

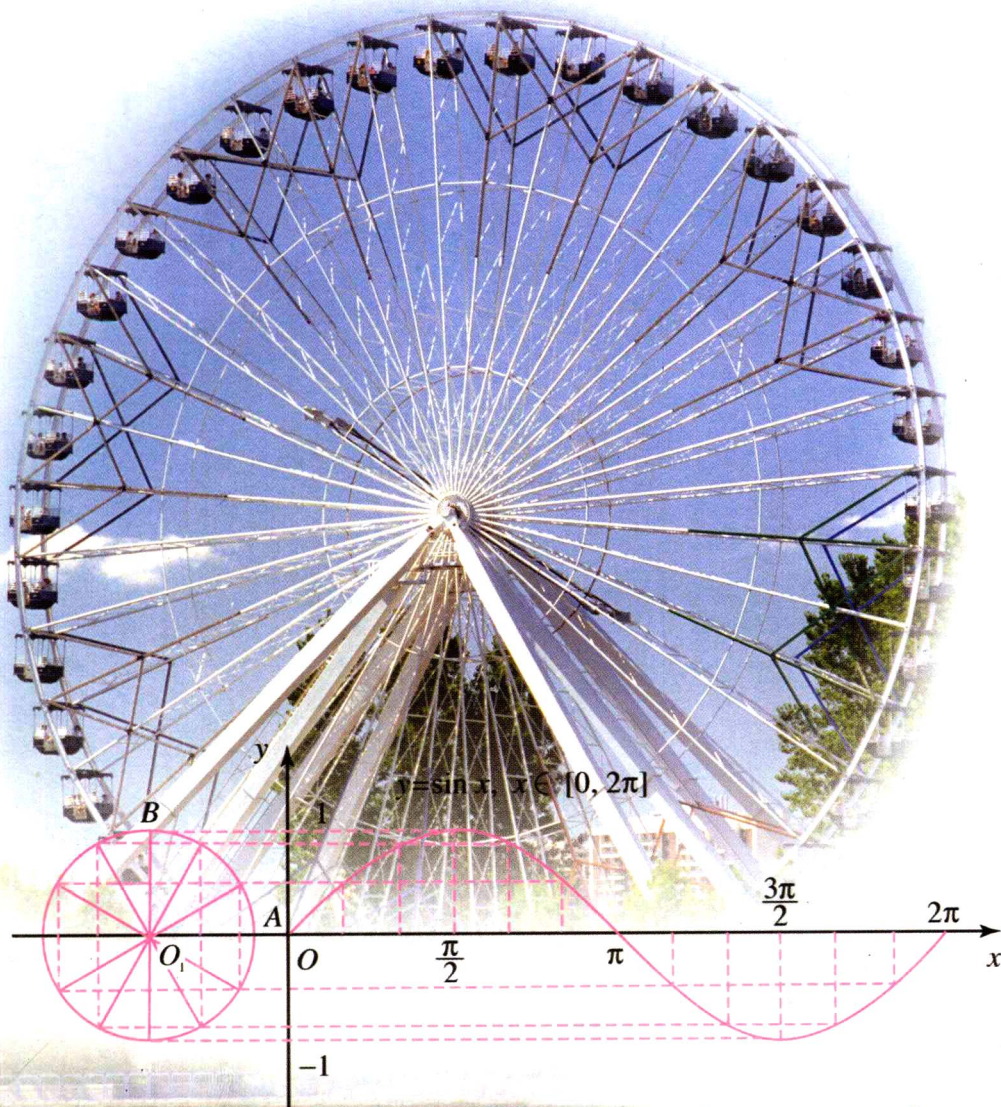
经全国中小学教材审定委员会  
2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

# 数学 4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学教材实验研究组



人民教育出版社  
B 版

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

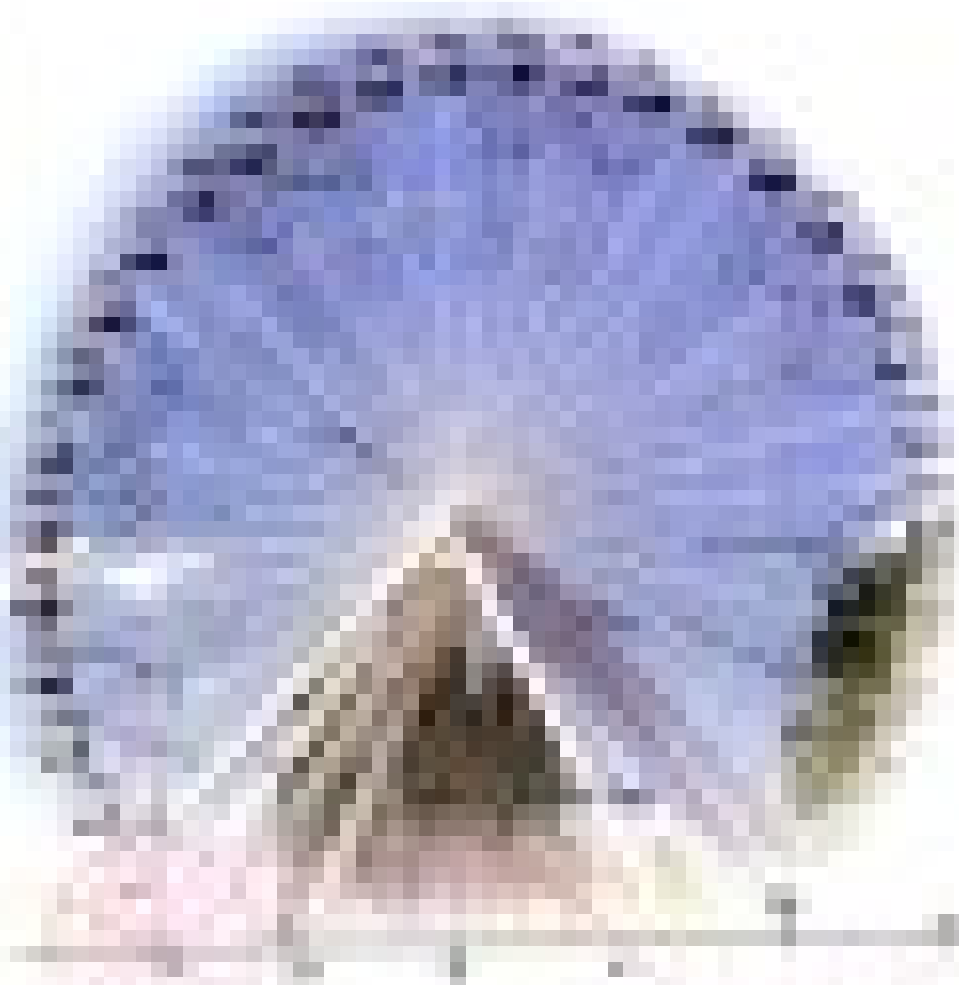
THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS



THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS

1998

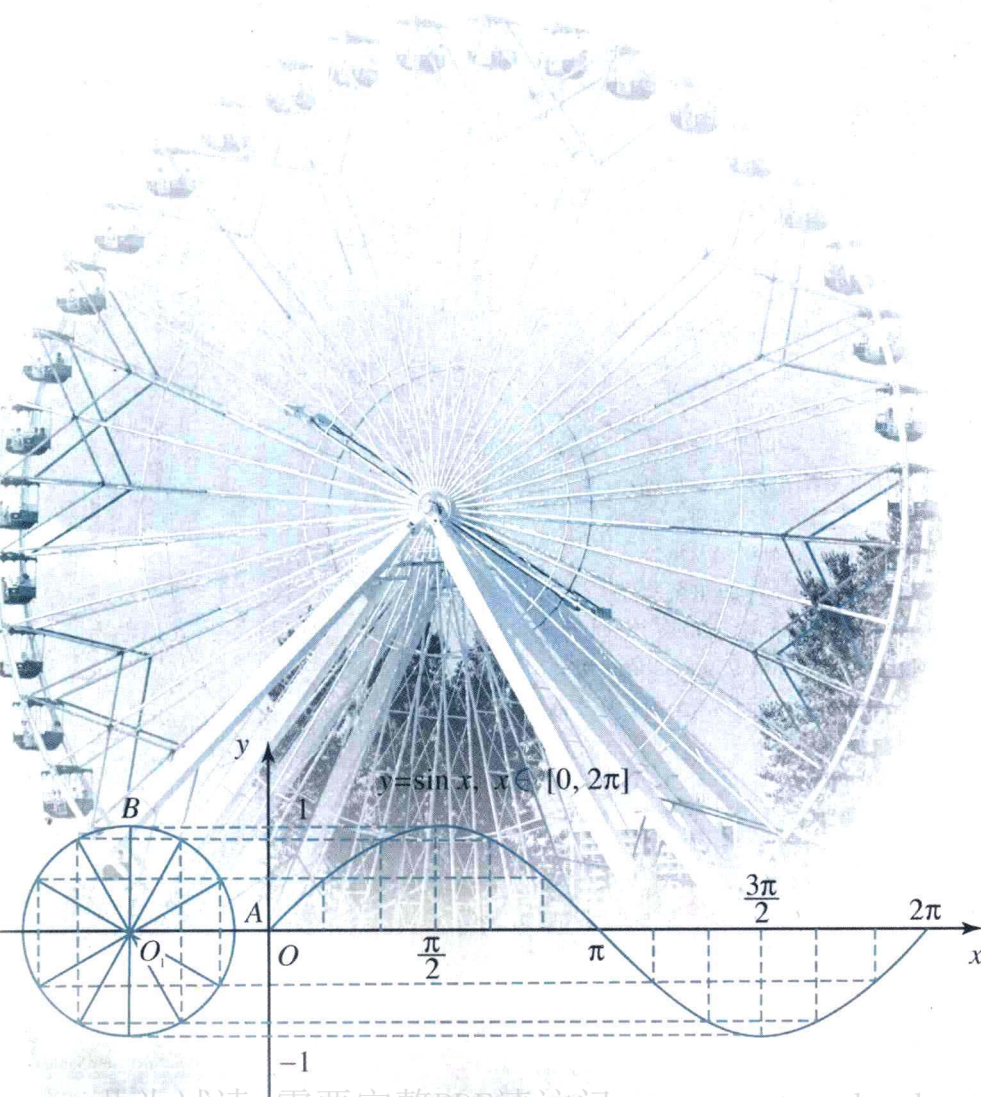


普通高中课程标准实验教科书

# 数学 4

必修

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学教材实验研究组



人民教育出版社  
**B** 版

# 本册导引

同学们，欢迎你们进入本模块的学习！

同学们也许注意到，大到日月运行、四季更替，小至钟摆摆动、琴弦颤动，周而复始，都呈现一定的周期性。三角函数是描述周期现象的重要数学工具。三角函数具有优良性质，是基本的初等函数，在数学和其他领域中具有广泛的应用。在本模块中，我们将学习任意角的三角函数及其基本性质和应用，体会三角函数在解决具有周期变化规律问题中的作用。

同学们，你们知道向量吗？事实上，同学们在生活和学习中早已接触到向量。当你在操场上从甲地笔直跑到乙地，你的位置变化就是一个向量；当一架飞机从北京直飞上海，它的飞行路径也是一个向量。同学们所熟悉的有向线段，图形的平移等等都是向量。可见向量处处存在，它们不仅有大小之分，也有方向之别。向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一。向量最突出的特色是对它可以实施运算。它是沟通代数、几何和三角的一种有力工具，有着极其丰富的实际背景。我们将通过实例引入向量概念，理解平面向量及其运算的意义，学会用向量语言与方法表述和解决数学以及物理等学科中的一些问题，发展运算能力和解决问题的能力。

三角恒等变换在数学中有一定的作用，我们将用向量方法导出三角恒等变换的基本公式，由此出发进行简单的恒等变换导出其他公式。在这一部分，同学们将体会到向量与三角函数的紧密联系。

在本模块的学习中，应注意联系实际，注意知识的实际背景以及知识在实际中的应用。向量的概念是以力、速度和几何为背景引入的。反过来，向量又应用到物理和数学中去。物理中的单摆运动、波的传播、交流电等相关内容都要用三角函数来刻画它们的变化规律。

在三角函数的学习中，应注意单位圆的作用，它可以帮助我们直观地认识三角函数及其性质。三角函数的图象在物理以及解决实际问题中有着广泛的应用，在学习中应予以重视。

在本模块中，还插入一些数学探究和数学建模活动，鼓励同学们使用计算器和计算机，这些都有利于同学们提高应用数学知识和工具分析问题、解决问题的能力。

# 目 录

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| <b>第一章 基本初等函数(Ⅱ)</b> .....      | 1   |
| <b>1.1 任意角的概念与弧度制</b> .....     | 3   |
| ◆ 1.1.1 角的概念的推广 .....           | 3   |
| ◆ 1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算 .....    | 8   |
| <b>1.2 任意角的三角函数</b> .....       | 15  |
| ◆ 1.2.1 三角函数的定义 .....           | 15  |
| ◆ 1.2.2 单位圆与三角函数线 .....         | 20  |
| ◆ 1.2.3 同角三角函数的基本关系式 .....      | 23  |
| ◆ 1.2.4 诱导公式 .....              | 27  |
| <b>1.3 三角函数的图象与性质</b> .....     | 38  |
| ◆ 1.3.1 正弦函数的图象与性质 .....        | 38  |
| ◆ 1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质 .....   | 54  |
| ◆ 1.3.3 已知三角函数值求角 .....         | 61  |
| <b>数学建模活动</b> .....             | 69  |
| 本章小结 .....                      | 71  |
| 阅读与欣赏                           |     |
| 三角学的发展 .....                    | 77  |
| <b>第二章 平面向量</b> .....           | 79  |
| <b>2.1 向量的线性运算</b> .....        | 81  |
| ◆ 2.1.1 向量的概念 .....             | 81  |
| ◆ 2.1.2 向量的加法 .....             | 85  |
| ◆ 2.1.3 向量的减法 .....             | 89  |
| ◆ 2.1.4 向量数乘 .....              | 92  |
| ◆ 2.1.5 向量共线的条件与轴上向量坐标运算 .....  | 96  |
| <b>2.2 向量的分解与向量的坐标运算</b> .....  | 102 |
| ◆ 2.2.1 平面向量基本定理 .....          | 102 |
| ◆ 2.2.2 向量的正交分解与向量的直角坐标运算 ..... | 105 |
| ◆ 2.2.3 用平面向量坐标表示向量共线条件 .....   | 110 |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| <b>2.3 平面向量的数量积</b> .....       | 114 |
| ◆ 2.3.1 向量数量积的物理背景与定义 .....     | 114 |
| ◆ 2.3.2 向量数量积的运算律 .....         | 117 |
| ◆ 2.3.3 向量数量积的坐标运算与度量公式 .....   | 119 |
| <b>2.4 向量的应用</b> .....          | 124 |
| ◆ 2.4.1 向量在几何中的应用 .....         | 124 |
| ◆ 2.4.2 向量在物理中的应用 .....         | 129 |
| 本章小结 .....                      | 133 |
| 阅读与欣赏                           |     |
| 向量概念的推广与应用 .....                | 137 |
| <b>第三章 三角恒等变换</b> .....         | 139 |
| <b>3.1 和角公式</b> .....           | 141 |
| ◆ 3.1.1 两角和与差的余弦 .....          | 141 |
| ◆ 3.1.2 两角和与差的正弦 .....          | 144 |
| ◆ 3.1.3 两角和与差的正切 .....          | 148 |
| <b>3.2 倍角公式和半角公式</b> .....      | 151 |
| ◆ 3.2.1 倍角公式 .....              | 151 |
| ◆ 3.2.2 半角的正弦、余弦和正切 .....       | 153 |
| <b>3.3 三角函数的积化和差与和差化积</b> ..... | 158 |
| 本章小结 .....                      | 163 |
| 阅读与欣赏                           |     |
| 和角公式与旋转对称 .....                 | 166 |
| <b>附录</b>                       |     |
| 部分中英文词汇对照表 .....                | 168 |

# 第一章 基本初等函数 (II)

1.1

任意角的概念与弧度制

1.2

任意角的三角函数

1.3

三角函数的图象与性质



在日常生活中，只要我们用心去观察，又勤于思考，就会发现许多与数学有关的事情。游乐园是人们爱去的地方，各种神奇的游戏器械吸引着人们去玩耍，那高大的观览车绕轴转动着，边缘上悬挂的座椅，带着游人在空中旋转，给游人带来乐趣！你想过吗？观览车在周而复始的转动中，就包含着许多数学问题。用你学过的数学知识能回答下列问题吗？

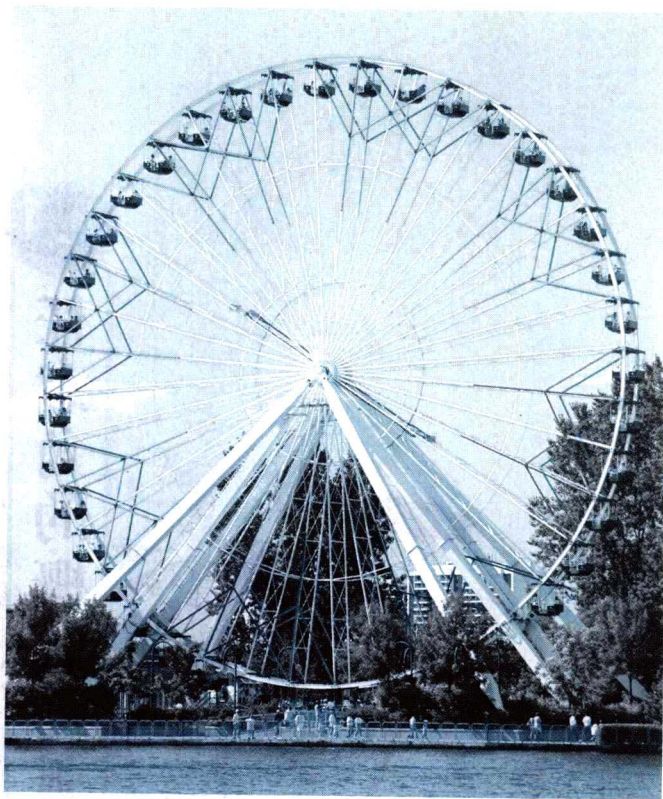
1. 从你的座位开始转动的时刻到某个时刻，你的座位转了多少角度？这时你的座位离开地面的高度是多少？

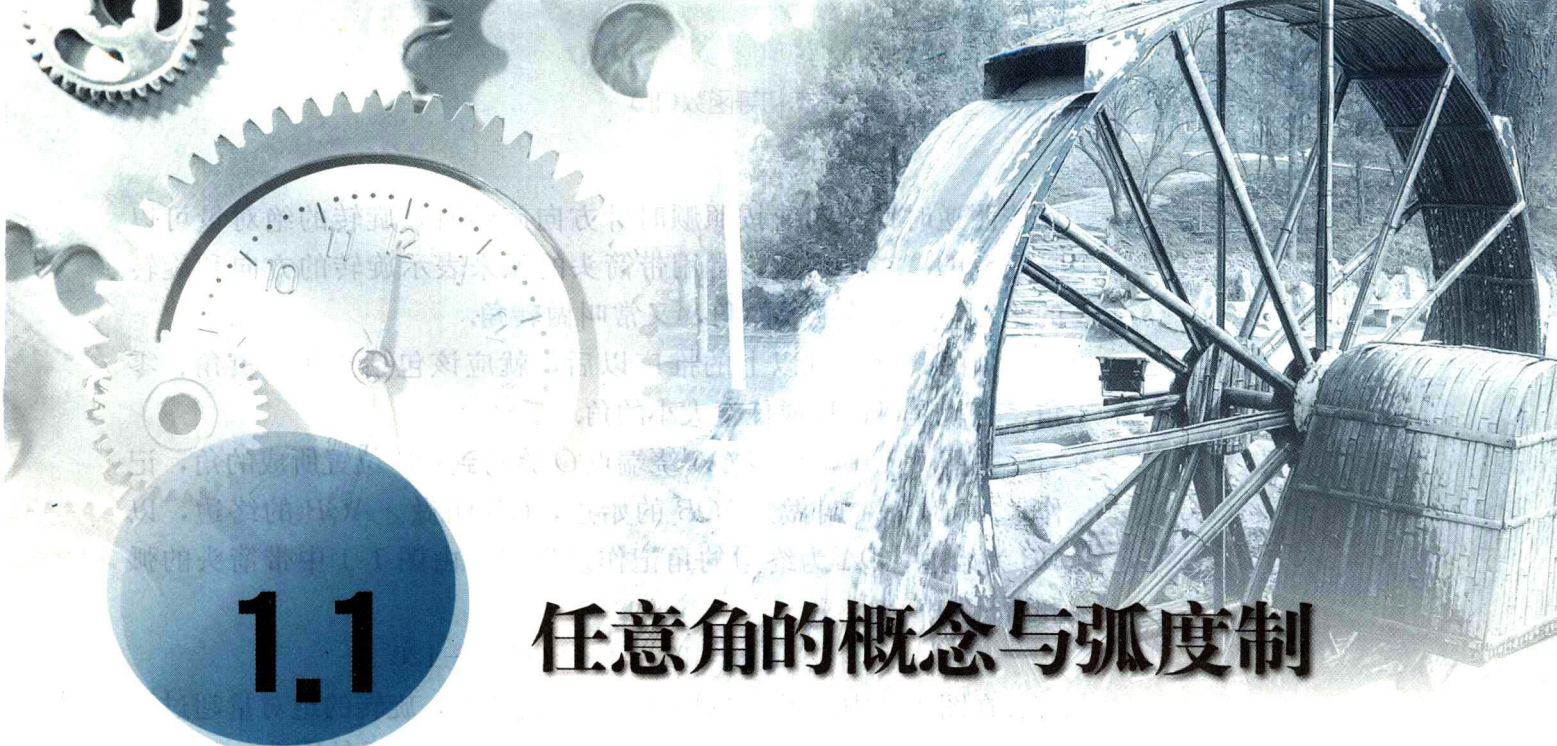
2. 你能用学过的数学知识描述观览车周而复始的运动吗？

为了回答这两个问题，你可能会想到用我们学过的锐角三角函数知识，可是你会发现只用锐角三角函数的知识是不够的。要回答“座位”转过了多少角度，必须把角的概念加以推广。为了研究观览车的转动，必须研究任意角的三角函数。学完这一章你就能完整地回答这两个问题了。

这一章，我们要学习任意角的三角函数，把你带入三角函数的全新领域，那里有许多问题等待着你去探索、领悟、认知。

三角函数来源于测量，在现代科学中，三角函数已经成为研究自然界中周期变化现象的重要数学工具，它在力学、工程以及无线电学中有着广泛的应用。





# 1.1

## 任意角的概念与弧度制

### 1.1.1 角的概念的推广

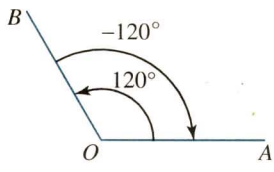
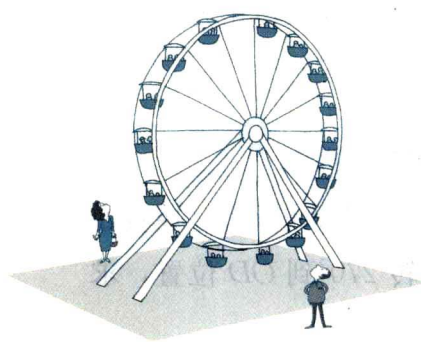


图 1-1

在小学和初中，我们把有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边。同时我们还知道，角可以看成是一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形(图 1-1)，射线旋转时经过的平面部分为角的内部。当时，不考虑旋转方向，不论从 OA 旋转到 OB 还是从 OB 旋转到 OA，它们旋转的绝对量都是一样的，而且旋转的绝对量不超过一个周角(0°到 360°)。

在实际生活中还会遇到角的旋转量超过一个周角的情况，例如，父母让孩子独自乘坐观览车，而父母分别站在观览车的两侧，当观览车转动起来后，父亲看到的转动方向与母亲看到的转动方向是相反的，一个看到的是顺时针转动，另一个看到的是逆时针转动，一圈又一圈地转动着。这就是说，角度可以不限于 0°到 360°的范围，而且角度还应该考虑到方向。下面我们把角的概念加以推广。



在平面内，一条射线绕它的端点旋转有两个相反的方向，顺时针方向和逆时针方向，习惯上规定，按照逆时针方向旋转而成的角叫做**正角**；按照顺时针方向旋转而成的角叫做**负角**；当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，叫做**零角**。当射线绕其端

点按照逆时针方向或按照顺时针方向旋转时, 旋转的绝对量可以是任意的. 在画图时, 常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量. 旋转生成的角, 又常叫做**转角**.

角的概念经过以上的推广以后, 就应该包括正角、负角、零角, 也就是可以形成任意大小的角.

在图 1-1 中, 射线  $OA$  绕端点  $O$  旋转到  $OB$  位置所成的角, 记作  $\angle AOB$ ,  $OA$  叫做  $\angle AOB$  的始边,  $OB$  叫做  $\angle AOB$  的终边, 以  $OB$  为始边,  $OA$  为终边的角记作  $\angle BOA$ . 由图 1-1 中带箭头的弧和所标数值知

$$\angle AOB = 120^\circ, \quad \angle BOA = -120^\circ.$$

在图 1-2 中, 射线  $OA$  绕端点  $O$  旋转时, 旋转的绝对量超过了周角, 按照图中箭头所指的旋转方向和弧线所表示的周数, 可知

$$\alpha = 450^\circ, \quad \beta = -630^\circ.$$



图 1-2

在图 1-3 中, 射线  $OA$  绕端点  $O$  旋转  $90^\circ$  到射线  $OB$  位置, 接着再旋转  $-30^\circ$  到  $OC$  位置, 则

$$\begin{aligned} \angle AOC &= \angle AOB + \angle BOC \\ &= 90^\circ + (-30^\circ) \\ &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

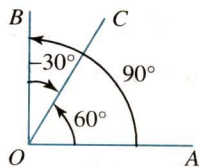


图 1-3

引入正角、负角的概念以后, 角的减法运算可以转化为角的加法运算, 即  $\alpha - \beta$  可以化为

$$\alpha + (-\beta).$$

这就是说, **各角和的旋转量等于各角旋转量的和**.

**例 1** 射线  $OA$  绕端点  $O$  顺时针旋转  $80^\circ$  到  $OB$  位置, 接着逆时针旋转  $250^\circ$  到  $OC$  位置, 然后再顺时针旋转  $270^\circ$  到  $OD$  位置, 求  $\angle AOD$  的大小.

**解:** 由题意知

$$\angle AOB = -80^\circ, \quad \angle BOC = 250^\circ, \quad \angle COD = -270^\circ,$$

$$\text{因此 } \angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$$

$$= -80^\circ + 250^\circ - 270^\circ = -100^\circ.$$

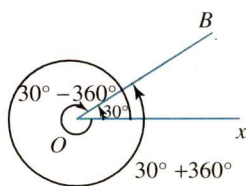


图 1-4

从图 1-4 可以看出, 以  $Ox$  为始边旋转  $30^\circ$ , 接着再旋转  $360^\circ$ , 则得到  $390^\circ$  的转角与  $30^\circ$  转角的终边相同; 如果以  $Ox$  为始边旋转  $30^\circ$ , 接着旋转  $-360^\circ$ , 则得到  $-330^\circ$  的转角也与  $30^\circ$  角的终边相同. 即

$$\begin{aligned} 390^\circ &= 30^\circ + 360^\circ, \\ -330^\circ &= 30^\circ + (-360^\circ). \end{aligned}$$

一般地, 记

$$\beta = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbf{Z},$$

则无论其中的  $k$  取何整数, 角  $\beta$  都与  $30^\circ$  角的终边相同, 当  $k=0$  时,  $\beta$  角就是  $30^\circ$  角本身.

设  $\alpha$  表示任意角, 所有与  $\alpha$  终边相同的角以及  $\alpha$  本身组成一个集合, 这个集合可记为

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

集合  $S$  的每一个元素都与  $\alpha$  的终边相同, 当  $k=0$  时, 对应元素为  $\alpha$ .

今后我们通常在直角坐标系中讨论角, 是使角的顶点与坐标原点重合, 角的始边与  $x$  轴正半轴重合. 角的终边在第几象限, 就把这个角叫做第几象限的角, 如果终边在坐标轴上, 就认为这个角不属于任何象限. 图 1-5(1) 中的  $45^\circ$ ,  $-315^\circ$ ,  $405^\circ$  角都是第一象限的角. 图 1-5(2) 中的  $124^\circ$  角是第二象限的角,  $210^\circ$  角是第三象限的角,  $-45^\circ$  角是第四象限的角.

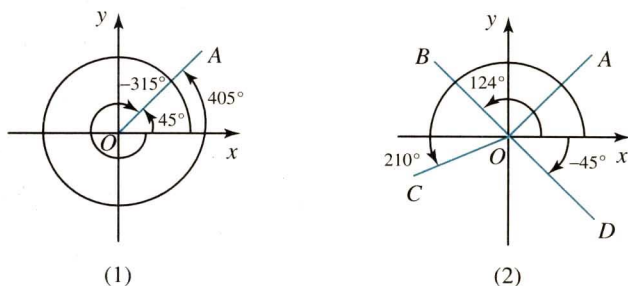


图 1-5

**例 2** 在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并判定它们是第几象限的角.

- (1)  $-150^\circ$ ;      (2)  $650^\circ$ ;      (3)  $-950^\circ 15'$ .

**解:** (1) 因为  $-150^\circ = -360^\circ + 210^\circ$ ,

所以在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 与  $-150^\circ$  终边相同的角是  $210^\circ$  角, 它是第

三象限的角；

$$(2) \text{ 因为 } 650^\circ = 360^\circ + 290^\circ,$$

所以在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 与  $650^\circ$  终边相同的角是  $290^\circ$  角, 它是第四象限的角；

$$(3) \text{ 因为 } -950^\circ 15' = -3 \times 360^\circ + 129^\circ 45',$$

所以在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 与  $-950^\circ 15'$  终边相同的角是  $129^\circ 45'$ , 它是第二象限的角.

**例 3** 写出终边在  $x$  轴上的角的集合.

**解:** 在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 终边在  $x$  轴上的角有两个, 即  $0^\circ$  和  $180^\circ$ , 与这两个角终边相同的角组成的集合依次为

$$S_1 = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}, S_2 = \{\beta \mid \beta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

为简便起见, 我们把集合  $S_1$  和  $S_2$  的表示方法作如下变化:

$$S_1 = \{\beta \mid \beta = 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

$$S_2 = \{\beta \mid \beta = (2k+1)180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

因为  $\{m \mid m = 2k, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{m \mid m = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$ , 所以

$$S = S_1 \cup S_2 = \{\beta \mid \beta = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}.$$

集合  $S$  是终边在  $x$  轴上的角的集合.

**例 4** 分别写出与下列各角终边相同的角的集合  $S$ , 并把  $S$  中适合不等式  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素  $\beta$  写出来:

$$(1) 60^\circ; \quad (2) -21^\circ; \quad (3) 363^\circ 14'.$$

**解:** (1)  $S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 60^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$

$S$  中适合  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素是

$$-1 \times 360^\circ + 60^\circ = -300^\circ,$$

$$0 \times 360^\circ + 60^\circ = 60^\circ,$$

$$1 \times 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ.$$

$$(2) S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ - 21^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

$S$  中适合  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素是

$$0 \times 360^\circ - 21^\circ = -21^\circ,$$

$$1 \times 360^\circ - 21^\circ = 339^\circ,$$

$$2 \times 360^\circ - 21^\circ = 699^\circ.$$

$$(3) S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + 363^\circ 14', k \in \mathbf{Z}\}.$$

$S$  中适合  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素是

$$-2 \times 360^\circ + 363^\circ 14' = -356^\circ 46',$$

$$-1 \times 360^\circ + 363^\circ 14' = 3^\circ 14',$$

$$0 \times 360^\circ + 363^\circ 14' = 363^\circ 14'.$$



## 思考与讨论

1. 如果  $\alpha$  是第一象限的角, 那么  $\alpha$  的取值范围表示为怎样的不等式?
2. 如果  $\alpha$  分别是第一、第二、第三和第四象限的角, 那么  $\frac{\alpha}{2}$  分别是第几象限的角?



## 练习 A

1. 判断下列各语句的真、假:

- (1) 第一象限的角一定是锐角;
- (2) 终边相同的角一定相等;
- (3) 相等的角, 终边一定相同;
- (4) 小于  $90^\circ$  的角一定是锐角;
- (5) 钝角的终边在第二象限;
- (6) 终边在直线  $y = \sqrt{3}x$  上的角表示为  $k \cdot 360^\circ + 60^\circ$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

2. 求和并作图表示:

- (1)  $30^\circ + 90^\circ$ ;
- (2)  $90^\circ + (-60^\circ)$ ;
- (3)  $60^\circ - 180^\circ$ ;
- (4)  $-60^\circ + 270^\circ$ .

3. 在直角坐标系中作下列各角:

- (1)  $855^\circ$ ;
- (2)  $-750^\circ$ .

4. 在  $0^\circ$  到  $360^\circ$  范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并说明它们是哪个象限的角:

- (1)  $-45^\circ$ ;
- (2)  $760^\circ$ ;
- (3)  $-480^\circ$ .

5. 射线  $OA$  绕端点  $O$  逆时针旋转  $270^\circ$  到达  $OB$  位置, 由  $OB$  位置顺时针旋转一周到达  $OC$  位置, 求  $\angle AOC$  的大小.

练习B

1. 分别写出终边在  $y$  轴正半轴、 $y$  轴负半轴和  $y$  轴上的角的集合.
2. 分别写出终边在直线  $y=x$  上和终边在直线  $y=-x$  上的角的集合.
3. 在直角坐标系中, 集合  $S = \{\beta \mid \beta = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$  的元素所表示的角的终边在什么位置?
4. 写出终边在第二、第三、第四象限的角的集合.
5. 今天是星期一, 那么从明天算起, 第  $7k (k \in \mathbf{N}_+)$  天是星期几? 第 100 天是星期几? 一天前是星期日,  $7k (k \in \mathbf{N}_+)$  天前是星期几?



计算机上的练习

用计算机观察与研究第 7 页思考与讨论中的第 2 题. (可结合课件 4101)

1.1.2 弧度制和弧度制与角度制的换算

过去, 我们使用角度制来度量角, 把圆周 360 等分, 则其中 1 份所对的圆心角是 1 度, 这种用度作单位来度量角的制度叫做**角度制**. 角度制规定 60 分等于 1 度, 60 秒等于 1 分. 下面我们来介绍在数学和其他科学研究中另一种常用的度量角的制度——**弧度制**.

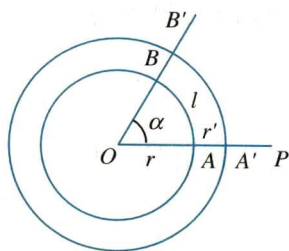


图 1-6

弧度制是根据圆心角、弧长和半径之间的某种关系而引入的. 角是由射线绕它的端点旋转而形成的, 在旋转的过程中, 射线上的任一点必然形成一条圆弧, 不同的点所形成的圆弧的长度是不同的, 如  $\widehat{AB}$  弧、 $\widehat{A'B'}$  弧……都对应同一个圆心角  $\alpha$ , 如图 1-6.

容易发现, 在这些同心圆中, 同一圆心角  $\alpha$  所对的弧与它所在圆的半径的比值是一个常数:

$$\frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\widehat{A'B'}}{r'} = \dots = \text{定值}.$$

事实上, 设  $\alpha = n^\circ$ ,  $\widehat{AB}$  弧长为  $l$ , 半径  $OA = r$ , 则

$$l = n \cdot \frac{2\pi r}{360},$$

$$\frac{l}{r} = n \cdot \frac{2\pi}{360}.$$

这个等式右端不包含半径，这表示弧长与半径的比值与半径无关，而只与  $\alpha$  的大小有关。当  $\alpha$  为定值时，这个比值也是定值。

这就启示我们，可以用圆的半径作单位去度量弧。

我们规定：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 **1 弧度** 的角。如图 1-7， $\widehat{AB}$  的长等于半径  $r$ ， $\widehat{AB}$  所对的圆心角  $\angle AOB$  就是 1 弧度的角，弧度记作 rad。

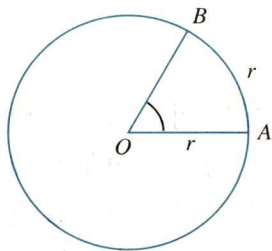


图 1-7

如前所述，这样规定出来的 1 弧度角的大小是完全确定的，与所用圆的大小无关。这种以弧度为单位来度量角的制度叫做 **弧度制**。

在半径为  $r$  的圆中，弧长为  $l$  的弧所对圆心角为  $\alpha$ ，则

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad (\alpha \text{ 的单位是 rad}).$$

这个公式有广泛的应用。

用角度制和弧度制度量角，零角既是  $0^\circ$  角，又是  $0 \text{ rad}$  角，除此以外，同一个非零角的度数和弧度数是不同的。下面讨论角度与弧度的换算。

因为半径为  $r$  的圆周长为  $2\pi r$ ，所以周角的弧度数是

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad},$$

于是

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad},$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

从这个关系式出发，可以得到

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745 \text{ rad},$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

由此容易得到，弧度制与角度制的换算公式。

设一个角的弧度数为  $\alpha$ ，角度为  $n^\circ$ ，则

$$\alpha(\text{rad}) = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ,$$

$$n^\circ = n \cdot \frac{\pi}{180}(\text{rad}).$$

下面是一些特殊角的度数与弧度数的对应表：

度量角为什么要引入弧度制？

|    |    |                 |                 |                 |                 |                  |                  |                  |       |                  |                  |                  |        |
|----|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|--------|
| 度  | 0° | 30°             | 45°             | 60°             | 90°             | 120°             | 135°             | 150°             | 180°  | 225°             | 270°             | 315°             | 360°   |
| 弧度 | 0  | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |

今后我们在用弧度制表示角的时候，弧度二字或 rad 可以略去不写，而只写这个角对应的弧度数。例如  $\angle\alpha=2$  就表示  $\alpha$  是 2 rad 的角。 $\sin \frac{\pi}{3}$  就表示  $\frac{\pi}{3}$  rad 的角的正弦。

角的概念推广以后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集  $\mathbf{R}$  之间建立一种一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数(角度数或弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角和它对应。在理解以上的对应关系时，应该注意角度制是 60 进位制，遇到  $35^{\circ}6'$  这样的角，应该把它化为 10 进制的数值  $35.1^{\circ}$ 。但是弧度数不存在这个问题，因为弧度数是十进制的实数。这是角度制与弧度制的一个重要区别。

这里，我们写出由角度换算为弧度的一个“算法”：

- (1) 给变量  $n$  和圆周率  $\pi$  的近似值赋值；
  - (2) 如果角度值  $n$  是以“度、分、秒”形式给出，先把  $n$  化为以“度”为单位的 10 进制表示；
  - (3) 计算  $\frac{\pi}{180}$ ，得出的结果赋给变量  $a$ ；
  - (4) 计算  $na$ ，赋值给变量  $\alpha$ 。
- $\alpha$  就是这个角的弧度值。

利用上面的步骤，我们可以把任意角的角度值换算为它的弧度值。只要每步计算出准确值(按照要求的精确度)，最后总能算出结果。这种算法虽然机械，但计算步骤清楚，便于检查。更重要的是，它有利于我们编写程序，以便使用计算器或计算机进行计算。同学们不妨用工作表中的公式功能，设计一个换算区域，你只要输入角度值，其他的步骤就可以让计算机替你代劳了。

- 例 1** (1) 把  $112^{\circ}30'$  化成弧度(精确到 0.001)；  
 (2) 把  $112^{\circ}30'$  化成弧度(用  $\pi$  表示)。

**解：**(1) 按照上面写出的算法步骤，依次计算：

- ①  $n=112^{\circ}30'$ ， $\pi=3.1416$ ；
- ②  $n=112\frac{30}{60}=112.5$ ；
- ③  $a=\frac{\pi}{180}\approx 0.0175$ ；

弧度制和角度制的主要区别是什么？

$$\textcircled{4} \alpha = na = 1.968\ 75,$$

$$\alpha \approx 1.969 \text{ rad.}$$

$$(2) 112^\circ 30' = \left(\frac{225}{2}\right)^\circ = \frac{225}{2} \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{8}.$$

**例 2** 把  $\frac{8\pi}{5}$  化成度.

$$\text{解: } \frac{8\pi}{5} = \frac{8\pi}{5} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{8\pi}{5} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 288^\circ.$$

**例 3** 使用科学型计算器, 把下列度数化为弧度数或把弧度数化为度数(精确到 0.000 1):

$$(1) 67^\circ, \quad 168^\circ, \quad -86^\circ;$$

$$(2) 1.2 \text{ rad}, \quad 5.2 \text{ rad}.$$

**解:** (1)  $\boxed{\text{MODE}} \boxed{\text{MODE}} 2$

$$67 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DRG}} 1 \boxed{=} 1.1693370599 \approx 1.169\ 3;$$

$$168 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DRG}} 1 \boxed{=} 2.932153143 \approx 2.932\ 2;$$

$$-86 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DRG}} 1 \boxed{=} -1.500983157 \approx -1.501\ 0.$$

(2)  $\boxed{\text{MODE}} \boxed{\text{MODE}} 1$

$$1.2 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DRG}} 2 = 68.75493542^\circ \approx 68.754\ 9^\circ;$$

$$5.2 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{DRG}} 2 = 297.9380535^\circ \approx 297.938\ 1^\circ.$$

**例 4** 如图 1-8, 扇形 AOB 中,  $\widehat{AB}$  所对的圆心角是  $60^\circ$ , 半径为 50 米, 求  $\widehat{AB}$  的长  $l$  (精确到 0.1 米).

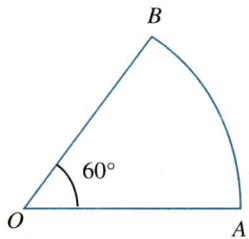


图 1-8

**解:** 因为  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\text{所以 } l = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \times 50 \approx 1.05 \times 50 = 52.5.$$

**答:**  $\widehat{AB}$  的长约为 52.5 米.

**例 5** 利用弧度制推导扇形面积公式

$$S = \frac{1}{2}lr,$$

其中  $l$  是扇形的弧长,  $r$  是扇形的半径.

**解:** 如图 1-9, 因为圆心角为 1(rad) 的扇形的面积为  $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2$ ,

而弧长为  $l$  的扇形的圆心角的大小为  $\frac{l}{r}$  rad,

所以它的面积

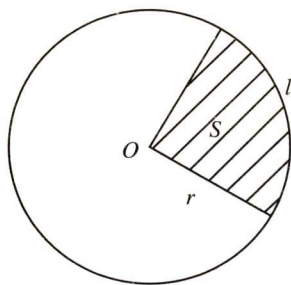


图 1-9