金牌奥校

# 初中数学

# 奥林匹克竞赛题

初中数学奥林匹克竞赛题

刘丹青 杨义峰 刘梅金 编写

新疆青少年出版社

# 初中数学

# 奥林匹克竞赛题


主编：刘丹青　杨义峰　刘梅金

编委：王　林　潘永霖　何友灼
郑蒲魁　黄育绥　刘晓丹
陈　星　谢明蓉　郑嫩惠
吴香全　潘宝流　王立清
陈依金　李均萍　郑国文
刘丹青　杨义峰　刘梅金
张祖瑜



新疆青少年出版社

责任编辑:刘改霞
封面设计:小　春

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学奥林匹克教程/郑嫩惠编.—乌鲁木齐:新疆青少年出版社,2000.5

ISBN 7—5371—3742—0

Ⅰ.初…　Ⅱ.郑…　Ⅲ.数学课-初中-教材　Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61026 号

## 初中奥林匹克竞赛题

刘丹青　杨义峰　刘梅金

新疆青少年出版社出版
(乌鲁木齐胜利路 100 号　邮编:830001)
全国新华书店经销　文字 603 厂印刷
850×1168 毫米　32 开　32 印张　802 千字
2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷
印数:1—10000 册
ISBN 7—5371—3742—0/G·1773
全套 1—4 册定价:32.00 元　本册定价:8.00 元

如有印装问题请直接同承印厂调换

**版权所有·盗印必究**
**举报电话**:0991—2871253

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

# 前　　言

根据初中教学大纲要求，在初中阶段必须掌握数学的基础知识，同时要扩大学生的数学视野，拓宽知识面，培养数学兴趣，发展数学才能。实践证明，广泛开展初中数学课外活动，科学、合理地举办数学竞赛，对促进初中数学教育的改革、提高初中数学教师的教育水平与初中学生的数学素质都具有重要的意义。为此，我们编写了这套《初中奥林匹克教程》，希望此书能为数学教师开展课外活动和家长辅导孩子提供理想的参考资料，能成为初中学生课外活动，提高数学水平的良师益友。

本套书以初中数学知识为主，从初一年级开始，深入浅出，以讲座的形式介绍了若干个专题，每个专题独立成篇，有展示性的简语、例题、练习和解答。内容有益于读者的思维训练，有助于教师的讲座选材，具有启发性、系统性和可行性；便于初中学生理解、掌握，达到

举一反三、活跃思维、灵活应用，不仅能长知识更能长智慧的目的。

由于我们水平有限，加上编写时间仓促，不当之处难免，望读者不吝指正。

本书中的十一几何定值问题与自测题(二)(三)由杨义锋执笔，其余全部由刘丹青执笔，最后全书由特级，高级刘梅金老师编审。

编 者

# 目　　录

# 一、整数的整除性

整数的性质是整个数学的基础，而整除性又是基础的基础，与整除性有关的问题，构思巧妙，解法别具一格，颇有趣味。且整除性问题又是数学竞赛一项重要内容，因此熟悉整数的基础知识，掌握解题的基本方法，显得十分重要。

**（一）基础知识**

1. 给定两个正整数 a,b 那么一定存在有两个正整数 q,r 满足 $a=bq+r$ $(o\leqslant r<b)$

(1)若 $r=0$，称 a 被 b 整除，用 $b|a$ 符号表示。b 是 a 的约数(或因数)，a 是 b 的倍数。

(2)若 $r\neq 0$，称 a 不被 b 整除，用 $b\nmid a$ 符号表示。

(3)a,b 的公约数，也是 b,r 的公约数；b,r 的公约数也是 a,b 的公约数。

a,b 的最大公约数＝b,r 的最大公约数。

2. 一个大于 1 的整数 a，如果除了 1 和本身以外，不能再被其他正整数整除时，这个正整数叫做质数(或素数)；一个大于 1 的整数 a，除了 1 和本身外，还能被其他正整数整除时，这个正整数叫做合数。于是全体正整数可分为：数 1，质数和合数。

3. n 个正整数的公约数中最大的一个数叫做这 n 个数的最大公约数。n 个正整数的公倍数中最小的一个数(零除外)叫做这 n 个数的最小公倍数。两个正整数最大公约数为 1，我们说这两个正整数互质。

4. 整数的分类：

(1)按约数的个数分为：1，质数，合数。

(2)按被 2 除的余数为 1 或 2，分为偶数或奇数。一般地按被 n 除的余数为 $0,1,2\cdots(n-1)$ 分为 n 类。

5. 整除的性质：(以下字母均为整数)

(1)如 $a|b,b|a$　则 $a=b$

(2)如 $a|b,b|c$　则 $a|c$

(3)如 $c|a,c|b$，p,q 均为整数，则 $c|(pa+qb)$

(4)如 $c|ab$　而 a,c 互质　则 $c|b$

6. 整数整除的特征：

(1)如果一个整数被 2 整除,则它的个位数是偶数。

(2)如果一个整数被 5 整除,则它的个位数是 0 或 5。

(3)如果整数 $N=\overline{a_n\cdots\cdots a_1}$ 被 3(或 9)整除,则 N 的各位数码和 $a_n+\cdots+a_1$,被 3(或 9)整除。

(4)如果整数 $N=\overline{a_n\cdots\cdots a_1}$ 被 11 整除,则 N 的各位数码的正负交错和 $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_1$ 被 11 整除。

(5)如果连续 n 个整数的积,则必被 n 整除。

**(二)关于整除问题的主要解题方法**

1. 利用整数整除的特征

**例 1**:七位数 $\overline{13AB45C}$ 能被 792 整除,求数码 A,B,C。

解:$\because 792=8\times9\times11$

由于 $\overline{13AB45C}=1\times10^6+3\times10^5+A\cdot10^4+B\cdot10^3+4\times10^2+5\cdot10+C$

$\because 1\times10^6+3\times10^5+A\cdot10^4+B\cdot10^3=10^3(10^3+3\times10^2+A\cdot10+B)$ 被 8 整除

$\therefore$ 只要 $4\times10^2+5\cdot10+C$ 被 8 整除即可

$\therefore 456$ 被 8 整除 $\because C=6$

被 9 整除则 $1+3+A+B+4+5+6=9$ 的倍数

$\therefore A+B=8$ 或 $A+B=17$

被 11 整除则 $(6+4+A+1)-(5+B+3)=11$ 的倍数

$\therefore A-B=8$ 解得 $A=8,B=0$

$\therefore A=8,B=0,C=6$

**例 2**:若整数 a 不能被 5 整除,求证 $a^4-1$ 能被 5 整除。

解:$\because a^4-1=(a^2+1)(a+1)(a-1)$

$\because$ a 不能被 5 整除 $\therefore$ a 的个位数不能是 0 或 5

Ⅰ)若 a 个位数是 1 或 6,则 $5|(a-1)$

Ⅱ)若 a 个位数是 4 或 9,则 $5|(a+1)$

Ⅲ)若 a 个位数是 2,8 或 3,7 则 $(a^2+1)$ 个位数是 5 或 0

则 $5|(a^2+1)$

综上所述(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)得 $a^4-1$ 被 5 整除。

另解:$\because$ a 不能被 5 整除 $\therefore$ 可设 $a=5n\pm1$ 或 $a=5n\pm2$

Ⅰ)或 $a=5n+1$ 则 $5|(a-1)$

Ⅱ)或 $a=5n-1$　　则 $5|(a+1)$

Ⅲ)或 $a=5n\pm2$　　则 $a^2=(5n\pm2)^2=25n^2\pm20n+4$

则 $5|(a^2+1)$

综上所述(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)得 $a^4-1$ 被 5 整除。

**例** 3:设 a,b,c 是互不相等的正整数,求证:$a^3b-ab^3$,$b^3c-bc^3$,$c^3a-ca^3$,三个数中至少有一个能被 10 整除。

解:∵ $a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)$……(1)

$b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2)$……(2)

$c^3a-ca^3=ac(c^2-a^2)$……(3)

(1)无论 a,b,c 都是偶数,都是奇数或二偶一奇,或二奇一偶,(1),(2),(3)三数必然都是偶数,即必被 2 整除。

(2)若 a,b,c 中至少有一个是 5 的倍数,题设得证。若 a,b,c 都不是 5 的倍数,则 $a^2,b^2,c^2$ 的个位数只能是 1,4,6,9 四类,若 $a^2,b^2,c^2$ 有两个同类,则其差的个位数必为 0,若都不同类,那么在四类中任取三个(有四种取法),则两两的差中必有 0 或±5

∴至少有一个数能被 5 整除。

综合(1)(2)所证,给定三个数中至少有一个数被 10 整除。

2. 利用奇数或偶数性质

**例** 1:求证一个整数的平方的最后两位数字的积是一个偶数。

证明:本题实质是证明任一个整数平方(其平方最少是两位数才有效)的最后两位数必有一个数字是偶数。

(1)若这个整数是偶数,其平方后最后一位数码必然是偶数

(2)若这个整数是奇数,设奇数 $k=10m+r$($r$ 为奇数)

则 $K^2=(10m+r)^2=100m^2+20mr+r^2=20m(5m+r)+r^2$

∵ $20m(5m+r)$的个位数为 0,十位数为偶数。又 $r^2$ 的情况为下列几种　$1^2=1,3^2=9,5^2=25,7^2=49,9^2=81$

∴ $r^2$ 的十位数必为偶数。

∴ $K^2$ 的十位数字是偶数。

综上所述最后两个数字,至少有一个是偶数,∴最后两个数码的积必为偶数。

**例** 2:任意两个整数的平方差,被 4 除一定不余 2。

证明：$\because N^2-M^2=(N+M)(N-M)$　根据奇偶数性质：

$N+M$ 和 $N-M$ 必同奇或同偶

（Ⅰ）若同偶　则 $(N+M)(N-M)$ 必被 4 整除，则余数为零

（Ⅱ）若同奇　则 $N+M=2K+1$　　$N-M=2Q+1$

$\therefore (N+M)(N-M)=(2K+1)(2Q+1)=4KQ+2(K+Q)+1$

当 $K+Q$ 为偶数时，其积被 4 除余 1

当 $K+Q$ 为奇数时，其积被 4 除余数为 3

$\therefore$ 这个数平方差被 4 除余数一定不为 2

另证：按 M，N 同偶，同奇，一奇一偶来研究其平方差被 4 除的余数的情况，也可得证。

**例 3**：假设 $a_1,a_2,a_3\cdots a_n$ 是自然数 $1,2,3,\cdots\cdots n$ 任意的一个排列，且 n 为奇数，求证：乘积 $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots\cdots(a_n-n)$ 是偶数。

证明：因为 n 个因数的和

$(a_1-1)+(a_2-2)+(a_3-3)+\cdots\cdots+(a_n-n)=0$。

假设每个因数都是奇数，那么奇数项（n 为奇数）的和必定为奇数，而 0 为偶数，这与假设矛盾，$\therefore$ 每个因数为奇数不成立，即这些因数最少有一个是偶数。

$\therefore$ 乘积 $(a_1-1)(a_2-1)(a_3-1)\cdots\cdots(a_n-1)$ 必定是偶数。

3. 利用 n 个连续整数的性质

**例 1**：对于任意自然数 $n$，$n(n+2)(5n+1)(5n-1)$ 能被 24 整除。

证明：$n(n+2)(5n+1)(5n-1)=n(n+2)(25n^2-1)=n(n+2)[n^2-1+24n^2]=n(n+2)(n^2-1)+24n^3(n+2)=(n-1)n(n+1)(n+2)+24n^3(n+2)$

连续 4 个整数 $n-1,n,n+1,n+2$ 中必有一个是 4 的倍数，此外余下三个数中至少有两个是连续整数，其中必有一个偶数，又因三个连续整数中必有一个是 3 的倍数且 $2\times3\times4=24$

$\therefore n(n+2)(5n+1)(5n-1)$ 能被 24 整除。

**例 2**：求证 $f(n)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1$（n 为自然数）被 3 除必余 2。

证明：$\because f(n)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}-1=n^3+n^2-1+\frac{1}{2}n(n+1)$ 必定为整数。

又 $f(n)=n(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}n(n+1)-1$

$\because n(n+1)(n+2)$ 必有一个为 3 的倍数，$n,n+1$ 中必有一个偶数。$\therefore n(n+$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1)(n+2)必被 3 整除，$\frac{3}{2}n(n+1)$也被 3 整除，$-1=-3+2$

∴f(n)被 3 除必余 2。

例 3：证明对于不论怎样的正整数 n 和 k，数 $2n^{3k}+4n^{k}+10$ 都不能表示为若干个连续正整数的积。

证明：先把给定的数变形，令 $n^{k}=m$ 则

$N=2n^{3k}+4n^{k}+10=2m^{3}+4m+10$

$=3(m^{3}+m+3)-(m-1)m(m+1)+1$

$3(m^{3}+m+3)$是 3 的倍数，$(m-1)m(m+1)$是 3 的倍数

∴N 被 3 除所得的余数为 1，这样 N 不能表示为三个或三个以上连续正整数的积。

4. 利用 A=B+C 则 B，C 的公约数必整除 A

例 1：若 ab+cd 能被 a−c 整除，则 ad+bc 也一定被 a−c 整除。

证明：∵$(ab+cd)-(ad+bc)=(b-d)(a-c)$

∴$(ab+cd)-(ad+bc)$能被 a−c 整除。

又已知 ab+cd 能被 a−c 整除∴ad+bc 也能被 a−c 整除。

例 2：5m+3n 是 11 的倍数，求证 9m+n 也是 11 的倍数。

证明：$3(9m+n)-(5m+3n)=22m$

∴$3(9m+n)-(5m+3n)$能被 11 整除

又已知 5m+3n 被 11 整除。

∴3(9m+n)被 11 整除，又 3 与 11 互质。

∴9m+n 可被 11 整除。

5. 利用因式分解(或配方)法

例 1：求证 $f(n)=5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}(n\in N)$一定是 23 的倍数。

证明：∵$f(n)=5\cdot 25^{n}+2^{n}(2^{4}+2)=5\cdot 25^{n}+18\cdot 2^{n}$

$=23\cdot 25^{n}-18(25^{n}-2^{n})$

而 $25^{n}-2^{n}=(25-2)(25^{n-1}+25^{n-2}\cdot 2+25^{n-3}\cdot 2^{2}\cdots\cdots+2^{n-1})$

∴$f(n)=23\cdot 25^{n}-18\cdot 23(25^{n-1}+25^{n-2}+\cdots\cdots+2^{n-1})$

∴f(n)能被 23 整除

例 2：若 a 是自然数，问 $a^{4}-3a^{2}+9$ 是质数还是合数？

请证明你的结论。

证明：$\because a^4-3a^2+9=(a^2+3)^2-9a^2=(a^2+3a+3)(a^2-3a+3)$

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，原式 $=7$　　是质数

（Ⅱ）当 $a=2$ 时，原式 $=13$　　是质数

（Ⅲ）当 $a\geqslant 3$ 时，$a^2-3a+3=a(a-3)+3>1$ 又 $a^2+3a+3>1$

这时原式可分解为两个大于 1 自然数的积，是一个合数。

**例** 3：无论 n 为任何自然数，2n 位数 $\underbrace{44\cdots\cdots4}_{n}\underbrace{88\cdots\cdots8}_{n-1}9$ 必定是一个完全平方数。

证明：原式 $=4\times\underbrace{111\cdots1}_{n}\times10^n+8\times\underbrace{11\cdots\cdots1}_{n-1}\times10+9$

$$=\frac{4}{9}\underbrace{999\cdots\cdots9}_{n}\times10^n+\frac{8}{9}\times\underbrace{999\cdots\cdots9}_{n-1}\times10+9$$

$$=\frac{4}{9}(10^n-1)\cdot10^n+\frac{8}{9}(10^{n-1}-1)\times10+9$$

$$=\frac{1}{9}[4\times10^{2n}+4\times10^n+1]=(\frac{2\times10^n+1}{3})^2$$

又 $2\cdot10^n+1=(3-1)10^n+1=3\cdot10^n-(10^n-1)=3\cdot10^n-(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots\cdots1)=3\cdot10^n-9(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots\cdots+1)$

$\therefore 2\cdot10^n+1$ 能被 3 整除。

$\therefore \frac{2\cdot10^n+1}{3}$ 是整数　命题得证。

6. 利用带余除法按余数分类的性质

**例** 1：n 为自然数，求证：2 或 3 都不是 $n^2-n+1$ 和 $n^2+n-1$ 的公约数。

证明：(1) $\because A=n^2-n+1=n(n-1)+1, B=n^2+n-1=n(n+1)-2+1$

又 $\because$ 两个连续整数的积是偶数 $\therefore n(n-1)$ 与 $n(n+1)$ 都是偶数

$\because$ A 和 B 被 2 除余数都是 1

(2) 当 $n=3k$ 时　$A=9k^2-3k+1=3(3k^2-k)+1$

$B=9k^2+3k-3+2=3(3k^2+k-1)+2$

$\therefore$ A 被 3 除余 1，B 被 3 除余 2

当 $n=3k+1$ 时　　$A=(3k+1)^2-(3k+1)+1=9k^2+3k+1$

$B=(3k+1)^2+(3k+1)-1=9k^2+9k+1$

这时 A，B 被 3 除余数都是 1

当 $n=3k+2$ 时　　$A=9k^2+9k+3$

$B=9k^2+15k+5$

这时 A 被 3 整除，B 被 3 除余数为 2

综合(1)(2)所证：2 或 3 都不是 A，B 的公约数。

**例 2**：证明 P 是比 3 大的质数，则 $P^2-1$ 是 24 的倍数。

证明(1)∵P 是大于 3 的质数，∴P 可表示为 $3k\pm1(k>1)$

∴$P^2-1=(3k\pm1)^2-1=3k(3k\pm2)$

∴$P^2-1$ 被 3 整除。

(2)∵P 是大于 3 的质数，∴P 被 8 除余数不能是偶数∴P 可表示为 $8m\pm1$ 或 $8m\pm3$ 形式

当 $P=8m\pm1$ 时 $P^2+1=(8m\pm1)^2-1=8m(8m\pm2)$

此时 P 被 8 整除。

当 $P=8m\pm3$ 时 $P^2-1=(8m\pm3)^2-1=8(8m^2\pm6m+1)$

此时 P 被 8 整除。

而 8 与 3 互质，综合(1)(2)得 $P^2-1$ 是 24 的倍数。

**例 3**：若 2836，4582，5164，6522 四个整数都能被同一个正整数相除，所得的余数相同，但不为零，求除数和余数。

解：设除数为 m，余数为 r(m，r 为正数，r<m)

$2836=ma+r$ ………(1)

$4582=mb+r$ ………(2)

$5164=mc+r$ ………(3)

$6522=md+r$ ………(4)　　a，b，c，d 为正整数。

(2)—(1)得 $(b-a)m=1746$

(4)—(3)得 $(d-c)m=1358$

显然 1746，1358 都被 m 整除∴m 是 1746 和 1358 公约数。$1746=2\times3^2\times97$

$1358=2\times7\times97$

∴$m_1=2, m_2=97, m_3=194$

当 $m_1=2$ 时 $r=0$(不合题意) $m_2=97$ 时 $r=23$ $m=194$ 时 $r=120$

∴除数为 97 余数为 23，或除数为 194 余数为 120。

7. 利用反证法

**例 1**：证明对于一切整数 n，$n^2+2n+12$ 不是 121 的倍数。

证明：用反证法：假设 $n^2+2n+12=121m(m\in N)$

则 $(n+1)^2=11(11m-1)$

$\therefore (n+1)^2$ 是 11 的倍数

$\because$ 11 是质数 $\therefore n+1$ 是 11 的倍数 故可设 $n+1=11t(t\in N)$

$\therefore (11t)^2=11(11m-1)\therefore 121t^2=11(11m-1)$

$\therefore 11t^2=11m-1$ 即 $11(m-t^2)=1$ 这是不可能的。

$\therefore$ 假设不成立 $\therefore$ 本题得证。

**例** 2:除以 5 时余数是 2 或 3 的整数,一定是不完全平方数。

证明:用反证法,假设这个整数是完全平方数 $N^2$

$\because$ N 总可以表示为 $5k,5k\pm1,5k\pm2(k\in N)$ 中一个而 $(5k)^2=25k^2$;$(5k\pm1)^2=5(5k^2\pm2k)+1$;$(5k\pm2)^2=5(5k^2\pm4k)+4$

$\therefore N^2$ 除以 5,其余数必为 0,1 或 4

与已知条件余数为 2,3 相矛盾,$\therefore$ 这个假设不成立,本题得证。

**例** 3:证明质数有无穷多个。

证明:用反证法,假设质数只有 n 个,它们为:

$P_1,P_2,P_3\cdots P_n$,我们考虑新数 $N=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdots P_n+1$ 假设 N 是质数,可知,N 不等于 $P_1,P_2,P_3\cdots P_n$ 中任何一个,那么 N 是 $P_1,P_2,P_3\cdots P_n$ n 个质数以外的质数,与假设矛盾。

假设 N 为合数,那么 N 中至少有一个质约数 q。

$\therefore N=p_1p_2p_3\cdots\cdots p_n+1$ 不能被 $p_1,p_2,p_3\cdots\cdots p_n$ 中的任一个整除,

$\therefore$ q 是 $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdots\cdots p_n$ 以外的一个质数,同样与假设有 N 个质数矛盾。

$\therefore$ 质数有无限多个。

## 练 习 一

1. 四个连续整数的积加 1 的和必为完全平方数。

2. 求证 $n^3+11n$ 必能被 6 整除(n 为整数)。

3. 证明 $n^5-n$ 能被 30 整除(n 为整数)。

4. 证明三个连续自然数的立方和能被 9 整除。

5. 把 1,2,3,……100 这一百个数,每个数前面随意添上正号或负号,问所得的数的和是奇数还是偶数?与所添的正号、负号的个数有关系否?

6. 一个三位数是 37 的倍数,将其数码按循环顺序排列所得的新三位数是否仍是 37 的倍数?

7. 设 n 为自然数,但不是 4 的倍数,证明:$1^n+2^n+3^n+4^n$ 一定是 5 的倍数。

8. 设 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x$，求证无论 x 是怎样整数，f(x)都是整数。

9. 若两个正有理数的和与积都是整数，求证，这两个有理数都是整数。

10. 如 x，y，z 均为整数，如果 $7x+2y-5z$ 被 11 整除，求证：$3x-7y+12z$ 也被 11 整除。

11. 设 a，b 是任意给定的整数，试证：$x^2+10ax+5b+3=0$ 没有整数根。

12. 求证：不存在这样的整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_6$ 能满足：

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0\\a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6=6\end{cases}$$

13. 已知四位数 $A=6\square\square8$ 能被 236 整除，求 A 除以 236 的商。

14. 在一个游戏中，“魔术师”请一个人随便想出一个三位数 $\overline{abc}$ 并请此人记下 5 个数 $\overline{acb}$，$\overline{bac}$，$\overline{cab}$，$\overline{bca}$，$\overline{cba}$，把这个 5 个数相加，得和 N，并把这个 N 告诉魔术师，魔术师能根据 N 说出原数 $\overline{abc}$ 是几，请你做魔术师，求出这个数。

15. 一个五位数是一个整数的四次方，且奇数位数码的和等于偶数位整码之和，求这个数。

# 二、不定方程的整数解

《孙子算经》是我国古代的一本数学著作，里面一个著名的“孙子问题”，“今有物，不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二，问物几何？”

这个问题在古代数学史上有不少有趣名称：如“鬼谷算”，“韩信点兵”等等，民间流传的“桃三、李四、橄榄七”，“百鸡问题”也属于这类问题。这一类问题的实质是不定方程的整数解问题。什么是不定方程？一个方程中未知数的个数多于一个时，称这个方程为不定方程，一个不定方程总有无数多个解，如果只讨论求整系数的不定方程的整数解，那么它可能有有限多解，但也可能无解或无穷多解。不定方程一般有二元一次不定方程，三元一次不定方程，二元二次不定方程，二元高次不定方程等等。

**一、二元一次不定方程的整数解**

(1)不定方程未知数系数有公因数 m，而常数项无此公因数 m，那么这个不定方程没有整数解：

如：$3x+6y=10$　　3，6 公约数为 3，而 3 与 10 互质，则无论 x，y 为怎样整数值　$3x+6y=10$ 无整数解。

(2)不定方程　$ax+by=c$，中 x，y 系数 a，b 最大公约数 p 是常数项 c 的约数，那么此不定方程 $ax+by=c$ 必有整数解。

如方程 $18x+5y=1$ 的整数解，∵18 和 5 的最大公约数为 1，1 是 1 的约数∴它有整数解。

当 $x=2, y=-7$ 就是它的一个整数解。

如何求二元一次不定方程的整数解呢？

**1. 辗转相除法**

**例 1**：把 100 分成两个自然数的和，使一个被 7 整除，另一个被 11 整除。

解：设 100 分成 x 个 7，y 个 11，按题意得：

$7x+11y=100$

$\therefore x=\frac{100-11y}{7}=14-y+\frac{2-4y}{7}\cdots\cdots(1)$（x，y 为正整数）

令 $2-4y=7k$　　则 $y=\frac{2-7k}{4}=-2k+\frac{k+2}{4}\cdots\cdots(2)$

令 $k+2=4t$　　则 $k=4t-2\cdots\cdots(3)$

把(3)代入(1)(2)得$\begin{cases}x=11t+8\\y=-7t+4\end{cases}$

∵x,y为正整数∴ $-\frac{8}{11}<t<\frac{4}{7}$

∴当 t=0 时$\begin{cases}x=8\\y=4\end{cases}$

答:100分成两个数分别为56和44。

**例2**:求不定方程 $5x-14y=11$ 的正整数解。

解:$x=\frac{11+14y}{5}=2+2y+\frac{1+4y}{5}$ …(1)(x,y 为正整数)

令 $1+4y=5k$ 则 $y=\frac{5k-1}{4}=k+\frac{k-1}{4}$ …(2)

令 $k-1=4t$ 则 $k=4t+1$ …(3)

把(3)代入(1)(2)得$\begin{cases}x=14t+5\\y=5t+1\end{cases}$

∵$x>0,y>0$ ∴$\begin{cases}14t+5>0\\5t+1>0\end{cases}$∴$t>-\frac{1}{5}$

∴t=0,1,2,3……我们可得无穷多组正整数解。

$\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=19\\y=6\end{cases}$ $\begin{cases}x=33\\y=11\end{cases}$ $\begin{cases}x=47\\y=16\end{cases}$……

其中最小的正整数解为$\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

从上面两个例子,可推广为一般形式:二元一次方程:$ax+by=c$(a,b 互质,c 为整数)求整数解步骤如下:

(1)先用二未知数系数 a,b 中较小一个去除方程各项,解出相应系数较小的一个已知数(不妨设 $a<b$)

$x=\frac{c-by}{a}$

(2)在解出的一未知数表达式中将另一未知数系数和常数项分解成整数部分与分数部分:

$x=b\cdot y+c_1+\frac{c'_1+b'_1y}{a}$ 令$\frac{c'_1+b'_1y}{a}=k$

得到另一个不定方程 $x=b_1\frac{ak-c'_1}{b'_1}+c_1+k$

(3)继续上述方法处理,并设这些式子的分数部分为 $k_1,k_2,\cdots\cdots k_n$,由于相

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com