当"数学"遇上"艺术"

Mathematics Encounters with Art

——数学家带你提升融合思维能力

马传渔 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

当“数学”遇上“艺术”

Mathematics Encounters with Art

——数学家带你提升融合思维能力

马传渔 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

当"数学"遇上"艺术"：数学家带你提升融合思维能力/马传渔著．—北京：北京师范大学出版社，2019.11
ISBN 978-7-303-24999-2

Ⅰ．①当…　Ⅱ．①马…　Ⅲ．①数字技术—应用—传播媒介—研究　Ⅳ．①G206.2-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 162710 号

营 销 中 心 电 话　010-57654738　57654736
北师大出版社高等教育与学术著作分社　http://xueda.bnup.com

DANG SHUXUE YUSHANG YISHU SHUXUEJIA DAI NI TISHENG RONGHE SIWEI NENGLI

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnupg.com
　　　　　北京市西城区新街口外大街 12-3 号
　　　　　邮政编码：100088
印　　刷：北京盛通印刷股份有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：10.75
字　　数：258 千字
版　　次：2019 年 11 月第 1 版
印　　次：2019 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

策划编辑：周　粟　马力敏　　　　责任编辑：马力敏
美术编辑：李向昕　　　　　　　　装帧设计：李向昕
责任校对：康　悦　　　　　　　　责任印制：马　洁

顾　问

周　星

教育部高等学校戏剧与影视学类教学指导委员会主任，全国美育联盟理事长，北京师范大学艺术与传媒学院教授

冯少东

江苏省科学技术协会副主席

序 言

对于数学，我们或许不敢去触及其深奥所在，但实际上，我们已经在生活中触碰着其基本的奥妙. 在这个时代，迅疾的媒体融合与智能时代的悄悄推进，改变了人们的生活与看待世界的角度，促使我们正视媒介变化所折射的时代变化. 如何看待视听文化成为一个必须认真对待的问题.

数学和人们生活的密切关系，其实不用过多地加以论证即可知晓. 例如，中国人对于乘法口诀表在世界上独特的记忆方式，从勾股定理到数学在生活购买上的重要作用等，无需强调就可以证明数学是人们生活中须臾不可离去的对象. 当年徐光启为《几何原本》作序的文字，第一次让我们知晓那个时代的科学家已经高度肯定了数学几何的价值. 徐光启所谈及的历史如此神奇："唐、虞之世. 自羲、和治历，暨司空、后稷、工、虞、典乐五官者，非度数不为功."① 而在那篇序言中，其随后的推理更值得回味："《周官》六艺，数与居一焉；而五艺者，不以度数从事，亦不得工也."② 这里显然强调的是，如果没有"数"，其他的五艺几同存废. 而徐光启其实是为了证明欧几里得的数学著作的重要性："《几何原本》者，度数之宗，所以穷方圆平直之情，尽规矩准绳之用也."③ 注意其强调《几何原本》是关于数学的根本性书籍，自然是因为当初引进的需要，而在我们看来不仅是放在整个数学史的背景下指出《几何原本》的意义，还因为徐光启后面的极为重要的阐释，他提到一个常理，即生活中必然有似乎不起实际功利效用的东西存在："盖不用为用，众用所基，……先生曰：'是书也，以当百家之用，庶几有羲和、般墨其人乎，犹其小者；有大用于此，将以习人之灵才，令细而确也.'余以为小用、大用，实在其人."④ 在中国人眼里，这已经是把数学的价值抬高到无以复加的地步了. 放大来看，没有数学，真就无法裁断事理.

这样来看，本书触及的关于思维和观念认知就十分必要了. 数学对人的思维、人的判断、对时空问题的计算作用很大，对人的思维的修炼作用更是极其重要的. 在我们小时候推广"优选法"的时代，大数学家华罗庚先生为了让人们通俗易懂地理解数学的价值和作用，用了一个烧水、泡茶、洗茶具的计算先后把控的细致说明；还有当你遇到面向左前方目标走去时，学过优选法的人在找捷径的时候，通常都要打一个折角而不愿直行再左转，因为两点之间线段最短. 这无形中就是数学在无形中对我们所起的作用.

---

①②③④ 中华书局上海编辑所：《中华活叶文选 90 年 徐光启传，甘薯疏序，刻〈几何原本〉序》，18～20 页，北京，中华书局，1962 年. 注：其中的句号应行文要求改为句点.

本书既有数学家对于融合思维的讲解，也有实际践行的思维习惯的改变. 就“台球艺术表现”而言，台球高手美妙精确的表现都来自其对时空关系的几何判断和对数学计算延伸的物理的力度旋转，每一次击打球杆的“艺术”表现，都是一种精于计算，并在头脑中构筑成的一种空间几何关系，此时的数学似乎不是公式的排列，而是思维在掌握数学知识基础上的判断和实际操作. 所以日常生活和人的思维之间无论是在宏观上还是在微观上，都离不开数学. 在艺术上，数学对人的关系非常重要. 例如，画家作画时会拿手指掂量、揣度空间关系，其实就是在浓缩生活中对于尺度造就空间的认知，因为只有按照生活实际来和谐地落墨上形，才能更符合人们视觉感受的比例. 又如，做乐器时的比例拿捏，吟唱的时间对于表现的舒适感等都与艺术融合性息息相关. 这样谈及数学和艺术，可见两者之间的确有极其强烈的关系. 这就是思维的重要性. 如何在融媒体时代适应复杂性、适应跨媒体的现实，本书巧妙地将其加以入题，并且将数学思维在原理和实际训练上做了深入浅出的阐述和实际训练的展开，阅读之后会让人有恍然大悟之感和心领神会之悟.

本书融知识性、趣味性、可读性于一体，是一本跨学科的数学读物，也可作为各类学科思维实训的辅导材料，供广大读者学习.

周星

北京师范大学艺术与传媒学院教授

全国美育联盟理事长

2019 年 8 月

前　言

本书是一本通俗的融知识性、趣味性、可读性于一体的科普读物，旨在展示数的魅力和图形的奥秘.

本书以数学思维实训为鸿线，阐明黄金数、斐波那契数、质数、帕斯卡三角形和幻方中数的特性和应用，同时指出当今有关的一些发展动态.

本书近300幅优美图案源于镶嵌图形、对称图形、黄金图形、雪花曲线、分形图案、邮票图案、莫比乌斯带、魔幻线、伊斯兰的几何图案，使人们在观赏中能逐步感悟到图案中的数学元素、数学原理和数学应用，使人们会情不自禁地亲自动手去描绘图形、制作图形. 图形艺术在传媒、建筑、装饰、设计、美术及大自然中能产生无所不及的广泛的应用.

第一章引入黄金数. 因为它是艺术家和建筑学家所遵循和追求的表现美的原则之一. 13世纪意大利数学家斐波那契发明了斐波那契数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…，F_n，F_{n+1}，…. 该数列中每一项称为斐波那契数. 黄金数和斐波那契数频见于美术作品、建筑艺术、股市艺术、传媒广告以及各类游戏之中.

任意4个连续的斐波那契数可构成一组勾股数，此结论于1948年被查理斯·文·瑞恩所证实. 1987年米歇尔·凯斯(Michel Keith)引入 n 位重现斐波那契数，从中产生的思维过程是值得一读的. §4中的帕斯卡三角形表含有丰富的内容，它与斐波那契数、等差数列和二项式定理具有一定的联系.

黄金数与斐波那契数的联系主要体现在两个方面：一是当项数 n 足够大时，斐波那契数列前后两项的比值越来越接近于黄金数，利用数列极限不难证得这一结论；二是斐波那契数列的一般项可用黄金数表示出，参见定理5.

第二章介绍什么叫平面镶嵌？平面镶嵌就是用同样形状的平板砖(瓷砖)无缝隙而又不重复地铺满整个平面. 换言之，用若干个图形无重复、无空隙地铺满平面区域，叫作镶嵌. 因为平面砖的形状呈多边形，所以镶嵌艺术就是研究如何用各种多边形无重叠、无空隙地铺满整个平面.

几何图形的知识是镶嵌艺术的基础. 在平面镶嵌中，若采用几何图形进行周期性镶嵌，则只有正三角形(等边三角形)、正方形和正六边形能周期性镶嵌平面. 利用正多边形各种组合和不规则镶嵌，也能给予人们美的享受. 利用多阶米诺和多阶六角的凹多边形的铺设，可装饰出千姿百态的图案. 随着1973年罗杰·彭罗斯(Roger Penrose)发明了彭罗斯瓷砖，用彭罗斯瓷砖镶嵌，开阔了人们的眼界.

镶嵌艺术不仅赋予了人们各种美丽的图案，而且赋予了人们丰富的想象力和创新力，引导人们将镶嵌艺术用于建筑、传媒、美术作品，园林风景区壁挂、漏窗的装饰

等中.

艺术家埃舍尔(M. C. Escher，1898—1972)发明的变形镶嵌图案令人惊叹不已. 到了1936年，渥德堡发明了渥德堡铺砖法，1973年英国物理学家潘洛斯发明了潘洛斯铺砖法，将铺砖艺术提升到一个新的层次(见第六章§1).

随着计算机科学的出现与发展，计算机镶嵌艺术作品也不断出现，一种新理念的镶嵌设计必将在不久的将来被开发出来.

第三章介绍对称图形和黄金图形. 苏联数学家亚格龙将几何学定义为：几何学是研究几何图形在运动中不变的那些性质的学科，几何变换是指把一个图形 F_1 变换成另一个图形 F_2 的方法. 常见的几何变换有轴对称、平移和旋转. 这三种变换赋予人们对称的美. 对称的概念出现在大自然、艺术、科学、传媒、建筑、折纸乃至诗歌之中. 在我们的生活中，几乎所有方面都能找到对称. 当我们看到一个图案或雕塑时，无须仔细观察就能判定喜欢它或不喜欢它，其中它的对称是影响我们直觉的主要因素. 本章中埃舍尔的几幅工艺作品足以体现丰富的数学对称知识给予了艺术家创作的灵感，给美术作品留下了广阔的创作天地.

黄金图形常见的有黄金三角形、黄金矩形、黄金五边形和根号矩形. 黄金三角形指的是顶角为36°或顶角为108°这两种类型的等腰三角形. 大自然中存在两种生物，恰好是两种类型的黄金三角形，这两种生物繁殖数量之比恰好趋近于黄金数. 黄金矩形指的是一个长与宽之比为黄金数的矩形. 给出一个黄金矩形可以构作无穷多个黄金矩形，此过程称为黄金分割动态矩形. 黄金矩形和黄金分割动态矩形在美术作品中是常见的. 参见G·西雷特作品《入浴》和达·芬奇未完成的作品《圣徒杰罗姆》. 达·芬奇不仅是一位大画家，而且是一位数学家，他说过：“……没有什么能不通过人类的探索而称之为科学的，除非它是通过数学的解释和证明的途径.”黄金五边形指的是正五边形. 由正五边形可诱导一个五角星形，两者融合在一起，常出现在传媒广告海报之中.

第四章介绍雪花曲线和邮票图案. 1904年，海尔格·冯·科赫(Helge von Koch，1870—1924)在研究具有无限周长且具有有限面积的曲线时，引入了雪花曲线，又称科赫曲线.

雪花曲线属于数学“分形”中的内容. 分形的思想初见于1875—1925年数学家们的著作. 1970年美国IBM公司托马斯·沃森研究中心的伯诺瓦·曼德尔布罗特(Benoit Mandelbrot，1924—2010)教授发表了一篇题为《英国的海岸线有多长》的文章，开启了分形的先河. 人们可以想象：如果海岸线是有“规则”的，那就容易计算光滑曲线的弧长. 然而，大海湾所显露出的越来越小的子海湾参差不齐，弯弯曲曲，所得的海岸线的长度会逐步地、无限地上升，计算海岸线的长度遇到了麻烦. 直到1975年，曼德尔布罗特提出“分形”这个数学名词，并于1977年出版了第一部著作《分形对象：形、机遇和维数》，宣告了新几何学——“分形学”的诞生. 1982年，曼德尔布罗特修订此书，并以《大自然的分形几何》新名问世.

数学上的分形是一种形式，它从一个对象(点、线段、三角形、正方形等)开始，重复应用一个规则，连续不断地发展着、变化着，直至无穷. 当人们观察一张分形图片时，看到的仅是它在某一个瞬时的样子，是冻结在它成长过程中的一个特定阶段. 依此思想，若将分形与自然界联系在一起，就能体现出和谐美和自然美. 分形不仅可

描绘诸如地震、树枝、生姜根、海岸线等自然现象，而且在天文、美术、经济、气象、电影制片、广告艺术等方面也有广泛的应用.

分形曲线的维数不是正整数，而是约为 1.261 9，即为 ln 4 与 ln 3 之商.

借助于应用学科和计算机制图技术的推动，分形的数学理论得到了迅速的发展，并且为应用学科提供了有力的工具. 作为图形艺术，“分形”让人们欣赏到通过自相似可以无限延伸，得到许多美丽的图案.

长期以来，在雪花研究领域，人们一直认为世界上没有完全相同的从天空中飘下的两片雪花. 然而，在 1986 年 11 月 1 日，美国一个探测中心的 N.C. 克奈特发现了第一对完全相同的雪花.

1915 年波兰数学家谢尔宾斯基(Wactaw Sierpiński，1882—1969)构造出一种“垫片”，它就是谢尔宾斯基三角形；意大利数学家皮亚诺(Giuseppe Peano，1858—1932)构造了皮亚诺曲线.

将谢尔宾斯基地毯延拓到空间就是门格海绵，门格海绵是奥地利数学家卡尔·门格(Karl Menger)于 1926 年提出的，他借助于计算机给出了具有无数凹洞的门格海绵的图案.

邮票图案的内容大致可分为以下四类：一是名人的图案；二是具有纪念意义的图案，如名人聚会、体育比赛、生肖图案等；三是风景图案；四是含有几何元素的趣题.

1998 年德国发行了一枚邮票，用来纪念 1998 年在德国柏林举行的国际数学家大会. 画面简洁，画面的主体是用许多不同的正方形拼成的一个长方形，而这个长方形看起来好像是一个正方形，为此，称它为准正方形，采用列方程法可得其解. 深化这个问题，如果能使用大小不同，边长均为整数的各种正方形拼出一个正方形，则称这个问题为“可完美分解的正方形”，又称此正方形为可完美分解的正方形. 1925 年波兰数学家莫伦发现可用九个边长分别为 1，4，7，8，9，10，14，15 和 18 的正方形拼成一个边长为 33×32 的矩形. 人们还在继续寻找这样的准正方形.

多年以来，许多数学家认为根本不存在有所谓的“可完美分解的正方形”. 直到 1940 年，布鲁克斯等四位年轻人第一次发现了可以用 49 个正方形拼贴成一个可完美分解的正方形. 布鲁克斯继续研究将 49 个正方形减少成至少 39 个正方形. 1962 年杜威斯特贞断言：可完美分解的正方形必须涵盖至少 21 个大小不同的正方形，并在 1978 年找到了一种拼贴方法. 同时指出这是唯一一个最小的可完美分解的正方形.

第五章制作艺术阐明了动手制作的重要性. 任何事情只有通过亲自动手才能擦出思维的火花. 瑞士艺术家卡斯珀·施瓦贝(Caspar Schwabe)制作了一幅艺术品，放在展览会上，他允许参观者用彩色图案在墙上学习制作彭罗斯瓷砖铺设的规律. 这种训练实线操作的方法，对培养亲自动手的能力是十分重要的. 第六章 § 3 中的对伊斯兰文明的图案设计、伊斯兰基本图案与网格以及第二章的动态矩形和作法要亲自动手画一画，同时用脑进行深层思考. 对伊斯兰文化的几何图案和花朵图案应结合对称思想，利用镶嵌技巧在正方形的网络上进行认真的制作. 记住花朵图案构成的方法，注意凝练创新思维的培养. 利用各自的智慧，制作出更为美妙的图案.

莫比乌斯带是如何制作的？它具有什么样的几何特性. 根据书本上介绍的方法制作“三叶形结”. 莫比乌斯带的应用是十分广泛的，除应用于美术作品外，还应用于邮

票图案、杂志封面、机械设计、录像带的设计等各个方面. 史蒂芬·霍金(Stephen Hawking)于 2001 年 7 月出版了《果壳中的宇宙》一书，形象地表现出 5 个火车头行驶在雕刻家埃舍尔的“三叶形结”的带子上，用艺术图案将时空弯曲这一深奥复杂的物理理论演绎得形象生动、浅显易懂.

幻方是一种古老的、流行的数学游戏，不涉及高深的数学知识，且趣味性强. 因此，人们对幻方的兴趣至今未衰. 以三阶、四阶幻方为例，叙述幻方的性质及幻方中数字的特性，逐步寻找构制各种幻方的方法. 奇数阶幻方可采用罗泊法. $4n$ 型偶数阶幻方便于构作，而 $4n+2$ 型幻方，即 6 阶，10 阶，14 阶，……，这类幻方的构作是有一定难度的. 古典的著名幻方，如杨辉 6 阶幻方和富兰克林 8 阶幻方等，要掌握这些幻方有趣的特性. 制作幻方既能自娱自乐，又能发现数的特性以及数的魅力，还能激发学习的兴趣和启迪思维. 利用魔幻线可构作各种美丽的图案，读者不妨自己动手去试验、去发现.

第六章通过探究质数、推演海伦公式、设计镶嵌与几何图案，逐步展示发现问题、提出问题、探究问题、解决问题的理性思维的全过程，给出直观思维、逻辑推理思维、灵感思维的层层深入的思维创新艺术的实例.

自然数按照约数个数的多少来进行分类，可分为质数(素数)、合数和 1 这三类. 质数指的是除 1 和它本身以外，不再有别的约数的自然数. 比如，2，3，5，7，11 都是质数. 合数指的是除了 1 和它本身以外，还有其他约数的自然数. 比如，4，6，8，9，10 都是合数. 1 既不是合数也不是质数.

远在公元前，古希腊数学家埃拉托色尼(Eratosthenēs，约前 275—前 194)指出 100 以内的质数共有 25 个：

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97.

欧几里得在《几何原理》里，利用反证法证得：质数有无穷多个. 这无穷多个质数是怎样分布的? 质数分布定理指出：给出正整数 n，那么小于或等于 n 的所有质数的个数，随着 n 的增大，越来越接近于 n 与 l_{nn}的比值.

至今尚未找到一个 n 的表达式，使得不论 n 取任意正整数，表达式中的 n 全都是质数. 17 世纪法国数学家马林·梅森发明型为 2^n-1 的质数. 如果 2^n-1 为质数，称这种型的质数为梅森质数，又称梅森素数，简称梅森数. 第 1 个梅森素数是 $2^2-1=3$；第 2 个梅森素数是 $2^3-1=7$；第 3 个梅森素数是 $2^5-1=31$. 人们不断地寻找梅森素数. 2008 年 8 月 23 日，美国加州大学洛杉矶分校的计算机专家埃德森·史密斯利用数学系所有的计算机参加了“因特网梅森素数大搜索”的国际合作项目，在其中的一台计算机上发现了第 46 个梅森素数 $2^{43\,112\,609}-1$，它被美国的《时代周刊》评为“2008 年度 50 项最佳发明”之一. 探索梅森素数既能促进数论的研究，又能促进计算数学、程序设计技术、网络技术等学科的发展. 值得指出的是：不论是书报、杂志，还是电视、电台、网络，对类似于梅森素数的有关报道，都会受到人们的极大欢迎.

至今人们已发现 9 个数全为质数的三阶幻方，以及 16 个数全为质数的四阶幻方，正在寻找 5 阶或 5 阶以上的全为质数的高阶幻方.

若一个质数反过来读的数仍是质数，则称这两个质数是一对回文质数. 比如，13

是质数，它反过来读的数 31 也是质数，故称 13 和 31 是一对回文质数．两位数的回文质数有 4 对；三位数的回文质数有 13 对；四位数的回文质数有 102 对，……，其他位数的回文质数共有多少对，至今仍在寻找之中．

若一个正整数的所有约数之和是该数的两倍，则称此数为完全数．比如，6 的所有约数为 1，2，3，6，而 $1+2+3+6=12=2\times6$，故 6 为完全数．同理，28，496 都是完全数．质数与完全数关系密切，有待于人们继续去论证、去发现．

第六章 §3 中蔷薇花饰图、六边形推演的基础图案、十二边形图案、完美的十四、阿拉伯式蔓藤花纹、六边形大融合等花朵图案既有鉴赏价值，又包含众多数学元素和数学原理，值得观赏者去回味、去深思，并尝试制作包含有四边形、十边形等多边形的花朵图案．

第六章 §4，谷歌公司两名创始人拉里・佩奇(Larry Page)和谢尔盖・布林(Sergeg Brin)于 1998 年前后发明了网页排序的新算法："佩奇算法"，即"佩奇排序"．谷歌词不仅超越了所有的竞争对手，而且彻底改变了互联网的生态，成为当今互联网上第一搜索引擎——谷歌(Google)．谷歌吸引了世界人民的眼球，对世界做出了重大的贡献．

"佩奇排序"的数学基础是极限知识、图论、概率论中的马尔可夫定理和线性代数中的矩阵理论．这些数学支撑的内容不属于深奥的数学知识，但是佩奇院士成功了．

"佩奇排序"利用计算机对新闻进行分类，其数学工具是三角函数的余弦原理，以及矩阵的分块和分块矩阵的乘法．尽管分类比较粗糙，但利用余弦定理，通过几次迭代，无论是词汇的聚合还是文本的分类，都能得到比较精确的结果．

佩奇和布林的成功，归功于他们两个坚定不移对努力目标的执着追求．他们刻苦钻研、坚韧不拔的毅力是成功的保证．他们拥有丰富的知识，并且能在竞争中击败所有的对手，充分说明创新思维能力和实践操作能力融为一体的重要性．

本书是一本跨学科的数学读物，也是一本科普小册子．可供数学爱好者和科普工作者阅读，也可作为各类学科思维实训的辅导材料．企盼本书对广大读者提高学习兴趣、增强文化素养、凝练创新思维、开启发明创造有所帮助．

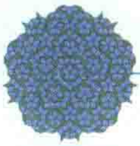
感谢北京师范大学艺术与传媒学院院长周星教授、江苏省科学技术协会副主席冯少东两位顾问对本书的关心和厚爱．感谢周星教授为本书作序．感谢北京师范大学出版社高等教育分社周粟副社长的精心策划．感谢马力敏编辑和关心支持本书问世的所有朋友．

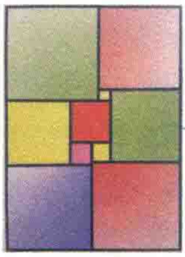
本书不足之处，敬请批评指正．

马传渔

2019 年 1 月 23 日

目录





第一章

黄金数·斐波那契数

——断臂维纳斯蕴含的“美的信条”及其他

2014 年 3 月 18 日美国加利福尼亚州当地时间早晨发生 4.4 级地震.《洛杉矶时报》系统内的地震新闻自动生成系统在收到美国地质勘探局电脑系统发出的地震信息后，将数据输入事先准备的模板. 这个系统仅用了 3 分钟就完成了新闻的生成并将其发表在《洛杉矶时报》网站上.《洛杉矶时报》也成了第一家报告这次地震的媒体. 据悉，《洛杉矶时报》能拔得这个头筹，是靠了“机器人写手”. 这表明数字技术在一步一步改变着传媒业，而数学因素在传媒业中将发挥更大的作用.

本章介绍的黄金数、斐波那契数并不是新颖的数学对象，但众多有趣的数字特性和广泛应用，吸引着人们的眼球. 黄金数、斐波那契数、勾股定理、**帕斯卡**三角形它们之间的数字关联，充分显示了数的无穷魅力.

§1 黄金数 φ 与 Φ

黄金数是古希腊数学家欧多克斯(Eudoxus)发现的，然而，“黄金”两个字则是意大利著名科学家、艺术家**达·芬奇**最早冠以的美称. 黄金数被当作美的信条，统治着当时欧洲的建筑和艺术，并且这种影响一直延续到今天. 用 $\varphi=0.618\,033\,988\cdots$ 和 $\Phi=1.618\,033\,988\cdots$ 表示两个黄金数.

意大利数学家菲披斯注意到数学界不屑一顾的“冷门”——人体的黄金分割. 他认为：一般人在人体肚脐上下的长度比值为 0.618，或者与此比值相近是人体结构的最优比例. 此外，他发现人体结构还有三个黄金分割点：上肢的分割点在肘关节、肚脐以下的分割点在膝盖、肚脐以上的分割点在咽喉. 如果一个人各部分的结构比都符合这个黄金分割律，那么他的体型就是最标准的. 这一发现为评价体型的优劣提供了科学依据.

公元前 5 世纪，古希腊数学家、哲学家**毕达哥拉斯**(Pythagoras，前 580 至前 570 之间—约前 500)认为：“凡是美的东西，都具有共同的特性，这就是部分与部分和部分与整体之间的协调一致.”

假定线段 AB 上有一个分点 C，如图 1-1 所示. 要使部分与部分和部分与整体之间协调，则有

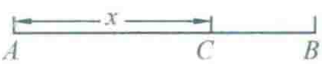


图 1-1

$$\frac{\text{一部分}}{\text{另一部分}}=\frac{\text{另一部分}}{\text{整体}},$$

即

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}.$$

不妨令 $AB=1$，$AC=x(0<x<1)$，则

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1},$$

整理得 $x^2+x-1=0$，解得

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\,033\,988\cdots,$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-1.618\ 033\ 988\cdots(\text{舍去}).$$

线段 AB 的这一分割称为黄金分割，点 C 称为黄金分割点，简称黄金点；比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金分割比，简称黄金比或黄金数.

记 $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，则

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}=\varphi. \qquad ①$$

再记 $\Phi=\frac{1}{\varphi}$，则得

$$\begin{aligned}\Phi&=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\&=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx1.618.\end{aligned}$$

若将①取倒式，于是有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\varphi},$$

即

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{AC}=\Phi. \qquad ②$$

因此，Φ 也称为黄金数.

由 $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，知

$$\begin{cases}\Phi-\varphi=1,\\ \Phi\cdot\varphi=1.\end{cases} \qquad ③$$

下面介绍黄金点的作法.

公元前 300 年左右，欧几里得就用圆规和直尺找出了线段 AB 的黄金分割点 C，如图 1-2 所示.

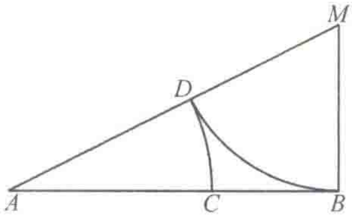


图 1-2

设 $AB=1$，过点 B 作线段 AB 的垂线 MB，取 $BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，连接 AM，在 AM 上截取 $DM=BM=\frac{1}{2}$，再在 AB 上截取 $AC=AD$，由于

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AB}&=\frac{AM-\frac{1}{2}AB}{AB}\\&=\frac{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618,\end{aligned}$$

因此，点 C 就是线段 AB 的黄金分割点.

黄金数在生活中有广泛的应用. 在生活中穿衣时，

$$\frac{\text{下装长}}{\text{上装长}+\text{下装长}}=\varphi\approx 0.618.$$

下面描画了两种风格稍异的四层女式接裙(图 1-3)，你觉得哪一种更符合审美呢？当然，你会选右边逐层加宽的那种．在那个设计中，每一层与其上一层深度的比都恰为黄金分割比.

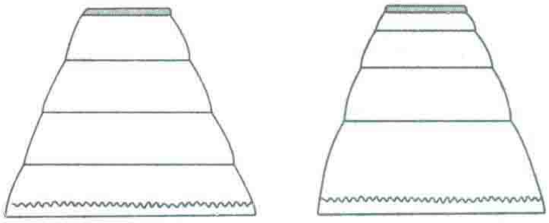


图 1-3

购买衣服时，

$$(\text{高档价}-\text{低档价})\times 0.618+\text{低档价}$$

是合理的价格.

选择住房时，开发商会把房子分成几个层次来卖：1 到 7 层为低层房子；8 到 12 层为中层房子，13 到 18 层为中高层房子，再往上就更高了．住在整个楼层三分之二左右的层次比较受人欢迎．比如，30 层楼房，宜居 18 到 22 层，而 $30\times 0.618\approx 19$(层)；18 层楼房，宜居 8 到 12 层，而 $18\times 0.618\approx 11$(层).

此时，我们称上面的 19 层与 11 层为黄金房层.

人的体温是 37 ℃，因为 37 ℃$\times 0.618\approx$23 ℃，所以空调的温度调到 23 ℃，人感到最舒服.

黄金数的美呈现在各门学科之中．在某些名曲中，乐章的高潮就在全曲的0.618处出现.

两个黄金比 Φ 和 φ 与三角函数具有下面的关系.

(1)$2(\sin^2 45^\circ)=\Phi-\varphi$;

(2)$4(\sin^2 18^\circ)^2=1-\varphi$.

在**埃舍尔**(M. C. Escher，1898—1972)的两幅作品中(图 1-4、图 1-5)，点 C 都是线段 AB 的黄金分割点.

$$\frac{AB}{AC}\approx 1.618.$$

A　　C　　B

图 1-4

B　　C　　A

图 1-5

图 1-4《水洼》是**埃舍尔**的木刻画，作于 1952 年．图中的点 C 是线段 AB 的黄金分