高师函授教材

数学分析

（上 册）

吉林人民出版社

高师函授教材

数学分析

（上　册）

东北三省函授教材
“数学分析”协编组　编

吉林人民出版社

高师函授教材

数学分析

（上 册）

东北三省函授教材
“数学分析”协编组 编

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春新华附属厂印刷

787×1092毫米32开本 印张$11\frac{1}{8}$ 235,000字
1982年7月第1版 1982年7月第1次印刷
印数：1—25,320册
书号：13091.122 定价：0.98元

内 容 提 要

本书是由吉林省函授学院阎邦正副教授执笔编写的，是教育部向全国各高等师范院校推荐的函授教材，经有关院校试教反映效果较好。本书分三册出版，这是上册，上册的内容包括：函数、极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理与泰勒公式、导数的应用等，本书特点是通俗易懂，例习题配备较多，具有典型性与启发性，基本上可以无师自通。

说　　明

本讲义是根据东北三省高师函授教育协作会议精神编写的。讲义的编写大纲经过了三省有关同志的审查讨论，具有师范院校数学专业本科水平。三省函授教材编写组决定，由吉林省函授学院阎邦正同志执笔编写。初稿形成后，三省有关同志又进行审阅，作了修改。

本书在贯彻理论联系实际原则的同时，比较重视基础理论和基本方法的讲述。在编写中力求作到：知识阐述上，由感性到理性，由浅入深，通俗易懂；推理运算上，注重启发思路，总结规律，交代要领；例题选配上，数量较多，典型性较强；每章之后编入一定数量的巩固性习题。这是一套适用于中学教师、科技干部和知识青年进行自学的讲义。

东北三省高师函授教材协作编写组

一九七九年十二月

目　　录

第一章 函　数

客观世界的事物都是互相联系互相制约的，物质世界的这种规律在数学中就表现为量与量之间的依赖关系——即所说的函数关系。函数是数学分析所研究的主要对象，这一章把有关函数的一些基本知识讲一讲，作为我们学习数学分析这门课程的开始。

§1·1 绝　对　值

数学分析经常用到有关实数绝对值的一些知识，这里介绍一下。

数学分析中所用的数，如无特殊声明，都是指的实数。全体实数组成的集合称为实数系（集）。实数分为有理数和无理数两大类。有理数包括正负整数，正负分数和零，正整数也称自然数。除去有理数以外，其余的实数，都叫无理数，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$1+\sqrt{5}$，$\sqrt[3]{2}$以及圆周率π等等，都是无理数。总之，无限不循环小数，称为无理数。

把一些实数放在一起构成一个集合，称为数集。实数系是一个数集，同样，全体有理数也构成一个数集，称为有理数集，全体自然数也构成一个数集，称为自然数集。由于实数和数轴上的点是一、一对应的，所以实数集就和数轴上一个点集相对应。今后我们将对实数集和数轴上的点集不加区别，即把数集和它在数轴上对应的点集看成是同一个东西，比如，我们既可以说数a也可以说点a。

一、绝对值概念 任何实数都有绝对值，定义如下：

某数 a 的绝对值，当 a 是正数或零时，就是它本身，当 a 是负数时，则是它的相反数 $-a$。

实数 a 的绝对值记为 $|a|$，根据上述定义，便有

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当} a\geqslant 0 \\ -a, & \text{当} a<0 \end{cases}$$

按绝对值定义，对于任一实数 a，显然存在如下的性质：

$|a|\geqslant 0$，$|-a|=|a|$，$\sqrt{a^2}=|a|$，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$。这些性质都常利用。

由于实数可以用数轴上的点来表示，在几何上，$|a|$（$|a|=|a-0|$）就是代表 a 的那个点与原点（记为0）的距离。于是 $|x-a|$ 便是数轴上的点 x 与点 a 的距离，例如 $|x-3|$ 是数轴上的点 x 与点 3 的距离，而 $|x+2|$ 则是数轴上的点 x 与点 -2 的距离。

一组等价不等式 下面介绍今后常用的一组等价不等式。

不等式

$$|x-x_0|\leqslant k(k>0) \qquad (1)$$

与 $$-k\leqslant x-x_0\leqslant k,$$

即与 $$x_0-k\leqslant x\leqslant x_0+k \qquad (2)$$

是等价的，其中 k 和 x_0 是常数。

（1）与（2）的等价关系从几何上看是比较明显的。因为 $|x-x_0|\leqslant k$ 表示动点 x 与定点 x_0 的距离不超过 k（就图1—1考虑），从而动点 x 在点 x_0-k 与点 x_0+k 之间，即 $x_0-k\leqslant x\leqslant x_0+k$。显然，从这个结果也容易反推回去。

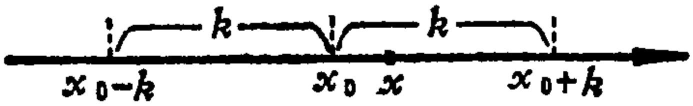

图 1—1

如果$x_0=o$，即点x_0是原点，便得到上述等价关系的特殊情形，即

$$|x|\leqslant k$$

与

$$-k\leqslant x\leqslant k$$

是等价的。

二、绝对值的运算性质 下面主要介绍两个绝对值不等式，同时也把中学代数里的两个绝对值等式写在这里。这几个公式都关系到绝对值的运算。

（i） 和的绝对值不大于（小于或等于）各数绝对值的和，即

$$|a+b+\cdots\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+\cdots\cdots+|k|$$

证明：因

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-|k|\leqslant k\leqslant|k|$$

逐项相加，得

$$-(|a|+|b|+\cdots\cdots+|k|)\leqslant a+b+\cdots\cdots+k\leqslant|a|+|b|+\cdots\cdots+|k|$$

从而

$$|a+b+\cdots\cdots+k|\leqslant|a|+|b|+\cdots\cdots+|k|$$

推论 代数和的绝对值不大于各数绝对值的和，即

$$|a \pm b \pm \cdots\cdots \pm k| \leqslant |a| + |b| + \cdots\cdots + |k|$$

(ii) 二数差的绝对值不小于(大于或等于)各数绝对值的差，即

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|$$

证明 因

$$|a| = |(a-b)+b|$$

由上面性质(i)有

$$|(a-b)+b| \leqslant |a-b| + |b|$$

于是 $$|a| \leqslant |a-b| + |b|$$

移项得

$$|a-b| \geqslant |a| - |b|$$

推论 $|a+b| \geqslant |a| - |b|$

事实上，$|a+b| = |a-(-b)| \geqslant |a| - |-b| = |a| - |b|$

(iii) 乘积的绝对值等于各数绝对值的乘积，即

$$|ab\cdots\cdots k| = |a| \cdot |b| \cdots\cdots |k|$$

若 $$a = b = \cdots\cdots = k,$$

则有 $|a^n| = |a|^n$

(iv) 商的绝对值等于被除数的绝对值与除数的绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$$

根据乘法与除法定义，上面两个等式显然成立。

§1·2 变　　量

数学分析就其更广泛的意义，可以说是研究变量理论的一门科学，因此它的第一个基本概念就是变量的概念。初等

数学所研究的对象，主要是不变的量（即常量）和图形。当由初等数学转向高等数学的学习，首先经常要以运动变化的观点去研究各种变量的变化状态，我们应当迅速地把这种观点树立起来。下面就来讲讲变量与常量的概念.

一、变量与常量 当我们观察各种自然现象或技术过程时，经常遇到各种各样的量。例如在研究物体自由降落时，需要考虑物体降落的速度，经过的时间，降落的距离；在考察气体的加热过程时，要注意气体的温度、压力、体积等等。诸如此类的一些量，就其物理属性来看，虽然并不一样，但却存在着共同点：任何量都是通过一系列数值来表现的。各种物理量的这种共同点，便是变量这个概念的来源。

当我们把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积保持常值，气体分子的个数也保持一定；但是相反地，气体的温度和压力便取得越来越大的数值。又如观察飞机的飞行，便要碰到更多不同的量，其中有的量在飞行过程中保持常值，比如乘客的人数，行李的重量，机翼的长度等；但是还有更多的量时时刻刻在起变化，诸如飞机的航程，机体距地面的高度，油的储存量，周围空气的压力等等，这些量都随时间的推移而取不同的值。所谓变量就是变化着的量，可以变动的量，说得详细一点，就是在某一过程中可以取得不同数值的量。

定义 在某一过程中，取不同数值的量叫做**变量**，保持同一数值的量叫做**常量**。

变量与常量并不是绝对的，在一定条件下可以转化。如果变量的变化微不足道，并不影响我们的结论时，也可以把变量当作常量来处理。例如重力加速度本来是随着纬度和高

度而变的，但在地面附近的局部地区，由于纬度和高度变化很小，就可以认为重力加速度是常量。然而在发射人造卫星时，就必须考虑重力加速度的差别，把它当成真正的变量。

常量一般地用开头几个拉丁字母如 a,b,c 等表示，变量常用末尾的几个字母如 x,y,z,u,v 等表示。应注意的是，任何一个字母本身并没有指明这个量究竟是常量还是变量，因此当我们利用字母表示量时，一般的应当说明它所代表的是常量还是变量。

数学中所说的量既然是指量的数值，因而可以用数轴上的点来表示量。如果 a 是常量，则用以表示这个量的 a 点就是一个定点；如果 a 是变量，则用以表示这个量的 a 点就要视为动点。

二、区间和邻域 变量所取的每一个值都是一个数，所有这些数的全体便构成变量的变化范围，也称为变量的**变域**。在许多情形下，变量的变域是一个区间。下面先来介绍区间的概念，然后介绍邻域。

（一）有限区间 以相异二数（点）为端点的全体实数（点），称为有限区间，这两个数（点）称为区间的端点，它们可以属于区间，也可以不属于区间。按端点是否属于区间，分为以下三种情形。

（i） **闭区间** 设 a 和 b 为二实数，且 $a<b$，满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数全体，称为**闭区间**，用符号 $[a,b]$ 表示。

显然闭区间的两个端点都属于区间，a 是左端点（最小的数），b 是右端点（最大的数）。几何表示如图1—2。

(ii) **开区间** 满足不等式

$$a<x<b$$

的实数全体，称为**开区间**，用符号(a,b)① 表示。

开区间的两个端点都不属于区间，因此对于开区间来说，它既没有最左边的点（即最小数），也没有最右边的点（即最大数）．可见开区间的每一点都是区间内部的点。几何表示如图1—3。

无论开区间或闭区间，其区间长度都是$b-a$。

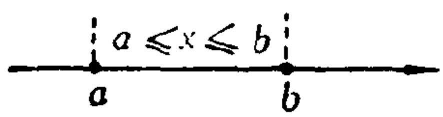

图 1—2

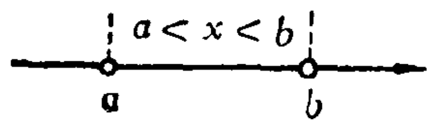

图 1—3

(iii) **半开区间** 满足不等式

$$a<x\leqslant b \quad \text{或} \quad a\leqslant x<b$$

的实数全体，称为**半开区间**，前者称左半开区间，后者称右半开区间，依次用符号$(a,b]$，$[a,b)$表示。

(二) 无穷区间 无穷区间有以下几种情形．

满足不等式$a\leqslant x<+\infty$② 的实数全体，用符号$[a,+\infty)$表示。类似地有：

$[a,+\infty)$，表示满足$a\leqslant x<+\infty$的实数x全体，

$(a,+\infty)$，表示满足$a<x<+\infty$的实数x全体，

$(-\infty,b]$，表示满足$-\infty<x\leqslant b$的实数x全体，

$(-\infty,b)$，表示满足$-\infty<x<b$的实数x全体，

---

① 闭区间符号用方括号[ ]，开区间符号用圆括号( )，要避免混淆．例如：闭区间[2,5]，开区间(2,3)．

② 符号“∞”读作无穷大，“+∞”，“-∞”依次读作正无穷大，负无穷大．关于无穷大的概念将在第二章介绍．

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数，即满足 $-\infty < x < +\infty$ 的实数 x 全体。

（三）**邻域** 邻域就是一个开区间，不过它是以开区间的中点（称为中心）为标准来考虑的概念。

定义 以点 a 为中心，长度等于 2δ 的开区间，称为点 a 的 δ **邻域**，点 a 称为**邻域中心**，δ 称为**邻域半径**。

换句话说：数轴上与点a的距离小于δ的所有点的集合，就是点 a 的 δ 邻域。

点 a 的 δ 邻域，用不等式表示为 $|x-a|<\delta$（即$a-\delta<x<a+\delta$）；用符号表示为 (a,δ) 或 $(a-\delta, a+\delta)$，几何表示如图1—4。

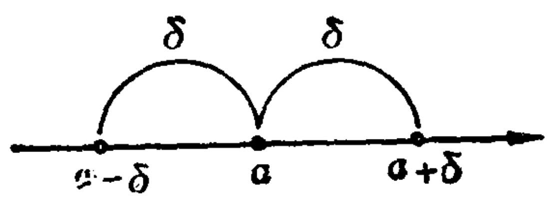

图 1—4

§1·3 函数的概念

一、函数的定义 在同一现象或技术过程中所存在的各种量，通常并不是彼此孤立地在那里变化，一般说来，它们之间总是存在一定的依赖关系，而且其中有的关系还是相当精确的。客观世界量与量之间的这种依赖关系，就是函数概念的实际背景。我们先看几个例子。

例 1 质量一定的气体，在一定温度下，它的压力 P 与体积 V 的关系是

$$P=\frac{K}{V}$$

这里 K 是一个物理常数。

现在假定体积 V 经历着由 5 到10的增大过程，于是在这个过程中，体积 V 和压力 P 都是变量。并且在闭区间〔5,10〕上对 V 每指定一个值，则 P 都有唯一的一个对应值（比如令 $V=7$，则 $P=\frac{K}{7}$），因而上面公式给出了这两个变量之间所存在的一种精确的依赖关系。

例 2 真空中自由落体下落的距离 S 和经过的时间 t 都是变量，它们的关系由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

所给定，其中 g 代表重力加速度，是一常数。

假定物体开始降落的时刻 $t=0$，着地时刻为 $t=T$，则 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant T$；并且当 t 在闭区间〔$0,T$〕上每取一值时，S 都有唯一的一个值与之对立。

例 3 在边长为 1 的正方形的四角上，切去四个边长为 x 的小正方形（图1—5），然后作成一个高度为 x 的盒子。令这个盒子的容积为 V，则容积与高度的关系显然是

$$V=x(1-2x)^2$$

现在设想 x 经历一个在0与 $\frac{1}{2}$ 之间的增大过程，则 x 和 V 都是变量，并且当 x 在区间$(0,\frac{1}{2})$内每取定一值时，V 总存在一个确定的对应值。

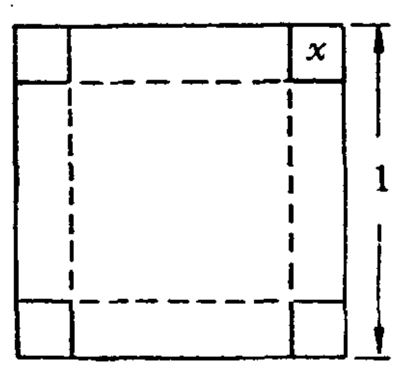

图 1—5

例 4 水文站统计了某河流在40年内的平均月流量 v 如