经济数学基础丛书

丛书主编 陶前功

高等数学习题课教程（下）

严培胜 易风华 主编

科学出版社

经济数学基础丛书

丛书主编　陶前功

高等数学习题课教程

（下）

严培胜　易风华　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与普通高等教育“十二五”规划教材《高等数学(下)》(陶前功、严培胜主编, 科学出版社出版)配套的习题课教程. 本教程共分上、下两册. 本书是下册, 内容包含无穷级数、微分方程、多元函数微分学和二重积分. 每章内容包括知识点小结、考研数学大纲要求、典型例题、A 组练习题、总复习题和 B 组练习题. A 组练习题为满足有较高要求的读者配备, B 组练习题为满足经济、管理类数学课程教学基本要求配备, 题型丰富, 难度梯度恰到好处. 本书最后还提供三套模拟试卷和部分习题的参考答案.

本书适合经济、管理、部分理工科(非数学)、社科、人文等各专业学生.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题课教程. 下 / 严培胜，易风华主编. —北京：科学出版社，2019.8

(经济数学基础丛书 / 陶前功主编)

ISBN 978-7-03-062025-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①严… ②易… Ⅲ. ① 高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 162566 号

责任编辑: 谭耀文 李 娜 / 责任校对: 高 嵘
责任印制: 彭 超 / 封面设计: 苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 8 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16
2019 年 8 月第一次印刷 印张: 11 3/4
字数: 276 000

定价: 38.00 元

（如有印装质量问题, 我社负责调换）

前　　言

本书是依据教育部《经济管理类数学课程教学基本要求》, 针对高等学校经济类、管理类等各专业的教学实际编写的高等数学或微积分习题课教程.

高等数学是大学理工类、经济管理类各专业必修的基础课, 也是硕士研究生入学考试的必考科目. 普通高等教育“十二五”规划教材《高等数学(下)》(陶前功、严培胜主编, 科学出版社出版)结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅, 在讲授数学基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法. 为帮助读者更好地学习该教材, 作者根据教学过程中学生对此书反馈的信息和历届本科毕业生考研的深刻体会, 编写了与此教材配套的《高等数学习题课教程(下)》.

本书共分 4 章, 每章又分若干节. 章节的划分和内容设置与《高等数学(下)》(陶前功、严培胜主编, 科学出版社出版)一致. 每章内容分六部分编写：①知识点小结；②考研数学大纲要求; ③典型例题; ④A 组练习题; ⑤总复习题; ⑥B 组练习题. 本书最后还提供三套模拟试卷和部分参考答案.

本书具有如下特点:

(1) 坚持直观理解与严密性的结合. 力求在语言准确的前提下, 陈述通俗易懂、深入浅出, 推理简洁直观, 符合人们普遍的认知和心理过程.

(2) 强调高等数学在经济管理中的应用. 以实例为主线, 贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择, 凡是能够涉及的内容, 都尽可能做一些经济学的诠释.

(3) 坚持概念在应用中形成. 适当弱化如极限、连续、微分、积分等内容的理论要求, 强化利用几何直观、经济应用形成抽象概念, 加强数学思想的融汇和培养.

(4) 体现知识、能力和意识三者的关系. 既要讲授知识, 又要培养运用知识的能力, 更要有运用知识解决问题的意识.

(5) 方便学生自主学习. 每一章都做知识点小结, 并给出各知识点的典型例题, 对本章的基本内容、基本概念、基本方法和技巧做系统归纳.

(6) 适当兼顾学生的考研需求. 从教材的内容和结构上注意与考研数学三的考试大纲衔接, 习题教程上每章都附上最新的考研数学三的考试大纲要求, 从典型例题和 A 组练习题上反映考研的典型题型和知识要点.

本书由严培胜、易风华主编, 曾艳妮、宋娟任副主编, 内容包括: 第 6 章, 无穷级数; 第 7 章, 微分方程; 第 8 章, 多元函数微分学; 第 9 章, 二重积分. 王玉宝、刘云芳、张福生老师参与了部分习题的整理与编辑工作, 陶前功教授为本书编写提供了指导性意见.

本书在编写过程中, 参考了众多的国内外教材, 得到了学校及相关教学单位、教学管

理部门、兄弟院校和科学出版社的大力支持与帮助, 在此一并表示感谢!

书中疏漏和不妥之处在所难免, 真诚希望专家、同行和读者批评指正.

编　者

2019 年 5 月

目　　录

第 6 章　无 穷 级 数

6.1　知识点小结

6.1.1　常数项级数的概念与性质

常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与其部分和数列 $\{s_n\}$ 具有同样的敛散性, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

收敛级数的性质如下:

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, C 是任一常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

(3) 在级数中改变、去掉或增加前面的有限项, 不会改变级数的敛散性, 但一般会改变收敛级数的和.

(4) 在一个收敛级数中, 任意添加括号所得到的新级数仍收敛于原来的和.

(5) 级数收敛的必要条件: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

注: 性质(5)的逆否命题常用来判定级数发散.

6.1.2　正项级数

1. 正项级数收敛

正项级数收敛的充要条件是: 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界.

2. 比较判别法

设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, 有 $u_n \leqslant v_n$ 成立, 那么

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

3. 比较判别法的极限形式

若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \rho$, 则

(1) 当 $0<\rho<+\infty$时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 具有相同的敛散性;

(2) 当$\rho=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛;

(3) 当$\rho=+\infty$时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦发散.

注: 只有知道一些重要级数的敛散性, 并加以灵活应用, 才能熟练掌握比较判别法. 至今, 重要的已知级数包括等比级数、调和级数及 p 级数等.

4. 比值判别法

(达朗贝尔判别法): 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 那么

(1) 当$\rho<1$ 时, 级数收敛;

(2) 当$\rho>1$(包括$\rho=+\infty$)时, 级数发散;

(3) 当$\rho=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散(比值判别法无法判别, 需另行判别).

注: 该判别法适合 u_{n+1} 与 u_n 有公因式且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在或等于无穷大的情形.

5. 根值判别法

(柯西判别法): 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, 那么

(1) 当 $\rho<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$ (包括 $\rho=+\infty$)时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛, 也可能发散.

注: 该判别法适合 u_n 中含有表达式的 n 次幂, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ 或等于 $+\infty$ 的情形.

6.1.3 任意项级数

交错级数敛散性的判别法(莱布尼茨(Leibniz)判别法): 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足

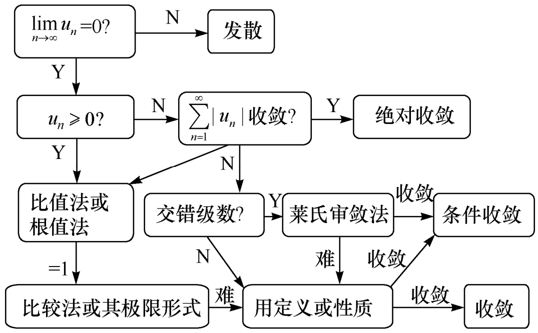
(1) $u_n\geqslant u_{n+1}$, $n=1, 2, 3, \cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $s\leqslant u_1$.

绝对收敛: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛;

条件收敛: 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散, 但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

判别任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$敛散性的步骤如下:



6.1.4　幂级数

1. 函数项级数

在函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域内$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$, $s(x)$为函数项级数的和函数, 在发散域内$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$发散.

2. 幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$, 其中$a_0, a_1,\cdots, a_n,\cdots$称为幂级数的系数.

3. 收敛半径R及其求法

根据幂级数的系数的形式, 当幂级数的各项是依幂次n连续时, 可对其系数应用比值判别法或根值判别法直接求出收敛半径, 即有

$$R=\frac{1}{\rho}, \text{ 其中 } \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{或} \quad \rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|};$$

如果幂级数有缺项, 如缺少奇数次幂的项等, 则应将幂级数视为函数项级数并利用比值判别法或根值判别法判定其收敛域.

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛域的基本步骤

(1) 求出收敛半径R;

(2) 判别常数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$的敛散性;

(3) 写出幂级数的收敛域.

5. 幂级数的算术运算

加、减、乘、除.

6. 幂级数的分析运算

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$在其收敛域 D 上连续 $\left(D \neq \{0\}\right)$.

(2) 逐项求导数. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则在$(-R, R)$内和函数 $s(x)$可导, 且有

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' =\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' =\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} .$$

所得幂级数的收敛半径仍为 R, 但在收敛区间端点处的敛散性可能发生改变.

(3) 逐项积分. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $s(x)$, 收敛半径为 R, 则和函数在$(-R, R)$上可积, 且有

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} .$$

所得幂级数的收敛半径仍为 R, 但在收敛区间端点处的敛散性可能发生改变.

6.1.5 泰勒级数及函数的幂级数展开式

1. 泰勒中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) .$$

拉格朗日型余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

佩亚诺型余项 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$.
带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) .$$

2. 泰勒级数的概念

如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 的某一邻域内有任意阶导数, 则称幂级数

$$f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$的泰勒级数.

当 $x_0=0$ 时，幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为 $f(x)$的麦克劳林级数.

如果函数 $f(x)$在包含零的某区间内有任意阶导数，且在此区间内的麦克劳林公式中的余项以零为极限(当 $n\to\infty$时)，那么函数 $f(x)$就可展开成形如

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

的幂级数.

3. 函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法：直接将函数展开成泰勒级数.

几个常用的函数的幂级数展开式如下：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1);$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\quad x\in(-1,1);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots,\quad x\in(-1,1];$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

(2) 间接法：利用已知的函数展开式(七个基本函数的麦克劳林展开式)，通过线性运算法则、变量代换、恒等变形、逐项求导或逐项积分等方法间接求得幂级数的展开式. 这种方法称为函数展开成幂级数的间接法.

6.1.6　函数的幂级数展开式的应用

1. 数值计算

在函数的幂级数展开式中，取前面有限项就可得到函数的近似公式，这对于计算复杂函数的函数值是非常方便的，即把函数近似表示为 x 的多项式，而多项式的计算只需用到四则运算法则，非常简便.

2. 计算定积分

许多函数, 如 e^{-x^2} 、$\frac{\sin x}{x}$ 、$\frac{1}{\ln x}$ 等, 其原函数不能用初等函数表示, 但若被积函数在积分区间上能展开成幂级数, 则可通过幂级数展开式的逐项积分, 用积分后的级数近似计算所给定积分.

3. 求常数项级数的和

借助幂级数的和函数来求常数项级数和的方法, 即为阿贝尔方法.

6.2　考研数学大纲要求

6.2.1　考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念, 收敛级数的和的概念, 级数的基本性质与收敛的必要条件, 几何级数与 p 级数及其敛散性, 正项级数敛散性的判别法, 任意项级数的绝对收敛与条件收敛, 交错级数与莱布尼茨定理, 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域, 幂级数的和函数, 幂级数在其收敛区间内的基本性质, 简单幂级数的和函数的求法, 初等函数的幂级数展开式.

6.2.2　考试要求

(1) 了解级数的收敛与发散、收敛级数的和的概念.

(2) 了解级数的基本性质及级数收敛的必要条件, 掌握几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件, 掌握正项级数敛散性的比较判别法和比值判别法.

(3) 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念, 以及绝对收敛与收敛的关系, 了解交错级数的莱布尼茨判别法.

(4) 会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域.

(5) 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分), 会求简单幂级数在其收敛区间内的和函数.

(6) 了解 e^x 、$\sin x$ 、$\cos x$ 、$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式.

6.3　典 型 例 题

6.3.1　利用级数的部分和数列讨论级数的敛散性

例 1　讨论级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 的敛散性.

解　$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$, 即题设级数收敛，其和为 1.

例 2　讨论等比级数(又称为几何级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$， $a\neq 0$ 的敛散性.

解　当 $q\neq 1$, 有 $s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$.

若 $|q|<1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$；若 $|q|>1$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$.

若 $q=1$，有 $s_n=na$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$. 若 $q=-1$, 则级数变为

$$s_n=\underbrace{a-a+a-a+...+(-1)^{n-1}a}_{n\text{个}}=\frac{1}{2}a[1-(-1)^n],$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在. 综上所述，当 $|q|<1$ 时，等比级数收敛，且

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots=\frac{a}{1-q}.$$

6.3.2　线性运算性质的应用

例 3　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{3}{n(n+1)}\right]$ 的和.

解　根据等比级数的结论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1/2}{1-1/2}=1$. 而由例 1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=4.$$

例 4　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

证　用反证法，已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，假定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，由 $v_n=(u_n+v_n)-u_n$ 与级数性质得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，这与题设矛盾，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散. 得证.

6.3.3　比较判别法的应用

例 5　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

证 因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ 的敛散性.

解 运用比较判别法. 因为

$\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}<\dfrac{2n+2}{(n+1)^2(n+2)^2}<\dfrac{2}{(n+1)^3}<\dfrac{2}{n^3}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 是收敛的，所以题设级数收敛.

6.3.4 比较判别法的极限形式的应用

例 7 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$.

解 (1) 因 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{1}{n^2}(n\to\infty)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{n^2}=1$. 根据极限形式判别法知题设级数收敛.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{3/2}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{3/2}u_n\sqrt{n+1}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^2=\dfrac{1}{2}\pi^2$，根据极限形式判别法知题设级数收敛.

注: 从以上解答过程中可以看到，极限中的某些等价无穷小在级数敛散性讨论时十分有用，事实上级数的敛散性取决于通项 u_n 趋向于零的“快慢”程度.

6.3.5 比值判别法的应用

例 8 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$.

解 (1) 因为 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!}=\dfrac{1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛.

(2) 因为 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\dfrac{10^n}{n!}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

例 9 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 的敛散性.

解 因为 $\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}<\dfrac{n^2}{2^n}$，而对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$，由比值判别法知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛，从而题设级数亦收敛.

6.3.6　根值判别法的应用

例 10　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解　因为一般项含有 n 次方，故可采用根值判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

故所求级数收敛.

6.3.7　交错级数判别法的应用

例 11　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的敛散性.

解　易见题设级数的一般项 $(-1)^{n-1}u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 满足

(1) $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，其和 $s\leqslant 1$，用 s_n 近似 s 产生的误差 $|r_n|\leqslant\frac{1}{n+1}$.

注: 在判别交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$ (其中，$f(n)>0$)的敛散性时，如果数列 $\{f(n)\}$ 单调减少不容易判断，可通过验证当 x 充分大时 $f'(x)\leqslant 0$ ，来判断当 n 充分大时数列 $\{f(n)\}$ 单调减少；如果直接求极限 $\lim_{n\to\infty}f(n)$ 有困难，亦可通过求 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (假定它存在)来求 $\lim_{n\to\infty}f(n)$.

例 12　判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性.

解　由于 $u_n=\frac{\ln n}{n}>0$, $n>1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ 是交错级数.令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>3$, 有 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$, $x>3$, 即 $n>3$ 时，$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ 是递减数列，又利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

则由莱布尼茨定理知题设级数收敛.

6.3.8 绝对收敛与条件收敛

例 13 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, $p>0$ 的敛散性.

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 易见当 $p>1$ 时，题设级数绝对收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，由莱布尼茨定理知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，故题设级数条件收敛.

例 14 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛，故由定理知题设级数绝对收敛.

例 15 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解 由 $|u_n|=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, 有 $\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{1}{2}\mathrm{e}$ ， $n\to\infty$, 而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}>1$, 因此题设级数发散.

例 16 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 的敛散性.

解 这是一个交错级数，令 $u_n=(-1)^n\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$, 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否绝对收敛. 采用比值审敛法:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+2}}{[(n+1)+1]!}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}>1,$$

所以题设级数发散.

6.3.9 函数项级数的收敛域

例 17 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ 就是一个函数项级数，当 $|x|<1$ 时，级数收敛；当 $|x|\geqslant 1$ 时，级数发散. 因此，这个级数的收敛域是 $(-1,1)$ ，发散域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

在收敛域 $(-1,1)$ 内，有 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$ ，即 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的和函数为 $\frac{1}{1-x}$.

例 18　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解　由比值判别法得

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{|1+x|}\xrightarrow{(n\to\infty)}\frac{1}{|1+x|}.$$

(1) 当 $\frac{1}{|1+x|}<1$ 时，有 $|1+x|>1$, 即 $x>0$ 或 $x<-2$ 时，题设级数绝对收敛.

(2) 当 $\frac{1}{|1+x|}>1$ 时，有 $|1+x|<1$, 即 $-2<x<0$ 时，题设级数发散.

(3) 当 $|1+x|=1$ 时，有 $x=0$ 或 $x=-2$, 即 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $x=-2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故题设级数的收敛域为 $(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.

6.3.10　求幂级数的收敛域

例 19　求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$.

解　(1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, 所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛；当 $x=-1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数发散. 从而题设级数收敛域为 $(-1,1]$.

(2) 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$, 故收敛半径 $R=0$, 即题设级数只在 $x=0$ 处收敛.

(3) 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, 所以收敛半径 $\rho=+\infty$, 题设级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) 令 $t=x-\frac{1}{2}$, 题设级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}t^n$, 因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n}=2$, 所以收敛半径 $R=\frac{1}{2}$, 收敛区间为 $|t|<\frac{1}{2}$, 即 $0<x<1$.