# 统计微扰论的生成泛函

（1978年统计物理讨论会综述报告）

蒋 柏 林

中国科学院物理研究所

1978年4月 北京

需要全本请访问 www.ertongbook.com

# 目　录


前言 …… 1

第一章　数学准备 …… 3

§1　数、函数和泛函 …… 3
§1.1　经典数和量子数 …… 3
§1.2　泛函 …… 4
§1.3　广义的爱因斯坦规则和矩阵记法 …… 5
§2　变分导数 …… 6
§2.1　变分导数的定义 …… 6
§2.2　变分导数的基本性质 …… 7
§2.3　变分导数简例 …… 8
§2.4　反对易场的变分导数 …… 10
§3　若干标子公式 …… 12
§3.1　标子指数函数和对数函数 …… 12
§3.2　标子的迹、行列式和它们的微分 …… 13
§3.3　一些对易关係 …… 15
§3.4　标子指数函数的微分 …… 16
§3.5　Baker-Campbell-Hausdorff公式 …… 18
§4　连续积分 …… 20
§4.1　连续积分的定义 …… 20
§4.2　高斯型连续积分 …… 21
§4.3　连续积分的一些变换 …… 21
§5　圈论中的两个定理 …… 23
§5.1　乘积定理 …… 23
§5.2　相连圈展开定理 …… 25

第二章 微扰论级数的生成泛函 …… 27

§1 统计模型与场论的对应关系 …… 27

§2 统计配分函数——不相连关联(格林)函数的生成泛函 Z[J] …… 30
§2.1 定义 …… 30
§2.2 例:自由场 …… 33
§2.3 例:$\varphi^4$ 相互作用 …… 36

§3 自由能——相连关联(格林)函数的生成泛函 W[J] …… 38
§3.1 定义 …… 38
§3.2 Z[J] 和 W[J] 的运动方程 …… 39
§3.3 例:$\varphi^4$ 相互作用 …… 42

§4 热力学势——顶角函数的生成泛函 Γ(M) …… 44
§4.1 截腿格林函数 …… 45
§4.2 勒让德变换 …… 46
§4.3 动量表示 …… 49

§5 圈图展开 …… 50
§5.1 圈图展开的意义 …… 50
§5.2 生成泛函 Z[J] …… 52
§5.3 生成泛函 W[J] …… 55
§5.4 勒让德变换和 Γ(M) …… 56

第三章 微扰论级数的发散问题 …… 59

§1 量纲分析——理论的分类 …… 60

§1.1 正则量纲 …… 60
§1.2 量纲分析 …… 61
§1.3 耦合常数的量纲 …… 62
§1.4 微扰论的分类 …… 65

§2 幂次定理——图的分类 …… 66
§2.1 拓扑关系和代数关系 …… 67
§2.2 图形的发散指数 …… 68
§2.3 幂次定理 …… 69
§2.4 N端顶角的标度变换 …… 72
§2.5 带复合标子的顶角 …… 73

§3 微扰论的阶图的重正化 …… 76
§3.1 正规化 …… 76
§3.2 二端顶角的重正化(一)——质量重正化 …… 77
§3.3 四端顶角的重正化——耦合常数重正化 …… 79
§3.4 二端顶角的重正化(二)——波函数重正化 …… 80
§3.5 重正化条件和抵消项 …… 84

§4 Callan-Symanzik 方程 …… 87
§4.1 顶角函数 $\Gamma^{(N)}$ 的 C-S 方程 …… 88
§4.2 顶角函数 $\Gamma_B^{(N)}$ 的 C-S 方程 …… 93
§4.3 相乘重正化和 C-S 方程的一般形式 …… 94

§5 微扰论高阶项的渐近行为 …… 95

结束语 …… 97

参考文献 …… 98

# 前　言

这篇综述报告的内容并不十分切题。它的目的主要是为统计物理工作者介绍一些场论中近若干年来的进展，例如微扰论级数的生成泛函，连续积分表示，圈图展开，Callan-Symanzik方程，复合算子的重正化等等。无此种种，在基本粒子和场论工作者中早已为人所共知，而一部份统计物理和凝聚体理论工作者则尚不甚熟悉，但在今后的工作中将日益频繁地遇到。这篇报告集中了若干必要的基本概念和辅助知识，想省去同志们来回查找文献的部份功夫。它同时也是为这次统计物理讨论会上另一些报告（例如关于临界现象理论的综述报告[1]）作准备，但内容稍多，自成一体。

统计与场论的相通之处在于无穷多自由度。从数学结构看，无穷多自由度也许是更本质的东西。它带来的问题，在统计中表现得更为单纯。免去了量子化、相对论不变性，旋量和狄拉克矩阵等等场论中必须改愿的原则和细节，许多困难（例如微扰论级数的发散问题）照样表现出来。想方设法把无穷多自由度约化为少量的自度来描述，在奇变点附近甚至归结为一，而个自由度，这本来是热力学和统计物理的基本精神。但是宏观系统中无穷多自由度的涨落背景是无法完全消除的，它们有时还起着决定作用。这是统计问题不同于力学系统或动力系统的根本之点，它使统计更接近量子场论。在一定意义上讲，统计物理是不必有普即克常数的量子场论或涨落场论，在讨论非平衡问题时更是这样。当然，量子性在不少统计问题中也直接表现出来。

因此我们认为，场论方法在统计物理中的广泛应用，决不



需要全本请访问 www.ertongbook.com

仅基于两者数学形式的类似，还有着更深刻的物理原因。这还有待于作更多的研究。

在此还要说明一点。从下几章的叙述比较形式，有许多技术性的推导。这是因为要想在这个领域中开展工作，只了解原则精神是不够的，手下还必须有"硬功"。具体的物理应用，可在于涂同志的报告[10]中读到。这两份报告可视为姊妹篇。

公式在每大节（§）内独立连续编号。引用其它地方的公式时，前面冠以章、节。

# 第一章 数学准备

这一章集中叙述一些以后要遇到的公式和概念。内容比实际引用的稍多，但不追求数学严格性，只给出若干可进一步查询的文献。

## §1. 数、函数和泛函

### §1.1. 经典数和量子数

对易经典数就是普通数域上的元素。实数域R和复数域C是大家所熟悉的，它们是无穷维的代数。有限维的域也是常见的，电子计算机中的数就是一例。

反对易经典数是Grassman代数G的元素。有限维G代数有几个生成元

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$$

它们的乘法是反对易的：

$$\varphi_i \varphi_j = -\varphi_j \varphi_i \qquad i \neq j$$

因而每个元素自身的幂都是零：

$$\varphi_i^2 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

可见这n个生成元组成如下$2^n$个基：

| | |
|---|---|
| $1$ | 1个 |
| $\varphi_i$ | $C_n^1$个 |
| $\varphi_i \varphi_j \quad i \neq j$ | $C_n^2$个 |
| $\varphi_i \varphi_j \varphi_k \quad i \neq j \neq k \neq i$ | $C_n^3$个 |
| --- | --- |
| $\varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_n}$（下标不同） | $C_n^n$个 |

这就构成了 $2^n$ 维的G代数。如果指标 $x$ 连续变化，这个无穷维的Grassman代数就是反对易的经典场：

$$\varphi(x)\varphi(x')=-\varphi(x')\varphi(x)\ ,\qquad x\neq x'\ .$$

对易和反对易本身都是经典性质。"量子"性表现在对易或反对易时出现的非零耦光项上。如果某个有限维或无穷维代数的任何两个元素 $a$ 和 $b$ 满足

$$ab-\eta ba=0\ ,$$

则它们是经典的对易（$\eta=+1$）或反对易（$\eta=-1$）数。反之，如果对于某些 $a$ 和 $b$

$$ab-\eta ba\neq 0\ ,$$

则它们是"量子"数。

关于本小节内容可参看[1]和[2]。

## §1.2 泛函

我们把泛函看作多元函数的极限情况。这是一种便于推导许多工作公式的实用观点。在有限线段 $(0,L)$ 上取离散点 $0,1,2,\cdots n$，第 $i$ 点对应变量 $\varphi_i$，定义多元函数

$$F(\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n)\ ,$$

取 $n\to\infty$ 极限时，离散指标 $i$ 成为连续变量 $x$，变量 $\varphi_i$ 成为场 $\varphi(x)$，多元函数 $F$ 成为函数 $\varphi(x)$ 的泛函：

$$F(\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n)\xrightarrow{n\to\infty}F[\varphi(x)]\ ,\quad(0\leq x\leq L)$$

当然对于不同区间 $(-\infty,\infty)$，$(0,\infty)$ 等上的 $\varphi(x)$ 都可以这样引入泛函。

多元解析函数马克劳林级数

$$F(\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n)=F(0,0,\cdots 0)+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}\right)\varphi_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2F}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}\right)_0\varphi_i\varphi_j$$

$$+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_m}\left(\frac{\partial^m F}{\partial\varphi_{i_1}\cdots\partial\varphi_{i_m}}\right)_0\varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_m}$$

取 $n\to\infty$ 极限，成为解析泛函

$$F[\varphi]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dx_1\cdots dx_m\,F^{(m)}(x_1,\cdots x_m)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_m)$$

如果 $\varphi(x)$ 是经典对易场，系数 $F^{(m)}$ 是普通的对称函数；如果 $\varphi(x)$ 是无穷维 Grassman 代数的元素，$F^{(m)}$ 是完全反对称的函数。$F^{(m)}$ 可以通过泛函 $F[\varphi]$ 的变分导数表示，这将在后面介绍。

上面取极限过程中作了几种"代换"，这是有普遍意义的：

(1)、离散指标 $i$ 成为连续变量 $x$；

(2)、变量 $\varphi_i$ 成为场 $\varphi(x)$；

(3)、常数成为函数；

(4)、函数成为泛函；

(5)、对离散指标的求和，换成对连续变量的求积。这里回避了测度问题，在最常见的情形下应有

$$\frac{1}{V}\sum_i\to\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dx\ ,$$

这里 $V$ 是体积，$d$ 是空间维数。

关于本小节内容可参看[3]和[4]。

## §1.3 广义的爱因斯坦规则和矩阵记法

由于我们经常要和泛函打交道，必须简化记法，避免书写大量高维积分。

首先，省去积分符号，对两次重复出现的自变量自动求积分。这是矩阵运算中省去求和符号并对两次重复出现的角标自动求和（爱因斯坦规则）这一规定的推广。有时把自变量简化为数字。

其次，只要不引起误解，自变量也有去不写。这是广义的矩阵记法。

最后，在对易场（玻色子）情形下，有时把标子（矩阵）的书写顺序也打乱归并。

例 1

$$\int J(x)\varphi(x)dx = J(1)\varphi(1) = J\varphi$$

例 2

$$\frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 \varphi(x_1)K(x_1,x_2)\varphi(x_2) = \frac{1}{2}\varphi(1)K(1,2)\varphi(2) = \frac{1}{2}K\varphi^2$$

例 3　上节中解析泛函的展开式可简化为

$$F[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}(1,2,\cdots m)\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(m) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}F^{(m)}\varphi^m$$

上式最后一种记法形式上与普通函数一样。以后将看到，这类写法是很实用的：便于微分，不必区分坐标表示与动量表示等等，但须注意在必要时写明自变量名字和保持正确顺序。

关于本小节内容可参看[4]和[5]。

## §2　变分导数

我们主要讨论对易场情况，只在最后一小节中讲一点非对易场。

### §2.1　变分导数的定义

对泛函的变分导数可以作为多元函数偏导数的极限引入。多元函数自变量作无限小改变时，函数增量的线性部分

$$dF=F(\varphi_1+d\varphi_1,\cdots\varphi_n+d\varphi_n)-F(\varphi_1,\cdots\varphi_n)=\sum_i A_i\,d\varphi_i$$

决定偏导数

$$A_i=\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\ 。$$

同样，泛函增量的线性部分

$$\delta F[\varphi]=F[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]=\int A[\varphi,x]\,\delta\varphi(x)\,dx$$

定义为变分导数

$$A[\varphi,x]=\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\ ,$$

它是$\varphi$的泛函，又可能是$x$的函数。如同偏导数记号$\frac{\partial F}{\partial\varphi_i}$的分子、分母不能分开一样，变分导数$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$也是不能拆开的记号。

实际计算变分导数时，可以利用如下的定义（参看[3]第205页）：

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{F[\varphi(u)+\varepsilon\delta(x-u)]-F[\varphi(u)]\right\}$$

## §2.2 变分导数的基本性质

变分导数具有与普通导数相似的性质。

(1)、与$\varphi(x)$无关之任意函数$f(x)$，$g(x)$起普通导数中常数的作用：

$$\frac{\delta f(x)}{\delta\varphi(y)}=0$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left\{fF[\varphi]+gG[\varphi]\right\}=f\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)}+g\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi(x)}$$



需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)}=\delta(x-y)\quad(\text{有时简记为}\frac{\delta\varphi}{\delta\varphi}=1)$$

(2)、泛函乘积的变分导数：

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\left\{F[\varphi]G[\varphi]\right\}=\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}G[\varphi]+F[\varphi]\frac{\delta G[\varphi]}{\delta\varphi}$$

(3)、复合泛函的变分导数

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}F[G[\varphi]]=\int\frac{\delta F[G]}{\delta G[\varphi(y)]}\cdot\frac{\delta G[\varphi(y)]}{\delta\varphi(x)}dy$$

或者按§1.2中的约定简记为

$$\frac{\delta F[G[\varphi]]}{\delta\varphi}=\frac{\delta F}{\delta G}\cdot\frac{\delta G}{\delta\varphi}$$

(4)、多元泛函的偏变分导数：

多元泛函 $F[\varphi,\psi]$ 的增量

$$\delta F=\int\left\{\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)+\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}\delta\psi(x)\right\}dx$$

中出现偏变分导数 $\frac{\delta F}{\delta\varphi}$ 和 $\frac{\delta F}{\delta\psi}$。

## §2.3. 变分导数简例

例1、指数泛函

$$Z[J]=\exp\left(\int dx J(x)\varphi(x)\right)=e^{J\varphi}$$

的变分导数可简记为

$$\frac{\delta Z}{\delta \varphi} = \varphi e^{J\varphi} \quad ,$$

形式上与普通导数相同，写全了就是

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x) \exp\left(\int dx\, J(x)\varphi(x)\right)$$

再提醒一下：我们这里讨论的是对易场 $\varphi(x)$。

例2、泛函平移算子

普通一元函数的平移算子

$$f(x+T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{d^n f}{dx} = e^{T\frac{d}{dx}} f(x)$$

推广到多元函数是

$$F(\varphi_1 + T_1, \cdots, \varphi_n + T_n) = \sum_i T_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

取 $n \to \infty$ 极限成为

$$F[\varphi + T] = e^{T\frac{\delta}{\delta \varphi}} F[\varphi] \quad ,$$

其中

$$T\frac{\delta}{\delta \varphi} \equiv \int T(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} dx$$

例3、解析泛函

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{(n)} J^n$$

的变分导数

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}G^{(n+1)}J^n$$

如果不采用简化记法，就要经过$\delta$函数的积分和变量代换才能求出。这个例子清楚表明，变分导数$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=A[J,x]$不仅是$J$的泛函，而且是$x$的函数：

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\,G^{(n+1)}(x,x_1,\cdots x_n)J(x_1)\cdots J(x_n)$$

类似地可以定义高阶变分导数，特别是

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\Big/_{J(x_i)=0}$$

例4、作为练习，可以推出以下微分公式

$$\left[\frac{\delta}{\delta J(y)},J(x_1)\cdots J(x_n)\right]=\sum_{i=1}^{n}\delta(y-x_i)J(x_1)\cdots\hat{J}(x_i)\cdots J(x_n),$$

$\hat{J}(x_i)$上的帽子$\hat{}$表示乘积中缺这一因子，以及

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta J^2},J^2\right]=2+4J\frac{\delta}{\delta J},$$

$$\left[\frac{\delta^4}{\delta J^4},J^2\right]=12\frac{\delta^2}{\delta J^2}+8J\frac{\delta^3}{\delta J^3},$$

等等。这些式子中出现的数学像做指明写全闵变量后，应有的对称化项做。例如上面第二式B是

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta J(1)\delta J(2)}, J(3)J(4)\right]=\delta_{13}\delta_{24}+\delta_{14}\delta_{23}+J(3)\frac{\delta}{\delta J(1)}+$$

$$+J(3)\frac{\delta}{\delta J(2)}+J(4)\frac{\delta}{\delta J(1)}+J(4)\frac{\delta}{\delta J(2)}\ .$$

这些都是简单的泡子公式。我们在§3中还要讨论一些更普遍的泡子公式。

## §2.4. 反对易场的变分导数

为叙述完整起见，简单讨论一下反对易场的变分导数。先看普通导数。在有限维Grassman代数上定义两种导数：左导数$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}$（箭头向右，对象从左面被微分）和右导数$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}$（箭头向左，对象好似从右面被微分。它们的作用对象都是独项式$\varphi_i\varphi_j\cdots\varphi_l$，其中不能有相同的角标。

左导数的定义是：

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}(\text{独项式})=\begin{cases}0\ (\text{如果独项式中无}\varphi_i\text{因子});\\ (-1)^P\text{乘以}(\text{独项式划掉}\varphi_i\text{因子});\end{cases}$$

其中$P$是把独项式中的$\varphi_i$因子左移到最左侧所需对易次数。例如：

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_j=\delta_{ij}\ ,$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_1\varphi_i=-\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_i\varphi_1=-\varphi_1\ ,$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_1\varphi_2\varphi_i=-\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_1\varphi_i\varphi_2=\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\varphi_i}\varphi_i\varphi_1\varphi_2=\varphi_1\varphi_2\ .$$

右导数的定义完全相似，只有$P$换为$\varphi_i$右移到最右侧所需对易次数。从定义看出：

(1). 左导数不一定等于右导数；

(2). 左(右)导数与左(右)导数反对易；

(3). 左导数与右导数对易。

当指标集$\{i\}$变成连续变量$x$，$\varphi_i$成为反对易经典场$\varphi(x)$之后，可以定义泛函$F[\varphi]$的左(右)变分导数：先把相应$\varphi(x)$对易到最左(右)侧，再利用

$$\frac{\overrightarrow{\delta}\varphi(x')}{\delta\varphi(x)}=\frac{\overleftarrow{\delta}\varphi(x')}{\delta\varphi(x)}=\delta(x-x')$$

即可。显然，它们保持着普通Grassman代数上左右导数的许多基本性质。

关于变分导数可参看[2-4]。

## §3 若干称子公式

### §3.1 称子指数函数和对数函数

称子函数通常通过级数定义。指数函数

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n \tag{1}$$

具有相当普遍的意义，因为许多更一般的称子函数$f(A)$都可以通过积分变换

$$f(A)=\int f_\tau e^{\tau A}d\tau \tag{2}$$

($\tau$是实或复参数)由指数函数表示。因此，对于称子指数函数的讨论，往往成为处理一般称子函数的手段。

称子对数函数也是通过级数定义的：

$$\ln A=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}(A-I)^n, \tag{3}$$

定的适用范围当然窄得多。注意，除非 $AB=BA$，即可从同时对角化，下式

$$\ln AB=\ln A+\ln B \tag{4}$$

一般是不成立的。

## §3.2. 算子的迹、行列式和它的微分

本小节只讨论线性算子。这也是从有限、离散情形向无穷、连续情形的推广。这些算子同时可看作无穷维矩阵。

算子的迹

有限维矩阵迹的定义

$$\mathrm{Tr}\,A=\sum_i A_{ii}=\sum_i \lambda_i \tag{5}$$

推广到无穷维，只须把对本征值 $\lambda_i$ 的求和理解成包含对连续本征值求积。具有绝对收敛迹的算子

$$\mathrm{Tr}A=\sum_i \lambda_i \leqslant \sum_i |\lambda_i| < \infty\ , \tag{6}$$

构成特殊的一类 $\mathfrak{S}_1$ —— 迹类（trace-class，俄文中有时称 Дедекинд）算子。

只要算子 $A$ 作用在实或复线性空间上，或者说无穷维矩阵 $A$ 的元素属于 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，普通阵迹下的循环对称性如

$$\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(BCA)=\mathrm{Tr}(CAB)\ ,$$

$$\mathrm{Tr}\,A=\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) \tag{7}$$



需要全本请访问 www.ertongbook.com