大学数学教学与改革丛书

大学数学基础

杨策平 王 红 主编

MATLAB

科学出版社

大学数学教学与改革丛书

大学数学基础

杨策平　王　红　主编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书以“学习数学基本知识，提高数学应用能力”为宗旨，汲取了现行教学改革中一些成功举措，在每章开始引入本章应用实例，引导学生理论联系实际，建立数学模型，并将 MATLAB 数学软件融入每一章，让学生在理解大学数学基本理论的基础上，用 MATLAB 数学软件进行求解计算，帮助学生提高运用数学工具解决实际问题的能力. 本书内容包括代数理论、几何理论、函数及其应用、函数的极限与连续、导数及其应用、积分初步、微分方程、MATLAB 软件简介.

本书可供高职高专各专业学生使用，也可作为高等学校理工类相关专业的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学基础 / 杨策平，王红主编. —北京：科学出版社，2019.8

（大学数学教学与改革丛书）

ISBN 978-7-03-062138-2

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①杨…　②王…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材
Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 178283 号

责任编辑：邵　娜 / 责任校对：高　嵘
责任印制：彭　超 / 封面设计：彬　峰

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2019 年 8 月第一次印刷　印张：13 1/4
字数：308 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书是按照新形势下高职高专大学数学课程教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的. 本书具有以下特色：

（1）依据高职高专大学数学课程教学的基本要求编写而成，力求突出实用性，坚持理论够用原则. 在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到高职高专教育的特殊性，对教学内容进行精选，淡化理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，将应用落实到使学生能运用所学数学知识求解实际问题上.

（2）本书汲取国内外同类教材的精华，借鉴近几年我国出版的一批教材的成功经验，具有更强的实用性. 书中概念的引入尽可能从实际背景入手，讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，考虑学生自身能力、教学学时等实际情况，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求复杂的计算和证明.

（3）本书注重基础知识、基本方法和基本技能的训练；注重对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行适当的归纳. 每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中.

（4）本书除考虑一般理工科专业对大学数学的需要外，还兼顾经济管理类专业的特点，因此，也适用于经济管理类专业学生参考. 书中大学数学内容全面，可根据不同需要选学部分内容，同时，书中注有“*”号的内容可供教师选讲及学有余力的同学阅读.

本书由杨策平、王红担任主编，由朱玲、徐循、朱长青、刘清国担任副主编. 参编人员有杨策平、王红、朱长青、徐循、朱玲、刘清国等教师.

本书由杨策平和王红修改、统稿、定稿. 在本书的编写过程中，湖北工业大学工程技术学院和湖北工业大学理学院的领导及教师提出了许多宝贵的意见与建议，编者在此表示诚挚的谢意.

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时予以修订.

编　者

2019 年 5 月于武汉

目　　录

第1章　代 数 理 论

本章简要介绍代数学中的因式分解、方程、不等式、集合的知识，并将以上知识用MATLAB命令实现.

下面先提出一个应用实例问题，请大家应用本章相关知识点求解该问题.

应用实例：台风的应急准备问题

据气象台预报，在距某村庄S正东300 km的A处有一个台风中心形成，并以40 km/h的速度向西北方向移动，在距台风中心250 km以内的地区将受其影响. 如果做应急准备，该村庄需要2 h完成防护工作. 假设台风中心沿直线移动，问：该村庄有充足时间应对吗？台风持续影响村庄S多长时间？

1.1　多项式与因式分解

因式分解是中学数学中最重要的恒等变形之一，它被广泛应用于初等数学之中，在数学求根作图、解一元二次方程方面也有很广泛的应用，是解决许多数学问题的有力工具.

1.1.1　多项式

由变量、系数及它们之间的加、减、乘、正整数幂运算得到的表达式称为多项式，其中，未知变量的最高次项的次数称为多项式的次数，如x^2+x+2是二次多项式，$a_0+a_1x+a_2xy+a_3x^3y^2$是五次多项式.

1.1.2　因式分解

把一个多项式在给定范围内（如有理数范围内，即所有项均为有理数）化为几个最简整式的积的形式，这种变形叫作因式分解，也叫作把这个多项式分解因式. 因式分解的常用方法有提取公因式法、公式法、分组分解法和十字相乘法.

1. 提取公因式法

如果一个多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提出来，从而将多项式化成两个因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫作提取公因式法.

这是最基本的方法，常与其他方法配合使用，如$am+bm+cm=m(a+b+c)$.

注意：把$2x+1$变成$2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$不叫提公因式，因为括号内不得用分数.

2. 公式法

如果把乘法公式的等号两边互换位置，就可以得到用于分解因式的公式，用来把某些具有特殊形式的多项式分解因式，这种分解因式的方法叫作公式法. 常用的因式分解公式为平方差公式、完全平方公式、立方和公式、立方差公式、完全立方公式.

1）平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

2）完全平方公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

3）立方和公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

4）立方差公式

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

5）完全立方公式

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3,\quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$$

3. 分组分解法

先将多项式分组，提取公因式或运用公式将每个组分解，然后再考虑组之间的联系继续分解. 例如，

$$\begin{aligned}&2ax-10ay+5by-bx\\&=(2ax-10ay)-(bx-5by)=2a(x-5y)-b(x-5y)\\&=(x-5y)(2a-b).\end{aligned}$$

又如，

$$\begin{aligned}&x^2-y^2+ax+ay\\&=(x+y)(x-y)+a(x+y)=(x+y)(x-y+a).\end{aligned}$$

4. 十字相乘法

对形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 的二次三项式，满足条件 $\begin{cases}a=a_1a_2,\\c=c_1c_2,\\b=a_1c_2+a_2c_1,\end{cases}$ 可以按如图 1.1 所示的十字相乘的方式因式分解.

分解结果为 $ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y)$.

例如，$3x^2-11x+10=(x-2)(3x-5)$，十字相乘方式如图 1.2 所示. 其中，$1\times(-5)+3\times(-2)=-11$.

又如，$2x^2-7xy+6y^2=(x-2y)(2x-3y)$，十字相乘方式如图 1.3 所示. 其中，$x(-3y)+2x(-2y)=-7xy$.

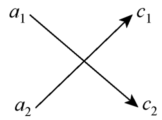

图 1.1

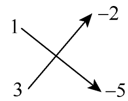

图 1.2

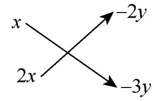

图 1.3

习题 1.1

分解下列因式.

（1）$x^4 - y^4$；　　（2）$x - xy^3$；

（3）$-6y^2 + 11y + 10$；　　（4）$3ax^2 + 6axy + 3ay^2$；

（5）$x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3$；　　（6）$a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2ab + 1$.

1.2　方程与不等式

1.2.1　一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高幂次是 2 的整式方程，形如 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$，这样的方程称为一元二次方程.

一元二次方程的求解方法有因式分解法和求根公式法.

1. 因式分解法

将式子 $ax^2 + bx + c$ 因式分解，如果两个因式的积等于零，那么这两个因式至少有一个等于零，从而得出方程的根.

例如，$x^2 + x - 2 = 0$，可以因式分解为 $(x-1)(x+2) = 0$，所以方程的两个根为 $x_1 = 1$，$x_2 = -2$.

2. 求根公式法

方程的两个根为

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

这里 $b^2 - 4ac$ 称为**根的判别式**，记作 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不等实根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等实根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实根.

1.2.2　不等式

用不等号“＞”或“≥”或“＜”或“≤”连接两个代数式所成的式子，称为**不等式**.

1. 绝对值不等式

含有未知数的绝对值的不等式，叫作**绝对值不等式**.

一般地，不等式$|x| \leqslant a\ (a > 0)$的解是$-a \leqslant x \leqslant a$；不等式$|x| \geqslant a\ (a > 0)$的解是$x \leqslant -a$或$x \geqslant a$. 不等式中的“≤”可以换成“<”，“≥”可以换成“>”.

若把x换成$x+b$（b的正负任意），对于不等式$|x+b| \leqslant a$，去掉绝对值得到$-a \leqslant x+b \leqslant a$，移项得$-a-b \leqslant x \leqslant a-b$；对于不等式$|x+b| \geqslant a$，去掉绝对值得到$x+b \leqslant -a$或$x+b \geqslant a$，移项得$x \leqslant -a-b$或$x \geqslant a-b$.

2. 一元二次不等式

只含有一个未知数且未知数的最高次数为 2 的不等式，称为**一元二次不等式**. 它的一般形式是$ax^2+bx+c > 0$，其中$a \neq 0$. 不等式中的“>”可以换成“≤”、“≥”或“<”.

例 1.1　解不等式$x^2-2x-8 > 0$.

分析　对式子$x^2-2x-8 > 0$进行因式分解，当且仅当两个因式同号（同为正或同为负）时，它们的积才大于零；同样，当且仅当两个因式异号时，它们的积才小于零.

解　原不等式通过因式分解可化为$(x+2)(x-4) > 0$，即

$$\text{（Ⅰ）}\begin{cases} x+2 > 0, \\ x-4 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{（Ⅱ）}\begin{cases} x+2 < 0, \\ x-4 < 0. \end{cases}$$

（Ⅰ）的解为$x > 4$，（Ⅱ）的解为$x < -2$，所以不等式的解为$x > 4$或$x < -2$.

1.2.3　二元一次方程组

例如，

$$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94. \end{cases}$$

上面列出的这两个方程中，每个方程都含有两个未知数，并且未知数的次数都是 1，这样的方程称为**二元一次方程**，把这两个二元一次方程合在一起，就组成了一个**二元一次方程组**（又称二元线性方程组）.

求解二元一次方程组，一般采用**消元法**，步骤如下.

（1）方程组里一个方程的两边都乘以一个适当的数，或者分别在两个方程的两边都乘以一个适当的数，使其中某一个未知数的系数的绝对值相等；

（2）把方程两边分别相加或相减，消去这个未知数，使解二元一次方程组转化为解一元一次方程；

（3）求出该一元一次方程的未知数的值，然后代入二元一次方程组中任意一个方程，求出另一个未知数的值.

例 1.2　解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=16, & (1.1)\\ 5x-6y=33. & (1.2)\end{cases}$$

解　式（1.1）×3 得

$$9x+12y=48, \tag{1.3}$$

式（1.2）×2 得

$$10x-12y=66, \tag{1.4}$$

式（1.3）+式（1.4）得 $19x=144$，即 $x=6$，把 $x=6$ 代入式（1.1）得 $y=-\frac{1}{2}$，所以方程组的解为

$$\begin{cases}x=6,\\ y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

习　题　1.2

1. 解下列方程.

（1）$3x^2-75=0$；　　（2）$y^2+2y-48=0$；

（3）$x(x+5)=24$；　　（4）$(y+3)(1-3y)=6+2y^2$.

2. 解下列不等式.

（1）$|2x+5|<6$；　　（2）$|4x-1|\geqslant 9$；

（3）$x^2-4x+4\leqslant 0$；　　（4）$-2x^2+3x+5>0$；

（5）$x^2-5x+6\geqslant 0$.

1.3　集合的概念

1.3.1　元素与集合

考察下面一些对象：某连所有的战士；某团所有的重机枪；平面上所有的直角三角形；自然数的全体等. 它们分别是由具有某种特定性质的战士、重机枪、图形、数组成的总体.

我们把具有某种特定性质的对象组成的总体称为**集合**（也简称为集）；组成集合的每个对象称为这个集合的**元素**（也简称为元）.

集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就称**元素 $\boldsymbol{a}$ 属于集合** A，记作 $a\in A$；如果 b 不是集合 A 的元素，就称**元素 $\boldsymbol{b}$ 不属于集合** A，记作 $b\notin A$.

1.3.2　集合的分类

集合按其所含元素的个数可划分为下列几种.

（1）**单元素集**：只含有一个元素的集合.

（2）**有限集**：含有有限个元素的集合.

例如，某培训基地实习车间的所有机床、某技术学院图书馆的全部藏书都是有限集.

（3）**无限集**：含有无限个元素的集合.

例如，不等式$3x-5>1$的所有解是无限集.

（4）**空集**：不含任何元素的集合，用$\varnothing$表示.

例如，在实数范围内，方程$4x^2+9=0$的解集为空集.

（5）**非空集合**：至少含有一个元素的集合.

1.3.3　集合的表示方法

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，元素间用逗号隔开，这种表示集合的方法称为**列举法**. 例如，由数 1，2，3，4，5 组成的集合，可以表示为{1，2，3，4，5}.

把集合中所有元素具有的共同性质描述出来，写在大括号内，这种表示集合的方法称为**描述法**. 用描述法表示集合的一般形式是

$$A=\{x\mid x\text{具有的性质}\},$$

大括号内竖线左边为集合中元素的一般形式，竖线右边为集合中元素共有的特定性质. 例如，由方程$x^2-2x=0$的解组成的集合（解集）可以表示为$S=\{x\mid x^2-2x=0\}$；圆$x^2+y^2=5^2$上所有的点组成的集合可以表示为$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=5^2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

1.3.4　常用集合及表示

由数组成的集合叫作**数集**，数学中一些常用的数集，用固定的大写字母表示.

（1）所有自然数组成的集合，称为**自然数集**，用 **N** 表示. 注意：自然数是全体非负整数，0 也是自然数.

（2）所有整数组成的集合，称为**整数集**，用 **Z** 表示.

（3）所有有理数组成的集合，称为**有理数集**，用 **Q** 表示.

（4）所有实数组成的集合，称为**实数集**，用 **R** 表示.

1.3.5　子集与集合相等

设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，容易看出，集合A的每一个元素都是集合B的元素. 一般地，对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则称集合A是集合B的子集，记为$A\subseteq B$（或$B\supseteq A$），读作“集合A包含于集合B”（或“集合B包含集合A”）.

规定，**空集是任何集合的子集**. 也就是说，对于任何一个集合A，都有$\varnothing\subseteq A$.

对于集合A,B,C，如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$.

对于集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$，读作“集合 A 等于集合 B”.

例如，$A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$，$B = \{-1, -2\}$，则 $A = B$.

例 1.3　用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\supseteq$，$=$）填空.

（1）a ____ $\{a,b\}$；（2）$\{a\}$ ____ $\{a,b\}$；（3）$\varnothing$ ____ $\{a,b\}$；（4）$\{a,b\}$ ____ $\{b,a\}$；

（5）$\{2,4,6,8\}$ ____ $\{4,6\}$；（6）$\{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ____ $\{-3,1\}$；

（7）0 ____ $\varnothing$；（8）$\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$ ____ $\{x \mid x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$.

解　（1）这是元素与集合之间的关系，所以 $a \in \{a,b\}$；

（2）这是集合与集合之间的关系，所以 $\{a\} \subseteq \{a,b\}$；

（3）$\varnothing \subseteq \{a,b\}$；（4）$\{a,b\} = \{b,a\}$；（5）$\{2,4,6,8\} \supseteq \{4,6\}$；

（6）方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的解是 $x_1 = -3$，$x_2 = 1$，所以 $\{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{-3,1\}$；

（7）这是元素与集合的关系，$0 \notin \varnothing$；

（8）$\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\} \supseteq \{x \mid x = 4n, n \in \mathbf{N}\}$.

例 1.4　写出集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集.

解　集合 $\{a,b\}$ 的子集有 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$.

1.3.6　区间与邻域

实数集合中一类特殊的子集就是区间，通常用区间表示一个变量的变化范围.

设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记为(a, b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\},$$

a 和 b 为开区间(a, b)的端点，$a \notin (a,b)$ 且 $b \notin (a,b)$.

类似地，可以定义闭区间$[a, b]$为

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

a 和 b 为闭区间$[a, b]$的端点，$a \in [a,b]$ 且 $b \in [a,b]$.

两种半开半闭区间为

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$

其中 $a \in [a,b)$，$b \in [a,b)$，以及 $a \notin (a,b]$，$b \notin (a,b]$.

以上四种形式的区间长度均 $b - a$，因此都是有限区间. 此外，还有 5 种形式的无限区间. 引入符号“$+\infty$”及“$-\infty$”，分别读作正无穷大和负无穷大，则 5 种无限区间的定义如下：

$$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}；$$

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}；$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}；$$

$$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}；$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}\quad \text{(即实数集合 }\mathbf{R}\text{)}.$$

以后在不需要特别说明所讨论的区间是否包含端点及是否为有限区间时，就简单地称其为区间，常用字母 I 表示.

区间中的一类特例就是邻域.

设 a 与 δ 为实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x\,\|\,x-a\,|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记为$U(a,\delta)$，其中 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径. 由于$|x-a|<\delta$ 就是$a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x\,\|\,x-a\,|<\delta\}$$

或

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

当不需要考虑邻域半径的大小时，也可以将其简记为 $U(a)$.

有时为了讨论问题，需要将邻域的中心点 a 去掉，得到点 a 的去心 δ 邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

习　题　1.3

选择“$\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$”之一填空.

（1）3______$\{$全体偶数$\}$；

（2）2______$\{x\,|\,2x-4=0\}$；

（3）a______$\{a,b\}$；

（4）$\{a\}$______$\{a,b\}$；

（5）$\{0\}$______$\varnothing$；

（6）a______$\{b,c,d\}$；

（7）$\{x\,|\,\sqrt{x}=1\}$______$\{x\,|\,x=1\}$.

1.4　代数理论的 MATLAB 软件求解

1.4.1　基本命令

表 1.1　代数理论的 MATLAB 软件求解的运算符

数学运算	加	减	乘	除	乘幂
运算符号	+	–	*	/	^

表 1.2　代数理论的 MATLAB 软件求解的运算函数

命令语法	功能
`syms x`	定义变量 x
`g=solve(eq,var)`	以指定的变量 var 为未知数求解方程 eq
`maple`	调用 maple 工具箱进行符号数学运算