

你想了解高考命题规律吗？
你想掌握高考题型求解方法吗？
你想走捷径考取高分吗？

请看：

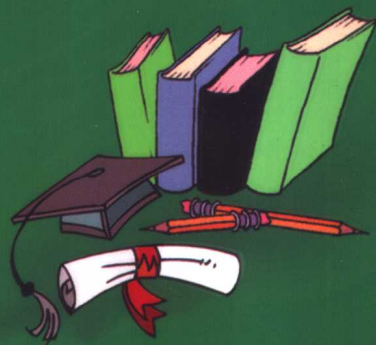
高考数学

命题背景与解法指导

(1985—2002年按80个考点归类)

杜世豪 编著

知识要点
高考要求
考题例析
解法指导
命题背景
答案与提示



金盾出版社

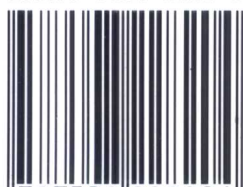
责任编辑 徐维仁
封面设计 苟静莉

高考数学命题背景与解法指导

作者毕业于大学数学系，被国家特聘为首批中学高级教师，任教高中数学近四十年，解题方法独特、简捷、实用，所教学生高考升学率高达96%，不少学生考取全国统考数学满分。

了解命题规律 / 掌握求解方法 / 捷径考取高分

ISBN 7-5082-2820-0



9 787508 228204 >



ISBN 7-5082-2820-0

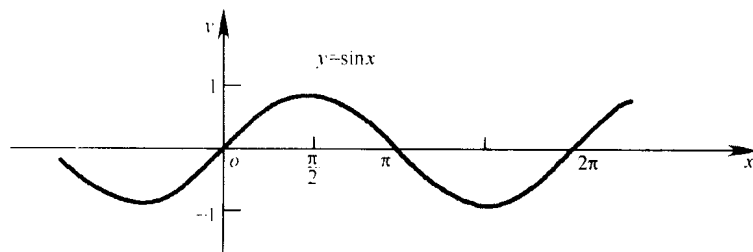
G · 1097 定价:29.00 元

高考数学命题背景与

解法指导

(1985—2002年按80个考点归类)

杜世豪 编 著



金盾出版社

内 容 提 要

本书由名校名师精心打造,将1985~2002年的高考数学试题以新编教材章节为序,按80个考点归类,分十二章编写,并附“2003年全国高校统一招生考试数学试题简析”。全书各章节设立了“知识要点、高考要求、考题例析、解法指导、命题背景及答案与提示”六个栏目。本书不仅揭示了高考命题规律,更能帮助广大考生最大限度地熟悉高考基本题型、熟练掌握高考基本题型的求解思路和多种方法,融会贯通所学知识,最大限度地提高解题速度和分析解决实际问题的能力,真正做到一书在手,胜券在握的目的。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学命题背景与解法指导/杜世豪编著. —北京:金盾出版社,2004.3
ISBN 7-5082-2820-0

I. 高… II. 杜… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第005793号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路5号(地铁万寿路站往南)

邮政编码:100036 电话:68214039 66882412

传真:68276683 电挂:0234

封面印刷:北京精彩雅恒印刷有限公司

正文印刷:北京金盾印刷厂

各地新华书店经销

开本:787×1092 1/16 印张:26.5 字数:850千字

2004年3月第1版第1次印刷

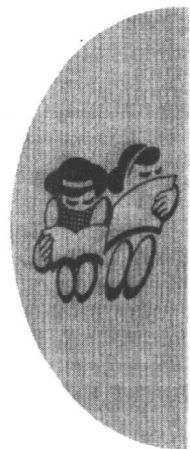
印数:1—15000册 定价:29.00元

(凡购买金盾出版社的图书,如有缺页、
倒页、脱页者,本社发行部负责调换)

该书归纳了1985~2002长达18年的高考数学试题。由于时间跨度长、试题容量大,因而这些试题不仅覆盖了中学数学的全部内容,而且还从不同角度、不同侧面对中学数学基础知识、基本技能、基本方法进行了全方位考查。《高考数学命题背景与解法指导》一书不但揭示了高考命题规律,更能帮助广大考生最大限度地熟悉高考基本题型,最大限度地熟练掌握高考基本题型的求解思路和方法,融会贯通所学知识,掌握各部分知识的内在联系,最大限度地提高解题速度和分析解决实际问题的能力,真正做到一书在手,胜券在握。

中国数学会理事、国家级专家 李长明

2003年12月于北京



序

由数学名师杜世豪编著的《高考数学命题背景与解法指导》一书是一本不可多得的高考数学教辅书。

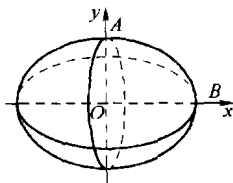
作者毕业于名校数学系。40年来,一直任高中数学教师兼高中数学教研组长、高中班主任、中国青年出版社数学编辑。1988年被评聘为首批中学高级教师;1992年入编《中国专家辞典》;1994年入编英国剑桥大学《国际传记辞典》。

作者教学深入浅出,方法得体,所教学生参加全国高中数学竞赛连年获奖,有的获全国统一高考数学满分;有的获全国中学生奖学金;大专院校升学比例高达96%。在数十年的高中数学教学实践中,总结和提炼了很多简捷实用、针对性强的解题方法,在全国各类数学期刊发表论文数十篇,出版个人专著多部。不少论文被辑入中国人民大学书报资料中心《中学数学教学》、北京师范大学《高中数学解题方法与技巧》、哈尔滨师范大学《高考数学试题解法及热点分析》、江苏教育出版社《高中数学必读》。论文和著作荣获全国中学数学课程教材教法优秀论文一等奖、优秀科研成果奖和科学技术进步奖等奖项。

《高考数学命题背景与解法指导》是作者近年来又一呕心沥血的力作。该书将实行高考制度改革以来的1985~2002年高考数学试题,按80个考点归类,分十二章精心编著,各章节设立了“知识要点、高考要求、考题例析、解法指导、命题背景及答案与提示”六个新颖的栏目,并附六套“二〇〇三年全国高校统一招生考试数学试题简析”。



前言



高考试题是众多命题专家创造性劳动的结晶。它除了选拔功能之外,还具有明显的启示和导向作用。由于高考试题的典型性、新颖性和现实感,因而具有非常强的生命力。通过对高考试题的反复研讨,不仅能够使我们学到不少新的知识和新的技能,不断提高我们的思维水平和分析解决实际问题的能力,而且还会发现不少特点。

一、基础知识,每年必考。在高考试题中,基础知识出现频率极高。

二、综合能力,重点考查。重点内容常以多方面知识交叉、多种技能并用的方式进行综合能力考查。

三、考试内容,不离课本。绝大多数考题均以课本例题、习题为原型,个别考题则以高等数学为背景。

四、考题导向,完善教学。不少富有新意的高考试题已被选入2003年审定通过的人教社高中数学新教材,进一步丰富和完善中学数学教学。

五、例年试题:主要背景。有不少基础题由往届高考试题改编而来,出现了一批又一批的“雷同题组”,甚至有的高考试题在相隔数年之后又原模原样地呈现在考生面前(2003年全国高考理科第一(9)题,就是“三南”(海南、湖南、云南)1991年高考文科第一(8)题,即本书第四章例32)。历年高考试题在考查内容及试题类型等方面已经成为近年高考命题的主要背景。近年高考试题中,百分之九十的考题都能在本书“命题背景”中发现雷同题或类似题。本书“2003年全国高校统一招生考试数学试题简析”就体现这一点。

六、高考命题,逐年稳定。自1991年实施《考试说明》以来,高考命题逐年稳定。不仅内容考查没有超出《考试说明》界定的范围,而且能力考查也没有超过《考试说明》要求的层次;既没有偏题、怪题,也不在特殊问题上做文章,而是突出考查那些在中学数学中最基本、最具普遍意义、应用也较多的通性通法;应用题的考查在联系实际、联系生活的同时,逐步接近教学要求,突出了基础知识和基本技能的应用;压轴题也改过去的一题把关为现在的多题把关,不再令人望而却步。

七、跳出题海,减轻负担。高考复习完全可以摒弃铺天盖地的复习资料,应围绕《教学大纲》和《考试说明》,把精力集中在掌握基础知识和提高分析解决实际问题的能力上,跳出题海,减轻学习负担。

八、提高效果,夺取高分。多年的教学实践告诉我们,讲授新课时,恰当选择高考基础题作为例题、习题,可以激发学生学习兴趣,提高教学效果。高三复习时,紧扣历年高考试题,可以让学生了解高考试题的命题规律和热点,熟练掌握高考常规题的求解方法,提高解题速度,赢得更多的时间攻克难题,夺取高分。

基于以上想法,作者将1985年实行标准化命题和考试科目改革实验以来的高考试题以新编教材章节为序,按80个考点编写了《高考数学命题背景与解法指导》一书。

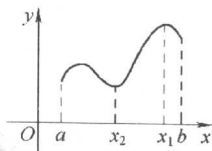
本书编拟的试题包括:

- ① 全国1985—2002年高考(文、理科)试题;
- ② 上海1985—2002年高考(文、理科)试题;
- ③ 广东1985—1990年高考标准化命题试点(文、理科)试题;
- ④ “三南”及“六省市”1991—1993年高考“3+2”考试科目改革试点(文、理科)试题;
- ⑤ 广东等省1999—2002年高考“3+X”考试科目改革试点(文理合卷)试题;
- ⑥ “两省一市”2000—2002年高考“新课程卷”(文、理科)试题;
- ⑦ 北京、安徽、内蒙古2000—2002年春季高考(文、理科)试题;
- ⑧ 上海2000—2002年春季高考(文、理科)试题;
- ⑨ 2003年高考全国、北京、新课程卷(文、理科)试题。

作者

2003年8月于北京

目 录



| | |
|----------------------------|------|
| 第一章 集合与简易逻辑 | |
| 一、集合及其运算 | (1) |
| 知识要点 | (1) |
| 高考要求 | (2) |
| 考题例析 | (2) |
| 解法指导 | (3) |
| 命题背景 | (4) |
| 考点 1 集合的概念及子集、交集、 并集、补集 | (4) |
| 二、简易逻辑 | (7) |
| 知识要点 | (7) |
| 高考要求 | (8) |
| 考题例析 | (8) |
| 解法指导 | (8) |
| 命题背景 | (9) |
| 考点 2 充要条件 | (9) |
| 三、第一章考题答案与提示 | (13) |
| 第二章 函数 | |
| 一、映射与函数 | (15) |
| 知识要点 | (15) |
| 高考要求 | (15) |
| 考题例析 | (16) |
| 解法指导 | (17) |
| 命题背景 | (18) |
| 考点 3 映射与函数 | (18) |
| 考点 4 函数的定义域 | (19) |
| 考点 5 函数的值域 | (20) |
| 考点 6 函数的解析式 | (21) |
| 考点 7 反函数 | (21) |
| 二、函数图像和图像变换 | (23) |
| 知识要点 | (23) |
| 高考要求 | (24) |
| 考题例析 | (24) |
| 解法指导 | (27) |
| 命题背景 | (27) |
| 考点 8 初等函数图像及图像 变换 | (27) |
| 三、函数的单调性、奇偶性和最值 | (34) |
| 知识要点 | (34) |
| 高考要求 | (35) |
| 考题例析 | (35) |
| 解法指导 | (40) |
| 命题背景 | (41) |
| 考点 9 函数的单调性 | (41) |
| 考点 10 函数的奇偶性 | (42) |
| 考点 11 函数的最值 | (45) |
| 考点 12 应用函数性质求参数 范围 | (48) |
| 四、指数方程和对数方程 | (49) |
| 知识要点 | (49) |
| 高考要求 | (50) |
| 考题例析 | (50) |
| 解法指导 | (52) |
| 命题背景 | (52) |
| 考点 13 指数与对数运算 | (52) |
| 考点 14 指数方程 | (53) |
| 考点 15 对数方程 | (53) |
| 五、第二章考题答案与提示 | (54) |
| 第三章 数列 | |
| 一、等差数列和等比数列 | (69) |

| | | | |
|-----------------------------------|-------|--------------------------------------|-------|
| 知识要点 | (69) | 四、三角函数的图像和性质 | (105) |
| 高考要求 | (70) | 知识要点 | (105) |
| 考题例析 | (70) | 高考要求 | (105) |
| 解法指导 | (74) | 考题例析 | (105) |
| 命题背景 | (75) | 解法指导 | (110) |
| 考点 16 等差数列的通项公式 | (75) | 命题背景 | (111) |
| 考点 17 等差数列前 n 项和 公式 | (75) | 考点 26 三角函数的定义和 图像 | (111) |
| 考点 18 等比数列的通项公式 | (77) | 考点 27 三角函数的单调性 | (113) |
| 考点 19 等比数列前 n 项和 公式 | (78) | 考点 28 三角函数的周期性 | (114) |
| 考点 20 递推数列 | (80) | 考点 29 三角函数的奇偶性 | (116) |
| 二、第三章考题答案与提示 | (81) | 考点 30 三角函数的最值 | (117) |
| 第四章 三角函数 | | 考点 31 三角函数线 | (119) |
| 一、三角函数的求值与化简 | (90) | 五、反三角函数 | (120) |
| 知识要点 | (90) | 知识要点 | (120) |
| 高考要求 | (92) | 高考要求 | (121) |
| 考题例析 | (92) | 考题例析 | (121) |
| 解法指导 | (95) | 解法指导 | (122) |
| 命题背景 | (95) | 命题背景 | (123) |
| 考点 21 三角函数诱导公式及 特殊角三角函数值 | (95) | 考点 32 反三角函数的定义和 性质 | (123) |
| 考点 22 已知三角函数值求角 | (96) | 考点 33 反三角函数的计算和 证明 | (125) |
| 考点 23 三角函数的求值与 化简 | (97) | 六、简单三角方程(仅供沿用统编教材 的六省市考生参考) | (126) |
| 二、解斜三角形 | (101) | 知识要点 | (126) |
| 知识要点 | (101) | 高考要求 | (126) |
| 高考要求 | (102) | 考题例析 | (126) |
| 考题例析 | (102) | 解法指导 | (127) |
| 解法指导 | (102) | 命题背景 | (128) |
| 命题背景 | (102) | 考点 34 简单三角方程 | (128) |
| 考点 24 正弦定理和余弦定理 | (102) | 七、第四章考题答案与提示 | (129) |
| 三、证明三角恒等式 | (103) | 第五章 向量 | |
| 知识要点 | (103) | 一、向量及其运算 | (140) |
| 高考要求 | (103) | 知识要点 | (140) |
| 考题例析 | (103) | 高考要求 | (142) |
| 解法指导 | (104) | 考题例析 | (142) |
| 命题背景 | (104) | 解法指导 | (143) |
| 考点 25 证明三角恒等式 | (104) | 命题背景 | (143) |

| | | | |
|-----------------------|-------|-----------------------|-------|
| 考点 35 向量运算 | (143) | 三、曲线方程 | (175) |
| 考点 36 空间中的距离和角 | (144) | 知识要点 | (175) |
| 二、解斜三角形(见第四章三角函数 | | 高考要求 | (176) |
| 第二节) | (146) | 考题例析 | (176) |
| 三、第五章考题答案与提示 | (146) | 解法指导 | (179) |
| 第六章 不等式 | | 命题背景 | (180) |
| 一、不等式的性质 | (150) | 考点 43 曲线方程的求法 | (180) |
| 知识要点 | (150) | 四、圆方程及直线与圆的位置关系 | (182) |
| 高考要求 | (151) | 知识要点 | (182) |
| 考题例析 | (151) | 高考要求 | (183) |
| 解法指导 | (152) | 考题例析 | (183) |
| 命题背景 | (153) | 解法指导 | (184) |
| 考点 37 不等式的性质和证明 | (153) | 命题背景 | (185) |
| 二、不等式的解法 | (154) | 考点 44 圆的方程 | (185) |
| 知识要点 | (154) | 考点 45 直线与圆的位置关系 | (185) |
| 高考要求 | (155) | 五、对称变换 | (187) |
| 考题例析 | (155) | 知识要点 | (187) |
| 解法指导 | (157) | 高考要求 | (187) |
| 命题背景 | (158) | 考题例析 | (188) |
| 考点 38 不等式的解法 | (158) | 解法指导 | (189) |
| 三、第六章考题答案与提示 | (162) | 命题背景 | (189) |
| 第七章 直线和圆的方程 | | 考点 46 对称变换 | (189) |
| 一、有向线段定比分点公式 | (166) | 六、第七章考题答案与提示 | (191) |
| 知识要点 | (166) | 第八章 圆锥曲线 | |
| 高考要求 | (166) | 一、椭圆 | (196) |
| 考题例析 | (167) | 知识要点 | (196) |
| 解法指导 | (168) | 高考要求 | (197) |
| 命题背景 | (168) | 考题例析 | (197) |
| 考点 39 有向线段定比分点 | | 解法指导 | (199) |
| 公式 | (168) | 命题背景 | (200) |
| 二、直线方程 | (169) | 考点 47 椭圆 | (200) |
| 知识要点 | (169) | 二、双曲线 | (203) |
| 高考要求 | (170) | 知识要点 | (203) |
| 考题例析 | (170) | 高考要求 | (204) |
| 解法指导 | (171) | 考题例析 | (204) |
| 命题背景 | (171) | 解法指导 | (206) |
| 考点 40 直线方程 | (171) | 命题背景 | (206) |
| 考点 41 二直线的位置关系 | (174) | 考点 48 双曲线 | (206) |
| 考点 42 点到直线的距离 | (175) | 三、抛物线 | (211) |

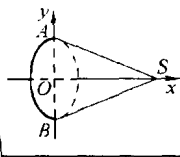
| | | | |
|--------------------------|-------|--------------|-------|
| 知识要点 | (211) | 解法指导 | (248) |
| 高考要求 | (212) | 命题背景 | (248) |
| 考题例析 | (212) | 考点 55 空间二直线 | (248) |
| 解法指导 | (213) | 二、直线与平面的位置关系 | (250) |
| 命题背景 | (214) | 知识要点 | (250) |
| 考点 49 抛物线 | (214) | 高考要求 | (250) |
| 四、移轴变换 | (217) | 考题例析 | (250) |
| 知识要点 | (217) | 解法指导 | (251) |
| 高考要求 | (217) | 命题背景 | (251) |
| 考题例析 | (217) | 考点 56 直线与平面 | (251) |
| 解法指导 | (218) | 三、平面与平面的位置关系 | (253) |
| 命题背景 | (219) | 知识要点 | (253) |
| 考点 50 移轴变换 | (219) | 高考要求 | (254) |
| 五、直线及圆锥曲线的参数方程 | (221) | 考题例析 | (254) |
| 知识要点 | (221) | 解法指导 | (254) |
| 高考要求 | (222) | 命题背景 | (255) |
| 考题例析 | (222) | 考点 57 平面与平面 | (255) |
| 解法指导 | (224) | 四、空间中的距离 | (256) |
| 命题背景 | (224) | 知识要点 | (256) |
| 考点 51 常见曲线的参数方程 | (244) | 高考要求 | (257) |
| 考点 52 参数方程与普通方程的互化 | (225) | 考题例析 | (258) |
| 六、极坐标系(仅供沿用统编教材的六省市考生参考) | (227) | 解法指导 | (258) |
| 知识要点 | (227) | 命题背景 | (258) |
| 高考要求 | (228) | 考点 58 空间中的距离 | (258) |
| 考题例析 | (228) | 五、空间中的角 | (259) |
| 解法指导 | (229) | 知识要点 | (259) |
| 命题背景 | (230) | 高考要求 | (260) |
| 考点 53 常见曲线的极坐标方程 | (230) | 考题例析 | (260) |
| 考点 54 极坐标方程与直角坐标方程的互化 | (233) | 解法指导 | (261) |
| 七、第八章考题答案与提示 | (234) | 命题背景 | (261) |
| 第九章 直线、平面、简单几何体 | | 考点 59 空间中的角 | (261) |
| 一、直线与直线的位置关系 | (247) | 六、棱柱 | (263) |
| 知识要点 | (247) | 知识要点 | (263) |
| 高考要求 | (247) | 高考要求 | (263) |
| 考题例析 | (248) | 考题例析 | (264) |
| | | 解法指导 | (266) |
| | | 命题背景 | (267) |
| | | 考点 60 棱柱 | (267) |
| | | 七、棱锥 | (272) |

| | | | |
|----------|-------|-------------------------|-------|
| 知识要点 | (272) | 命题背景 | (290) |
| 高考要求 | (273) | 考点 66 球 | (290) |
| 考题例析 | (273) | 十三、第九章考题答案与提示 | (291) |
| 解法指导 | (274) | 第十章 排列组合、概率 | |
| 命题背景 | (274) | 一、排列组合 | (300) |
| 考点 61 棱锥 | (274) | 知识要点 | (300) |
| 八、棱台 | (279) | 高考要求 | (300) |
| 知识要点 | (279) | 考题例析 | (301) |
| 高考要求 | (279) | 解法指导 | (303) |
| 考题例析 | (279) | 命题背景 | (303) |
| 解法指导 | (280) | 考点 67 排列组合 | (303) |
| 命题背景 | (280) | 二、二项式定理 | (308) |
| 考点 62 棱台 | (280) | 知识要点 | (308) |
| 九、圆柱 | (281) | 高考要求 | (309) |
| 知识要点 | (281) | 考题例析 | (309) |
| 高考要求 | (281) | 解法指导 | (311) |
| 考题例析 | (281) | 命题背景 | (311) |
| 解法指导 | (282) | 考点 68 二项式定理 | (311) |
| 命题背景 | (282) | 三、概率 | (314) |
| 考点 63 圆柱 | (282) | 知识要点 | (314) |
| 十、圆锥 | (283) | 高考要求 | (315) |
| 知识要点 | (283) | 考题例析 | (315) |
| 高考要求 | (283) | 解法指导 | (316) |
| 考题例析 | (283) | 命题背景 | (316) |
| 解法指导 | (284) | 考点 69 概率 | (316) |
| 命题背景 | (284) | 考点 70 统计初步 | (317) |
| 考点 64 圆锥 | (284) | 四、第十章考题答案与提示 | (318) |
| 十一、圆台 | (287) | 第十一章 极限、导数、微分与积分 | |
| 知识要点 | (287) | 一、数学归纳法 | (322) |
| 高考要求 | (287) | 知识要点 | (322) |
| 考题例析 | (287) | 高考要求 | (322) |
| 解法指导 | (287) | 考题例析 | (322) |
| 命题背景 | (288) | 解法指导 | (324) |
| 考点 65 圆台 | (288) | 命题背景 | (324) |
| 十二、球 | (288) | 考点 71 数学归纳法 | (324) |
| 知识要点 | (288) | 二、极限 | (326) |
| 高考要求 | (289) | 知识要点 | (326) |
| 考题例析 | (289) | 高考要求 | (327) |
| 解法指导 | (289) | 考题例析 | (327) |

| | | | |
|----------------------|-------|----------------------|-------|
| 解法指导····· | (331) | 考点 79 复数方程····· | (364) |
| 命题背景····· | (331) | 三、复数的几何意义····· | (366) |
| 考点 72 数列极限····· | (331) | 知识要点····· | (366) |
| 考点 73 函数极限和重要极限····· | (336) | 高考要求····· | (366) |
| 三、导数、微分与积分····· | (336) | 考题例析····· | (366) |
| 知识要点····· | (336) | 解法指导····· | (370) |
| 高考要求····· | (339) | 命题背景····· | (370) |
| 考题例析····· | (339) | 考点 80 复数的几何意义····· | (370) |
| 解法指导····· | (341) | 四、第十二章考题答案与提示····· | (373) |
| 命题背景····· | (341) | 附 二〇〇三年全国高校统一招生考试 | |
| 考点 74 导数和微分····· | (341) | 数学试题简析 | |
| 考点 75 积分····· | (341) | 一、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 四、第十一章考题答案与提示····· | (343) | (文史类·新课程卷)试题····· | (381) |
| 第十二章 复数 | | 二、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 一、复数的认识····· | (352) | (理工类·新课程卷)试题····· | (383) |
| 知识要点····· | (352) | 三、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 高考要求····· | (353) | (新课程卷·文理)试题简析····· | (385) |
| 考题例析····· | (353) | 四、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 解法指导····· | (355) | (文史类)试题····· | (392) |
| 命题背景····· | (356) | 五、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 考点 76 复数的三角形式····· | (356) | (理工类)试题····· | (395) |
| 考点 77 复数的模和辐角····· | (356) | 六、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 二、复数运算与复数方程····· | (358) | (文理)试题简析····· | (397) |
| 知识要点····· | (358) | 七、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 高考要求····· | (359) | (文史类·北京卷)试题····· | (402) |
| 考题例析····· | (360) | 八、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 解法指导····· | (363) | (理工农医类·北京卷)试题····· | (404) |
| 命题背景····· | (364) | 九、2003 年全国高校统一招生考试数学 | |
| 考点 78 复数运算····· | (364) | (北京卷·文理)试题简析····· | (406) |

第一章

集合与简易逻辑

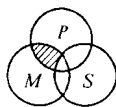


集合思想广泛地渗透到自然科学的各个领域,集合的概念及其基本理论是近代数学最基本的内容之一.学习和掌握集合的初步知识是进一步学习近代数学的必要准备.逻辑知识是构成公民文化素质的重要方面.充分必要条件是数学和其他学科在论证命题时必须明确和掌握的一个主要概念,其作用在于揭示命题中间条件和结论因与果的逻辑关系.高考试题考查充要条件主要是判断和寻求充要条件(也有证明充要条件的).由于集合与逻辑涉及的知识面极为广泛,是考查各个知识点的极好题型,因此有关集合运算和充要条件的考题在高考试题中几乎连年出现.

一、集合及其运算

知识要点

1. 集合的三个特征 确定性、互异性、无序性.
2. 集合的表示法 列举法、描述法.
3. 集合与元素的递属关系 $a \in A$ 或 $a \notin A$.
4. 集合与集合的包含关系
 - (1)若“任意 $a \in A \Rightarrow a \in B$ ”,则称 A 是 B 的子集,记为 $A \subseteq B$.
 - (2)若 $A \subseteq B$,且至少存在一个元素, $b \in B$,但是 $b \notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记为 $A \subsetneq B$.
 - (3)若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.
 - (4)包含关系的传递性:①若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$
②若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$
5. 集合与集合的运算关系
 - (1)交集 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.
 - (2)并集 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.
 - (3)补集 $C_S A = \{x | x \in S \text{ 且 } x \notin A\}$,其中 S 是全集,即 $A \subseteq S$.
 - (4)运算性质:①等幂性: $A \cap A = A, A \cup A = A$.
 - ②同一性: $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap S = A, A \cup S = S$.
 - ③交换性: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$.
 - ④结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 - ⑤分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - ⑥余补律: $A \cap C_S A = \emptyset, A \cup C_S A = S$.
 $C_S(C_S A) = A, C_S S = \emptyset, C_S \emptyset = S$.
 - ⑦对偶律: $C_S(A \cap B) = C_S A \cup C_S B$
 $C_S(A \cup B) = C_S A \cap C_S B$.



高考要求

1. 会用列举法,描述法表示简单集合.
2. 会求有限集合的所有子集和真子集.
3. 掌握交、并、补运算的简单性质.
4. 会求简单集合的交集、并集、补集.

考题例析

- 【例 1】** 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | \sqrt{x^2} > 2\}$, $N = \{x | \log_x 7 > \log_3 7\}$ 那么 $M \cap C_U N =$ ()
- (A) $\{x | x < -2\}$ (B) $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
 (C) $\{x | x \geq 3\}$ (D) $\{x | -2 \leq x < 3\}$

(三南九二理 1-13)

分析 此题考查集合的交、补运算及对数不等式的解法. 只要先将给定的集合化简, 再用数轴进行运算即可.

解 由题 $M = \{x | |x| > 2\} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 $N = \{x | 1 < x < 3\}$, $C_U N = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\} = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$,
 如图 1-1

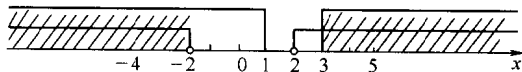


图 1-1

$\therefore M \cap C_U N = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$, 选(B)

- 【例 2】** 设 $A = \{x | \log_3 |x - \frac{\pi}{3}| \geq \log_3 \frac{2\pi}{3}, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | \cos x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. 求 $D = A \cap B$ (最后结果以区间形式给出), 并在数轴上标出集合 D .

(上海八七理 3)

分析 此题除考查集合运算之外, 还考查对数不等式, 绝对值不等式及三角不等式的解法.

解 $\because A = \{x | |x - \frac{\pi}{3}| \leq \frac{2\pi}{3} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{3}\} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \pi]$.
 $B = [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}] (k \in \mathbb{Z})$, 如图 1-2.

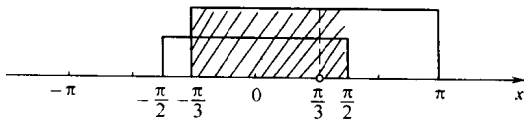


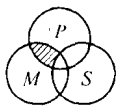
图 1-2

$\therefore D = A \cap B = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

- 【例 3】** 设 a, b 是两个实数, $A = \{(x, y) | x = n, y = na + b, n \text{ 是整数}\}$, $B = \{(x, y) | x = m, y = 3m^2 + 15, m \text{ 是整数}\}$, $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 144\}$ 是平面 xOy 内点的集合, 讨论是否存在 a 和 b , 使得: (1) $A \cap B \neq \emptyset$, (\emptyset 表示空集); (2) $(a, b) \in C$.

(全国八五理 8)

分析 此题除考查集合运算之外, 还考查直角坐标平面内点与有序实数对的对应关系、曲线与方程的转化关系、直线和圆的位置关系, 二元二次不等式的几何意义以及应用一元二次方程根的判别式和非负数



解决问题的能力.

解一 由 $A \cap B \neq \emptyset$, 知存在 $(x, y) \in A$ 且 $(x, y) \in B$.

$$\text{即} \begin{cases} x = m = n \\ y = na + b \rightarrow 3n^2 + 15 = na + b, n \in \mathbb{Z}, (*) \\ y = 3m^2 + 15 \end{cases}$$

设满足 $(*)$ 的 (a, b) 存在, 视 $(*)$ 为 a, b 的一次方程, 则 $(a, b) \in l: nx + y - 3n^2 - 15 = 0$;

又由 $(a, b) \in C$, 则 (a, b) 位于 $\odot: x^2 + y^2 = 144$ 上或圆内

\therefore 由圆心 $O(0, 0)$ 到 l 的距离

$$d = \frac{|0 + 0 - 3n^2 - 15|}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq 12 \rightarrow n^4 - 6n^2 + 9 \leq 0 \rightarrow (n^2 - 3)^2 \leq 0.$$

$\therefore n = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ 与 $n \in \mathbb{Z}$ 相矛盾, 故适合条件的 a, b 不存在.

解二 视解一中 $(*)$ 为 n 的二次方程, 由 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\Delta = a^2 + 12b - 180 \geq 0$$

$$\text{又设 } (a, b) \in C: a^2 + b^2 \leq 144 \rightarrow a^2 \leq 144 - b^2.$$

$$\therefore 0 \leq \Delta = a^2 + 12b - 180 \leq (144 - b^2) + 12b - 180 = -b^2 + 12b - 36 = -(b - 6)^2 \leq 0$$

$$\therefore b = 6 \text{ 且 } \Delta = 0, \text{ 从而方程 } (*) \text{ 有二等根 } n_1 = n_2, \text{ 由根与系数关系知 } n^2 = n_1 \cdot n_2 = \frac{15 - b}{3} = 3.$$

$\therefore n = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ 与 $n \in \mathbb{Z}$ 相矛盾, 故适合条件的 a, b 不存在.

解三 将解一中 $(*)$ 两边乘以 12:

$$36n^2 + 180 = 12na + 12b, \text{ 即 } 36n^2 - 12na + a^2 = 12b - 180 + a^2,$$

$$\text{即 } (6n - a)^2 = a^2 + 12b - 180, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{又设 } (a, b) \in C: a^2 + b^2 \leq 144, \text{ 即 } a^2 \leq 144 - b^2.$$

$$\therefore (6n - a)^2 \leq 144 - b^2 + 12b - 180 = -(b - 6)^2 \leq 0.$$

$$\therefore \begin{cases} 6n - a = 0 \\ a^2 + 12b - 180 = 0 \\ b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n = \pm\sqrt{3} \\ a = \pm 6\sqrt{3} \\ b = 6 \end{cases} \text{ 与 } n \in \mathbb{Z} \text{ 矛盾.}$$

\therefore 满足条件的 a, b 不存在.

解四 由解二中 $\Delta = a^2 + 12b - 180 \geq 0$, 即 $a^2 \geq -12(b - 15)$ 可知 (a, b) 位于抛物线 $a^2 = -12(b - 15)$ 上或其外部.

又设 $(a, b) \in C: a^2 + b^2 \leq 144$, 可知 (a, b) 位于 $\odot: a^2 + b^2 = 144$ 上或圆内.

$$\text{由} \begin{cases} a^2 = -12(b - 15) \\ a^2 + b^2 = 144 \end{cases} \rightarrow b^2 - 12b + 36 = 0. \therefore b = 6, a = \pm 6\sqrt{3}, \text{ 抛物线与圆相切, } (a, b) = (\pm 6$$

$\sqrt{3}, 6)$ 是切点, 以此代入 $(*)$:

$$3n^2 + 15 = \pm 6\sqrt{3}n + 6, \therefore n = \pm\sqrt{3} \text{ 与 } n \in \mathbb{Z} \text{ 相矛盾.}$$

故满足条件的 a, b 不存在.

解法指导

1. 准确理解和正确使用集合与集合之间的包含关系记号 $\subseteq, \subset, \supseteq, =$, 以及元素与集合之间的递属关系记号 \in, \notin , 不容混淆.

2. 考查集合与集合之间包含关系时, 注意空集是任意集合的子集即 $\emptyset \subseteq A$; 空集是任意一个非空集合的真子集, 即若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subset A$; 任意一个集合是它自身的子集, 即 $A \subseteq A$.

3. 含 n 个元素的有限集 A 的子集个数为 2^n ; 真子集个数为 $2^n - 1$; 非空真子集个数为 $2^n - 2$.

4. 设 $\text{card}(A)$ 表示集合 A 的元素个数, 易知