统的动力学问题. 于是出现了分析力学.

拉格朗日是分析力学的奠基人. 拉格朗日继达朗贝尔之后进一步研究了受约束质点的运动. 拉格朗日在著作《分析力学》(1788 年) 中, 应用数学分析的方法解决了质点和质点系的力学问题. 对于有约束的力学系统, 他采用广义坐标, 提出虚位移原理并与达朗贝尔原理 (3) 结合而得到动力学普遍方程, 即达朗贝尔–拉格朗

日原理. 这个原理的矢量形式为

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{4}$$

广义坐标形式为

$$\sum_{s=1}^{n}\left[Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right]\delta q_s = 0 \tag{5}$$

这里 q_s 为广义坐标, T 为系统的动能, Q_s 为广义力. 对于受有双面理想完整约束的力学系统, 由原理 (5) 中 δq_s 的独立而得到第二类拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{6}$$

对于完整保守系统, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1,\cdots,n) \tag{7}$$

式中, $L = T - V$ 为拉格朗日函数或动势, V 为系统势能.

达朗贝尔 — 拉格朗日原理 (4) 和拉格朗日方程 (6) 是拉格朗日力学的核心.

当代人们用近代数学描述拉格朗日力学. 基本思想是: 拉格朗日力学用位形空间描述力学系统. 力学系统的位形空间具有微分流形结构, 其同胚群作用在此结构上, 拉格朗日力学的基本概念和定理相对此群是不变的. 一个拉格朗日力学系统用一流形 (位形空间) 和在流形切丛上的函数 (拉格朗日函数) 给出. 所有使拉格朗日函数不变的位形空间中单参数同胚群定义一个守恒律 [3].

2.2 拉格朗日力学的意义

首先, 拉格朗日力学比牛顿力学更进步, 主要表现在: 拉格朗日方程 (6) 的个数比牛顿方程 (2) 的个数少, 微分方程组的阶数较低; 在理想约束下, 拉格朗日方程 (6) 不出现约束反力, 牛顿方程 (2) 则有许多约束反力; 拉格朗日力学强调标量 T, Q_s, 牛顿力学强调矢量, 而标量比矢量更易表达; 对于完整保守系统, 拉格朗日力学可只用一个标量 $L = T - V$ 来表达, 而牛顿力学做不到.

其次, 达朗贝尔 — 拉格朗日原理 (4) 或 (5) 适用于具有双面理想约束的力学系统, 不论所受约束是否完整, 是否定常, 也不论所受主动力是否保守. 引进动力学函数 $\dot{T} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$, 原理 (5) 可表示为尼尔森形式

$$\sum_{s=1}^{n}\left(Q_s - \frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_s} + 2\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \tag{8}$$