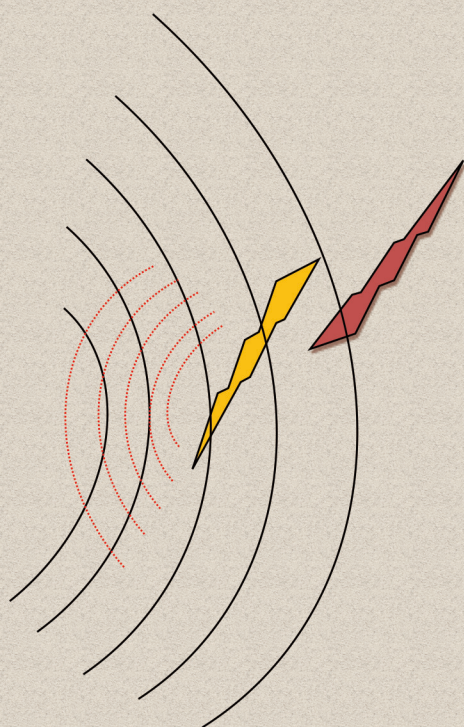


# 岩石物理与动力学原理

Rock Physics and Dynamics Principle

徐松林 刘永贵 席道瑛 著



科学出版社

# 岩石物理与动力学原理

徐松林 刘永贵 席道瑛 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书共 7 章, 围绕岩石中的应力波和振动理论, 讲述了岩石物理和动力学理论与方法。主要内容包括: 岩石声场和波动原理、岩石热弛豫波动分析原理、岩石波动与细微观结构相互作用原理、岩石微界面动力学原理、复杂应力状态下岩石波动效应、岩石非均匀性与波动原理以及岩石波动过程的量纲分析原理。本书包含了最新的研究成果, 具有较强的前沿性; 在内容的组织上, 以基础理论研究为主, 兼顾工程应用。

本书可供高等院校和科研单位地球物理、岩石力学与岩土工程、环境、水利、矿山等领域的教师和研究人员参考, 也可作为相关专业研究生的教学参考书。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

岩石物理与动力学原理 / 徐松林, 刘永贵, 席道瑛著. —北京: 科学出版社, 2019.10

ISBN 978-7-03-062660-8

I. ①岩… II. ①徐… ②刘… ③席… III. ①岩石物理学 ②岩石力学 IV. ①P584 ②TU45

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 233591 号

责任编辑: 李涪汁 高慧元 / 责任校对: 杨聪敏  
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http: //www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2019 年 10 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2019 年 10 月第一次印刷 印张: 14 1/2

字数: 344 000

定价: 89.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前言

岩石动力学目前主要研究与宏观性能相关的岩石动态强度及波动响应特性,已经有相当多的研究成果,在工程中得到了较系统的应用,形成了岩石工程设计、防护等领域的一系列分析原理和设计方法。但是,对于岩石动态力学性能的本质问题,即岩石的率效应、惯性效应以及尺度效应等,尚未形成深入的认识。相关问题的描述仍停留在现象总结阶段,没有较深入的机制阐述。本书将结合岩石本身的物理力学特性,探索描述岩石动力学特性的原理和方法。本书是中国科学技术大学出版社已出版的两本著作——《岩石物理学基础》(2012)和《岩石物理与本构理论》(2016)的延续,主要集中在反映岩石物理特性及其动力学响应方面的研究成果。

岩石动力学以研究岩石材料和结构的运动为主旨,岩石材料和结构的物理力学性能在相关研究中有着非常重要的意义。基于连续介质力学观点的岩石动力学研究的基本方程组主要包括三类方程:①几何关系( $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ ,或连续性方程, $\partial\varepsilon/\partial t = \partial v/\partial X$ ),建立位移 $u_i$ 、应变 $\varepsilon_{ij}$ 和质点速度 $v_i$ 等量的联系,它体现了连续介质的位移连续性或质量守恒;②运动学方程( $\sigma_{ij,j} = \rho\partial^2 u_i/\partial t^2$ ),建立应力 $\sigma_{ij}$ 、位移 $u_i$ 和质点速度 $\partial u_i/\partial t = v_i$ 等量的联系,它体现了连续介质的动量守恒;③物理关系(即本构关系, $\sigma \equiv \sigma(\varepsilon, T, \dot{\varepsilon}, \dots)$ ),建立应力、应变及其速率之间的联系,它体现了材料本身内禀的力学性能,在动力学问题中,通常用波速的表达式来替代,例如, $C = \sqrt{d\sigma/(\rho_0 d\varepsilon)}$ 。此三类方程构成了岩石动力学的分析基础。另外,还有联系各种形式能量之间关系的能量守恒方程,在考虑系统能量损耗及相关机制的时候需要用到。这里岩石材料的本构关系反映了岩石动力学的基本特性,因此,目前岩石动力学中大部分工作集中在这个方面。

岩石动力学的发展与上述偏微分方程组的求解密切相关。由于偏微分方程组求解的复杂性,目前较成熟的解主要为三类:①谐波解(假定位移满足 $u = u_0 \exp[-i(lx - \omega t)]$ 的形式),它表明了谐波在岩石中传播过程中的衰减和弥散特性,可用于岩石中振动特性、地震波传播的分析;②黎曼解,它关注经过波阵面之后各物理量的改变量之间的关系,可用于岩石中应力波、冲击波等问题的分析;③孤波解(即存在独立的一个峰),它关注一些特殊的边界作用,是数学物理中较重要的一个研究方向,通常与吸引子一起进行研究,岩石动力学中尚未发现相关应用。但是,现在的研究发现:与损伤、破裂等动力学相关的物理量的演化和发展似乎不仅仅与波动过程相关。波动过程主要传播一种扰动信号,没有“质量流”,但是这些过程不仅有波动扰动的传播,而且还有所谓的“质量流”,即岩石的局部破裂、损伤也会随之进行传播。这种传播与尺度(破碎区域、压缩区域等)有极大的关联

性。因此,传统的波动力学的概念需要进行一定拓展,传统的波动方程需要进行必要的改进,需要加入“质量扩散”的相关概念。

岩石动力学的研究对象为动载荷下岩石的响应。该过程以短历时(short duration)、高幅值(intensive loading)、高应变率(high strain rate)为特征。该过程作用的特征时间通常以微秒计。若引入表征岩石结构动态响应的特征时间( $t_w = L_s/C_w$ , 其中 $L_s$ 为岩石特征尺度, $C_w$ 为应力波传播的特征速度),该过程的作用时间低于 $t_w$ 。一般准静态载荷下的应变率为 $10^{-5} \sim 10^{-3} \text{s}^{-1}$ 量级,而在爆炸/冲击载荷下的应变率则高达 $10^2 \sim 10^7 \text{s}^{-1}$ 量级,比准静态载荷下的高数个量级;各种类型的非弹性变形和破坏都是以有限速率发展的非瞬态响应(如损伤演化过程、裂纹扩展和传播等),岩石材料和结构的力学性能与应变率相关。岩石动力学问题主要关注两个动态效应,即惯性效应和黏性效应。岩石微元体的惯性效应与位移的二阶导数 $\partial^2 u / \partial t^2$ 有关,对应单元是一种非平衡状态,导致了应力波传播;岩石微元体的黏性效应与位移的一阶导数 $\partial u / \partial t$ 有关,对应岩石材料内部结构特征和非均质特征,引起了有关岩石动态力学性能的研究。这也使得热力耦合、压剪耦合成为岩石材料在高应变率下需要重点关注的问题。

本书共分7章。第1章为岩石声场和波动原理,波是指扰动信号的传播,波动作用包括从短程(short term)的波动效应到长程(long term)的振动效应(声场)直到长期的准静态平衡作用,从波动和谐波(振动)特性介绍了岩石中声场和波动分析的基本方法。第2章为岩石热弛豫波动分析原理,将热激活弛豫机制引入Biot模型,用品质因子的倒数 $Q^{-1}$ 来量化波的热能损耗部分,研究饱和岩石的频率和温度依赖性,探讨了P波和S波在频域和温度域上热弛豫峰的移动规律及其物理机制。第3章为岩石波动与细微观结构相互作用原理,结合弹性波波动方程的格林函数解,应用边界积分方法,形成了研究岩石内部细微观结构对弹性波传播的影响的方法;考虑岩石细微观结构的三种简化模型(双裂纹模型、椭圆孔洞模型、双椭圆孔洞模型等),建立了静水压、纯剪切、压剪复合加载等三类内边界条件下的边界积分计算方法以及“强相互作用”和“线性叠加”等两类处理技术,研究了不同尺寸分布的细微观结构与弹性波的相互作用规律。第4章为岩石微界面动力学原理,基于对称子群的演化建立了微界面表面形态演化过程;基于杆束实验技术、声发射实验技术和红外测温技术,探讨了岩石节理摩擦过程中波致摩擦阶段和惯性摩擦阶段的声发射和产热信息及其相关物理特性。第5章为复杂应力状态下岩石波动效应,对常规SHPB装置进行改进,形成了岩石压剪联合加载实验技术、真三轴静载下岩石混凝土动态实验技术、真三轴静载下岩石混凝土侵彻实验技术,探讨了岩石加载路径敏感性和应变率效应;并介绍了纽约州立大学石溪分校矿物物理研究所Li教授的静高压作用下超声波测试技术。第6章为岩石非均匀性与波动原理,结合原位高速摄影、X射线成像、X射线衍射等实验技术,实现了对脆性材料以及脆性颗粒材料在复杂应力状态、多种应变速率下的压缩加载实验,观测和表征了材料表面及内部的非均匀变形;利用数字图像相关技术(DIC和XDIC),进行了材料表面和内部结构的全场应变计算,并在二维应变场的基础上,推导了描述脆性材料非均匀变形的统计演化理论,以及描述颗粒材料压实阵面传播的弛豫-扩散模型;基于颗粒微力学机制,分析了颗粒材料中的压剪耦合效应及其对波动传播的影响。第7章为岩石波动过程的量纲分析原理,简单介绍了量纲分析的 $\pi$ 定理,基于岩石动力学的多尺度、多重

物理机制的复杂问题，提出了“量纲动力学”分析的初步原则，即考虑多尺度、多重物理机制转化的动力学演化过程，进行主要无量纲量的转化，从而实现机制描述的转化；以时温等效原理、多孔饱和岩石的特征频率、厚靶侵彻的三种机制、岩石高应变率破坏的两种机制等的分析为例，初步展示了这种分析原理。

本书是作者在中国科学技术大学工程科学学院近 20 年的教学经验总结和科学研究积累。部分工作得到了国家自然科学基金项目(10202022, 10672157, 40874093, 11272304, 11472264, 11672286)的资助，在此致以诚挚的谢意。博士生郑文、王鹏飞、黄俊宇、周李姜和硕士生谭子翰、周伟达、章超、张磊、施春英、张鸣、陈丽娜、蒋和斌等参与了相应的研究工作。本书的出版要感谢博士生单俊芳、硕士生薛晓在图件绘制和校稿方面给予的帮助，感谢荷兰代尔夫特理工大学的邓向允博士在文献收集方面给予的帮助。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏之处，欢迎读者批评指正。

作者

2019年6月8日

# 目 录

第 1 章 岩石声场和波动原理	1
1.1 引言	1
1.2 离散波与连续波	1
1.2.1 晶格热振动	1
1.2.2 讨论——爱因斯坦模型和德拜模型	5
1.3 强间断波和连续波	5
1.3.1 强间断波动方程——跨波阵面	6
1.3.2 连续波动方程——沿波阵面的表述	11
1.4 波动方程求解	12
1.4.1 波动方程一般解法	12
1.4.2 特征线法求解	13
1.4.3 积分变换法求解	14
1.4.4 格林函数法求解——波与细微观结构的相互作用	16
1.5 线弹性波和黏弹性波	19
1.6 扩散过程和波动过程	21
1.7 典型波、波速和频散	23
1.8 面波	26
1.8.1 瑞利面波	26
1.8.2 勒夫面波	27
1.8.3 斯通莱面波	28
1.9 散射——瑞利散射、拉曼散射和布里渊散射	28
1.10 小结	31
参考文献	31
第 2 章 岩石热弛豫波动分析原理	33
2.1 引言	33
2.2 典型的理论模型	34
2.3 基于时温等效原理的实验研究	37
2.3.1 实验技术	37
2.3.2 时温等效原理	38

2.4	热弛豫波动模型	41
2.4.1	流变模型与德拜方程	41
2.4.2	基于热激活机制波动模型	43
2.4.3	热弛豫波动模型分析	45
2.5	热弛豫波动实验现象的进一步讨论	47
2.6	基于热弛豫机制的 P 波波动分析	48
2.6.1	P 波波速和衰减理论分析	48
2.6.2	Biot 模型、BISQ 模型和热弛豫模型比较	50
2.6.3	P 波频率谱和温度谱	52
2.7	基于热弛豫机制的 S 波波动分析	56
2.7.1	S 波波速和衰减理论分析	56
2.7.2	S 波频率谱和温度谱分析	57
2.8	热弛豫模型的初步应用	60
2.9	宏观唯象波速的半理论分析	61
2.9.1	岩石中宏观波速的尺度效应和频散效应	61
2.9.2	岩石中宏观唯象波速的半理论分析	62
2.9.3	宏观唯象波速半理论公式的应用	64
2.10	小结	68
	参考文献	69
<b>第 3 章</b>	<b>岩石波动与细微观结构相互作用原理</b>	<b>72</b>
3.1	引言	72
3.2	实验技术	72
3.3	实验结果	74
3.4	基于格林函数法的理论模型	77
3.4.1	双裂纹模型	79
3.4.2	单椭圆孔洞模型	80
3.4.3	双椭圆孔洞模型	82
3.4.4	数值计算	87
3.5	缺陷内部应力边界条件	90
3.5.1	均匀应力分布边界条件	91
3.5.2	等刚度系数应力边界条件	92
3.5.3	模型计算结果	92
3.6	含多种尺寸缺陷的岩石弹性波传播	96
3.7	弹性波传播与地应力状态	99
3.7.1	开挖卸荷对岩石声波地震波速度的影响	99
3.7.2	开挖卸荷过程中岩石波速	101
3.7.3	几何结构变化对声波波形的影响	103
3.7.4	声波和地震波波速与地应力确定	104

3.8 小结 .....	105
参考文献 .....	105
<b>第4章 岩石微界面动力学原理 .....</b>	<b>107</b>
4.1 引言 .....	107
4.2 粗糙表面形态及描述 .....	107
4.2.1 随机抽样法 .....	107
4.2.2 激光扫描和 BG 法 .....	108
4.2.3 粗糙表面的对称群描述及演化 .....	109
4.3 微动摩擦表面演化 .....	112
4.3.1 岩石节理微动摩擦过程 .....	112
4.3.2 微动摩擦表面变形的控制方程 .....	115
4.4 岩石微动摩擦实验技术 .....	117
4.4.1 杆束实验技术 .....	117
4.4.2 声发射实验技术 .....	118
4.4.3 红外测温技术 .....	121
4.5 岩石微动摩擦过程的物理特性 .....	127
4.5.1 界面微动滑移特性 .....	127
4.5.2 界面微动滑移的声发射和温升 .....	128
4.6 小结 .....	134
参考文献 .....	134
<b>第5章 复杂应力状态下岩石波动效应 .....</b>	<b>136</b>
5.1 引言 .....	136
5.2 主动和被动围压实验 .....	138
5.3 动态压剪实验 .....	139
5.3.1 实验原理 .....	139
5.3.2 花岗岩压剪动特性 .....	141
5.3.3 花岗岩压剪耦合特性 .....	142
5.4 真三轴应力状态下动态冲击实验 .....	145
5.4.1 实验原理 .....	145
5.4.2 混凝土三轴动特性 .....	147
5.4.3 混凝土三轴强度 .....	149
5.4.4 中间主应力影响 .....	151
5.4.5 讨论——横向效应 .....	151
5.5 三轴应力状态下侵彻性能 .....	152
5.5.1 实验原理 .....	152
5.5.2 三轴静载下的侵彻响应 .....	154
5.6 岩石矿物静高压研究 .....	159
5.7 小结 .....	163

参考文献	164
<b>第 6 章 岩石非均匀性与波动原理</b>	<b>167</b>
6.1 引言	167
6.2 实验技术	167
6.2.1 X 射线成像与衍射	167
6.2.2 数字散斑技术	169
6.2.3 岩石中的位移场和应变场	172
6.3 岩石非均匀性的表征和演化	173
6.3.1 同时 X 射线成像与衍射	173
6.3.2 数字散斑结果与 Weibull 分布统计	177
6.3.3 应变场中非均匀性的演化	180
6.4 非均匀性波动传播	186
6.4.1 碳化硼颗粒体系中非均匀性压缩带演化	186
6.4.2 碳化硼固体中损伤导致的非均匀性演化	188
6.5 岩石压剪耦合波动方程	191
6.5.1 岩石压剪耦合本构模型的特点	191
6.5.2 岩石压剪耦合波动方程	192
6.6 岩石细观非均匀压剪耦合波动传播	193
6.6.1 基于微力学的应力应变关系	193
6.6.2 压剪耦合的应力应变关系	195
6.6.3 压剪耦合的波动传播	197
6.7 岩石热力耦合波动方程	202
6.8 小结	205
参考文献	206
<b>第 7 章 岩石波动过程的量纲分析原理</b>	<b>207</b>
7.1 引言	207
7.2 $\pi$ 定理与量纲分析	208
7.3 岩石波动过程中的无量纲量	209
7.4 岩石中无量纲量的演化律	211
7.4.1 时温等效原理中的时间与温度的演化	211
7.4.2 孔隙流动中特征频率演化	212
7.4.3 侵彻过程中强度机制与压缩机制的演化	214
7.4.4 岩石动态破坏过程中拉伸破坏与剪切破坏的演化	214
7.5 岩石动力学过程的量纲分析	215
7.6 小结	219
参考文献	220
<b>附录 2A 孔隙介质模型</b>	<b>221</b>

# | 第 1 章 | 岩石声场和波动原理

## 1.1 引言

从薛定谔关于创立波动力学的第一次演讲开始，关于波动力学，薛定谔认为：“……光线对应于力学路径，而信号就像质点一样地运动。但是，用射线来描述波的运动只是一种近似(在光波的情况下称为‘几何光学’)。只有碰巧当我们所要处理的波动现象的结构与波长相比甚为粗略，而我们又只对它的‘粗略结构’感兴趣时，这种近似才成立。波动现象的精细结构绝不能用射线(‘几何光学’)的处理来揭示，而且总是存在着这样的波动现象，它们都是那么细微，以至于射线方法是毫无用处，而且也提供不出任何知识的。因此，在用波动力学代替通常的力学时，我们可以指望，一方面把通常的力学作为一种近似保留下来，它只对粗略的‘宏观力学’现象才是有效的；而另一方面，又对那些精细的‘微观力学’现象(原子、电子的运动)做出解释，关于这种现象，通常的力学完全不能给出任何知识。至少，如果不做非常人为的附加的假设，是不能做到这一点的，这些假设实际构成了理论中比力学处理更重要得多的部分。”(薛定谔，2008)

岩石中细微观的力学性能的研究本质上都是波动效应研究，也就是与所研究的岩石微观结构的动力学行为相关，这主要包括：短程(short term)的波动效应、长程(long term)的振动效应——声场、长期的准静态平衡作用。波是指某种物理量的扰动信号的传播，连续介质中的应力波就是指应力的扰动信号在介质中的传播。

## 1.2 离散波与连续波

### 1.2.1 晶格热振动

#### 1. 一维简单晶格的准谐振动

由  $N$  个相同原子组成的简单立方晶体进行一维纵向晶格热振动。如图 1.2.1 所示，原子质量为  $m$ ，平衡时原子间距为  $a$ ，图中  $X_n$  表示第  $n$  个原子由于热振动而偏离平衡位置的位移，则第  $n$  个和第  $n+1$  个原子之间的相对位移为  $X_n - X_{n+1}$ 。

对于此系统，原子间作用力简化为线性胡克弹性力。考虑微弱振动，只计算相邻粒子对原子热振动的影响。因此，第  $n$  个原子的运动方程为

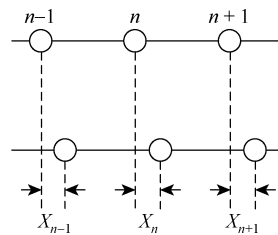


图 1.2.1 一维原子链的振动

$$m\ddot{X}_n = k_\alpha (X_{n+1} + X_{n-1} - 2X_n), \quad n=1,2,\dots,N \quad (1.2.1)$$

式中,  $k_\alpha$  为弹簧系数。考虑微弱振动, 其解采用简谐波的形式:

$$X_n = Ae^{i(\omega t - 2\pi n a k)} \quad (1.2.2)$$

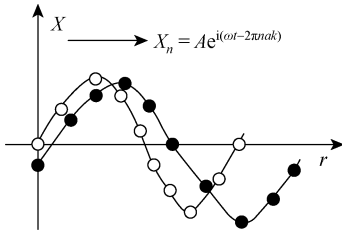


图 1.2.2 粒子群谐振

式中,  $A$  为振幅;  $na$  为第  $n$  个原子相对于原点的平衡位置;  $k = 1/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为波长。这表明: 各原子在平衡位置的热振动是以简谐波的形式在晶格中传播的, 称为格波 (lattice wave), 如图 1.2.2 所示。此时, 晶体密度  $\rho = m/a^3$ , 杨氏模量  $E = k_\alpha/a$ , 一维应力弹性波速  $C_0 = \sqrt{E/\rho} = a\sqrt{k_\alpha/m}$ 。

将谐波解代入式(1.2.1), 得到

$$\omega^2 = \frac{4k_\alpha}{m} \sin^2(\pi a k) = \omega_{\max}^2 \sin^2(\pi a k) \quad (1.2.3)$$

图 1.2.3 给出了角频率  $\omega$  与波数  $k$  (或波长  $\lambda$ ) 之间的对应关系, 描述了格波传播依赖于频率的弥散现象, 称为色散或弥散关系 (dispersion relation)。为了使角频率  $\omega$  是  $k$  的单值函数, 将  $k$  限制在区间:  $-\frac{1}{2a} < k \leq \frac{1}{2a}$ 。正的  $k$  对应于正向传播的格波, 而负的  $k$  则对应于负向传播的格波。每一个  $k$  有一个确定的频率  $\omega$ , 称为一个振型或振动模。不同的振型对应着不同波长的格波。格波中的各个振型是互相独立的, 也称为简正振型 (normal mode)。系统中  $N$  个耦合的谐振子的运动方程, 其解则是解耦的简正方式的振动, 即将  $N$  个原子相互作用下的振动问题化为了对  $N$  个独立的简正方式的讨论——此即为量子化过程。

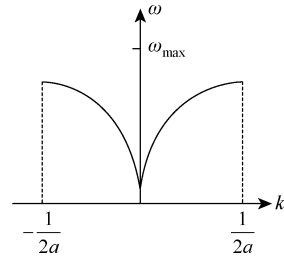


图 1.2.3 角频率与波数  $k$  的对应关系

格波的波长有极小值  $\lambda_{\min} = 2a$ , 对应格波的角频率有极大值:  $\omega_{\max} = \sqrt{4k_\alpha/m}$ 。这一结论在考虑介质的微观结构时是必然的, 在连续介质力学中已经把微观结构尺度 (如晶格常数  $a$ ) 在宏观尺度中连续化了, 对应的平面波的波长可宏观地任意小, 角频率不受限制。格波的波速为

$$C = \frac{1}{k} \frac{\omega}{2\pi} = a \sqrt{\frac{k_\alpha}{m}} \frac{\sin(\pi a k)}{\pi a k} = C_0 \frac{\sin(\pi a k)}{\pi a k} \quad (1.2.4)$$

此式表明格波是一个波速依赖于晶格特征尺寸 (晶格常数  $a$ ) 与波长  $\lambda (\lambda = 1/k)$  之比的弥散波。例如, 钢, 晶格常数  $a$  约为  $3\text{\AA}$  (埃), 平均振动时间约为  $10^{-13}\text{s}$ , 则钢的格波波速约为  $3\text{km/s}$ , 这与钢的弹性波波速很接近 ( $3.5\text{km/s}$ )。当  $ka \ll 1$  或  $\lambda \gg a$  时, 即在长波情况下,  $\sin(\pi a k) \approx \pi a k$ , 则对应的波速为

$$C = \frac{1}{k} \frac{\omega}{2\pi} \approx a \sqrt{\frac{k_\alpha}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = C_0 \quad (1.2.5)$$

这时格波的波速只与材料特性有关。当波长远大于晶格常数时, 晶体可以看作连续介质。

## 2. 关于一维复式晶格的准谐振动

进一步讨论两种不同的原子组成的一维复式晶格的热振动。如图 1.2.4 所示，周期性相间排列着  $P_1$  和  $P_2$  两种不同的原子，相邻同种原子之间的距离为  $2a$ 。质量为  $m_1$  的  $P_1$  原子位于  $2n-1, 2n+1, 2n+3, \dots$ ，质量为  $m_2$  的  $P_2$  原子位于  $2n-2, 2n, 2n+2, \dots$ 。这样，与  $P_1$  原子相邻的是  $P_2$  原子，而与  $P_2$  原子相邻的是  $P_1$  原子，两者是互相耦合的。两种原子的运动方程分别为(不妨令  $m_2 > m_1$ )：

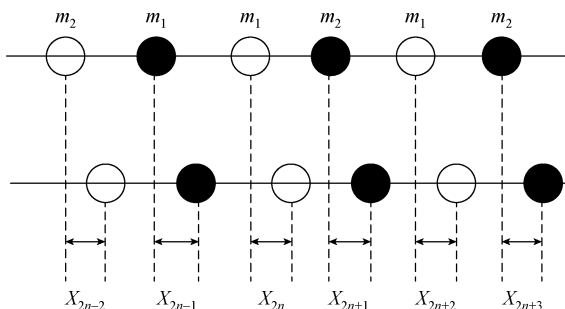


图 1.2.4 一维双原子链的振动

$$m_1 \ddot{X}_{2n+1} = k_\alpha (X_{2n+2} + X_{2n} - 2X_{2n+1}) \quad (1.2.6a)$$

$$m_2 \ddot{X}_{2n} = k_\alpha (X_{2n+1} + X_{2n-1} - 2X_{2n}) \quad (1.2.6b)$$

考虑微弱振动，其解采用简谐波的形式：

$$X_{2n+1} = A e^{i[\omega t - 2\pi k(2n+1)a]} \quad (1.2.7a)$$

$$X_{2n} = B e^{i[\omega t - 2\pi k(2n)a]} \quad (1.2.7b)$$

式中， $A$  与  $B$  分别是质量为  $m_1$  的  $P_1$  原子与  $m_2$  的  $P_2$  原子的振幅。将它们代入式(1.2.6)中，可得

$$(m_1 \omega^2 - 2k_\alpha)A + (2\alpha \cos(2\pi ka))B = 0 \quad (1.2.8a)$$

$$(2\alpha \cos(2\pi ka))A + (m_2 \omega^2 - 2k_\alpha)B = 0 \quad (1.2.8b)$$

若要求  $A$  与  $B$  有非平凡解，则其系数行列式必须等于零，由此可以得到

$$\omega^2 = \frac{k_\alpha (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2(2\pi ka) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.2.9)$$

图 1.2.5 给出了两类独立振动的角频率  $\omega$  与波数  $k$  之间的对应关系。对于每一个  $k$  值，有频率为  $\omega_+$  与  $\omega_-$  的两类独立的振动，分别对应式(1.2.9)中取正号和取负号的值。与  $\omega_+$  对应的一支称为光学支(optical branch)，而与  $\omega_-$  对应的一支称为声学支(acoustic branch)。它们的长波极限的性质分别与光波和声波相关。为了使角频率  $\omega$  是  $k$  的单值函数，将  $k$  限制在区间： $-\frac{1}{4a} < k \leq \frac{1}{4a}$ 。

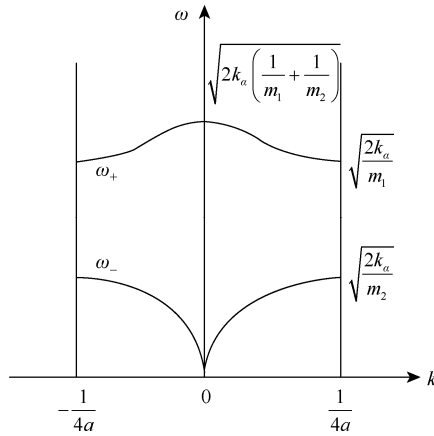


图 1.2.5 两类独立振动的角频率与波数的对应关系

对于光学支，当  $k=0$  时(长波极限)，有

$$\omega_+ = \sqrt{2k_\alpha \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} \quad (1.2.10a)$$

$$\left( \frac{A}{B} \right)_+ = -\frac{m_2}{m_1} \quad (1.2.10b)$$

这时  $\left( \frac{A}{B} \right)_+$  为负意味着两种微粒的振动具有完全相反的相位(图 1.2.6)，相当于质量  $m_1$  微粒

形成的 Bravais 格子与质量  $m_2$  微粒形成的 Bravais 格子做整体的相对振动，但质心位置保持不动 ( $m_1A + m_2B = 0$ )。对于离子晶体，这时正离子与负离子的振动方向相反，会使正负离子发生极化，产生一定的电偶极矩，所以长光学波又称极化波(polarization wave)。实际晶体极化波的角频率在  $10^{13} \sim 10^{14} \text{s}^{-1}$  范围(远红外光波)。极化波可以和光波相互作用，当波数和频率相同时会发生共振，即可用光来激发这种振动。离子晶体中的这种光学波激发的共振能引起远红外光的强烈吸收，是红外光谱学中的一个重要效应。当  $k = \pm \frac{1}{4a}$

时， $\omega_+ = \sqrt{2k_\alpha / m_1}$ ， $\left( \frac{B}{A} \right)_+ = 0$ 。这时光学支的角频率最小，质量  $m_2 (> m_1)$  的微粒不动，

只有质量  $m_1$  的微粒振动。

对于声学支，当  $k=0$  时(长波极限)，有

$$\omega_- = 0, \quad \left( \frac{A}{B} \right)_- = 1 \quad (1.2.11)$$

这时  $\left( \frac{A}{B} \right)_- = 1$  意味着两种微粒的振动具有完全相同的振幅和相位，代表原胞质心的振动(图 1.2.6)。

当  $k = \pm \frac{1}{4a}$  时， $\omega_- = \left( \frac{2\alpha}{m_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ， $\left( \frac{A}{B} \right)_- = 0$ 。这时

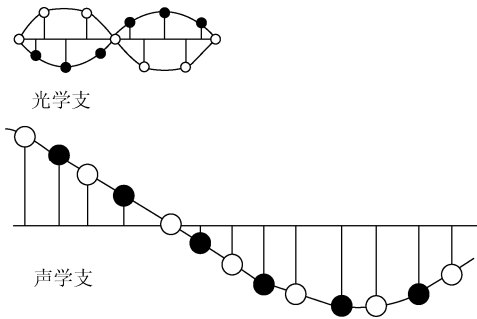


图 1.2.6 光学支与声学支振动特点

声学支的角频率最大，而质量  $m_1 (< m_2)$  的微粒不动，只有质量  $m_2$  的微粒振动。

当  $ka \ll 1$  或  $\lambda \gg a$  时，即在长波情况下，与式 (1.2.5) 分析相同， $\omega_-$  支格波波速是一个与波数无关而只与材料特性有关的常数。 $\omega_-$  支格波因此也称为声学支。

## 1.2.2 讨论——爱因斯坦模型和德拜模型

爱因斯坦假定晶体中所有微粒都以相同的频率  $\nu_0$  振动，即  $\nu_i = \nu_0 (i = 1, 2, \dots, N)$ ，这相当于在热平衡时忽略了微粒间的相互作用。大多数固体的爱因斯坦特征温度在  $100 \sim 300\text{K}$  的范围，与此对应的频率  $\nu_0$  约为  $10^{13}\text{Hz}$ ，属于红外光范围，这相当于用频率  $\nu_0$  (图 1.2.7(a)) 取代了光学支振型。由于光学支属高频分支，它的频率变化又较为平缓，爱因斯坦模型基本上反映了光学支的特征。它在较低温度下的误差主要是由忽略了低频部分(声学支)的作用引起的。

德拜认为在低温下低频振动对比热容和热能的贡献很大，不能忽略。低频格波是长声学波，具有弹性波的性质。因此他把晶体看成各向同性的连续介质，把晶体振动产生的长格波看成在连续介质中传播的弹性波。格波的频率  $\nu_i$  本来都是离散的，如果频率取值十分密集，可把  $\nu$  看成连续的，则在  $\nu$  和  $\nu + d\nu$  之间的振动模数为  $g(\nu)d\nu$ ， $g(\nu)$  称为频率分布函数。根据德拜模型，可以把晶体看成各向同性弹性连续介质。一般的弹性波均由一个以纵波速  $C_l$  传播的纵波成分和两个以横波速  $C_t$  传播的横波成分组成。根据这个模型，波速为常数，即  $C = \nu/k = \text{const}$ 。这相当于用频率  $\nu$  (或角频率  $\omega = 2\pi\nu$ ) 与波数  $k$  成正比的虚线取代了声学支振型(图 1.2.7(b))。这种近似在  $\nu$  较低、波长比晶格常数大得多的情况下成立，但对于接近于最大频率  $\nu_D$  部分，其波长仅比晶格常数大一个量级，连续介质近似就会带来误差。

此部分更详细内容具体可参见《材料动力学》一书(王礼立等, 2016)。

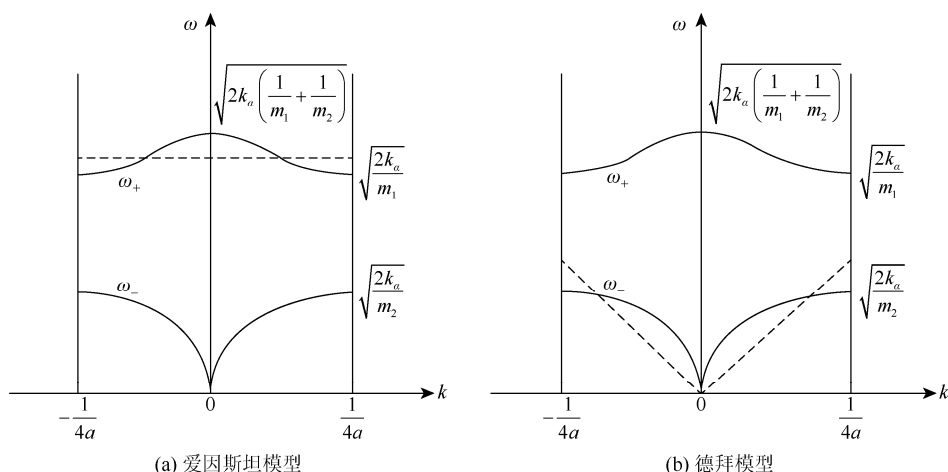


图 1.2.7 两种模型角频率与波数的关系

## 1.3 强间断波和连续波

波是指扰动信号的传播，受扰动介质与未受扰动介质的分界面称为波阵面。波阵面迹

线如图 1.3.1 所示, 其表达式为  $X = X_*(t)$ 。波阵面在数学上是一个奇异面(其厚度无限小,  $\Delta X \rightarrow 0$ , 但含有物质), 当跨过这个奇异面时介质中的某些物理量发生间断, 图 1.3.1 中“+”和“-”分别表示波阵面的紧前方和紧后方。一般情况下, 连续介质力学中的位移  $u$  是连续的。若记  $[\Phi] = \Phi^- - \Phi^+$ , 则  $[\Phi]$  为物理量  $\Phi$  跨过波阵面后的变化量。位移连续时,  $[u] = 0$ 。把跨过奇异面时发生间断的位移的导数的阶数称为波阵面的阶。由此将波阵面分为强间断波阵面和弱间断(连续)波阵面。

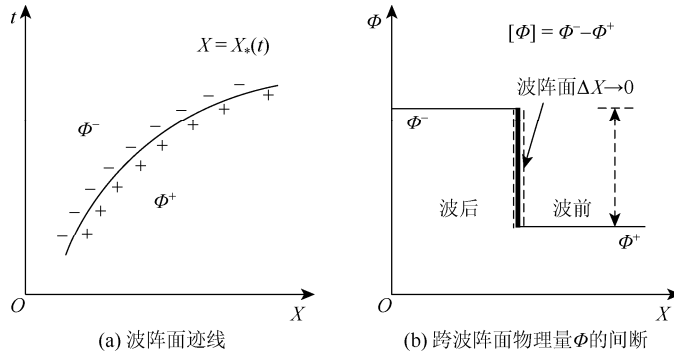


图 1.3.1 物理平面  $X-t$  上波阵面迹线及间断

(1) 强间断波阵面, 即当跨过波阵面时位移本身保持连续, 但其一阶导数(关于时间  $t$  或关于位置坐标  $x$ ) 发生间断的波阵面, 也称为一阶奇异面。位移的一阶导数为介质的质点速度  $v = \partial u / \partial t$ 、应变  $\varepsilon = \partial u / \partial x$ , 因此跨过一阶奇异面时介质的质点速度  $v$ 、应变  $\varepsilon$  会发生间断, 即  $[v] \neq 0$ ,  $[\varepsilon] \neq 0$ 。这也必然带来应力  $\sigma$  的间断,  $[\sigma] \neq 0$ 。

(2) 连续波阵面或弱间断波阵面, 即当跨过波阵面时位移本身及其一阶导数保持连续, 但其二阶导数发生间断的波阵面, 也称为二阶奇异面。位移的二阶导数包括介质的质点加速度  $a = \partial^2 u / \partial t^2$ 、应变率  $\dot{\varepsilon} = \partial^2 u / \partial x \partial t$  和应变梯度  $\partial v / \partial x = \partial^2 u / \partial x \partial t$ , 因此跨过二阶奇异面时,  $[a] \neq 0$ ,  $[\dot{\varepsilon}] \neq 0$ ,  $[\partial v / \partial x] \neq 0$ 。而质点速度、应变、应力等则保持连续, 采用现在动态测试技术得到的波形是光滑的。此外, 二阶及二阶以上的奇异面对应的波阵面均称为弱间断波阵面。

### 1.3.1 强间断波动方程——跨波阵面

#### 1. 波阵面上守恒条件——控制方程

##### 1) 波阵面上的位移连续条件

物理平面  $X-t$  上波阵面运动规律的拉格朗日描述为  $X = X_*(t)$ , 如图 1.3.1 所示。对物理量  $f$  在波阵面的紧前方和紧后方分别应用波阵面上的链锁法则, 可以得到联系冲击波强度与物理量  $f$  两个偏导数的跳跃量的 Maxwell 关系如下:

$$\frac{d[f_*]}{dt} = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial X} \right] C \quad (1.3.1)$$

式中,  $C \equiv \frac{dX^*}{dt}$  为拉格朗日波速, 也称为物质波速。当取式(1.3.1)中的量  $f = u$ , 即位移连续时,  $[u] = 0$ 。式(1.3.1)关于  $u$  的表达式为  $[u] = 0 = [v] + [\varepsilon]C$ , 即

$$[v] = -C[\varepsilon] \quad (1.3.2)$$

式(1.3.2)即为冲击波波阵面上的位移连续条件。它把跨过冲击波波阵面时质点速度的跳跃量和工程应变的跳跃量联系起来, 也是质量守恒的一种反映。

2) 冲击波波阵面上的动量守恒条件(李永池, 2015)

对初始面积为  $A_0$ 、介质的初始质量密度为  $\rho_0$  的一维杆中的纵波传播问题建立图 1.3.2 所示的开口体系  $[X_1(t), X_2(t)]$ 。  $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$  随时间  $t$  变化。截面  $X_1(t)$  处紧外侧介质的质点速度和其对体系所作用的工程正应力分别为  $v_1$  和  $\sigma_1$ ; 截面  $X_2(t)$  处紧外侧介质的质点速度和其对体系所作用的工程正应力分别为  $v_2$  和  $\sigma_2$ 。开口体系的动量守恒条件可表达为: 开口体系的动量的变化率 = 该时刻体系所受外力的矢量和 + 外界向体系的动量纯流入率。对于此开口体系, 则有

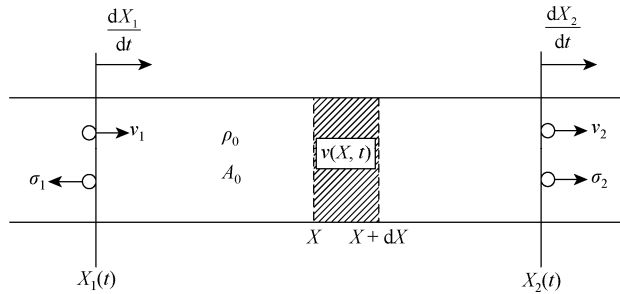


图 1.3.2 开口体系下受力情况

$$\frac{d}{dt} \int_{X_1(t)}^{X_2(t)} \rho_0 A_0 v(X,t) dX = A_0(\sigma_2 - \sigma_1) + \rho_0 A_0 \frac{dX_2(t)}{dt} v_2 - \rho_0 A_0 \frac{dX_1(t)}{dt} v_1 \quad (1.3.3)$$

取开口体系为附着在冲击波波阵面上的一个无限薄的薄层, 此时有

$$X_2(t) \rightarrow X_*(t), \quad X_1(t) \rightarrow X_*(t) \quad (1.3.4)$$

且

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = \frac{dX_1(t)}{dt} = \frac{dX_*(t)}{dt} = C \quad (1.3.5)$$

由此可得到冲击波波阵面上的动量守恒条件为

$$[\sigma] = -\rho_0 C [v] \quad (1.3.6)$$

式(1.3.2)和式(1.3.6)中暗含一个条件, 即  $C = \frac{dX^*}{dt}$ , 因此, 这两个公式对应的是右行波。若需要考虑左行波的情况, 只需取  $C = -\frac{dX^*}{dt}$  即可, 上述两个公式等号的右边均取正号。无论左行波还是右行波, 显然都有

$$[\sigma] = \rho_0 C^2 [\varepsilon] \quad (1.3.7)$$