COMPLEX ANALYSIS

复变函数论

大专高等数学丛书 4

何仁杰

东南大学出版社

大专高等数学丛书

④

复变函数论

何仁杰

东 南 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书包括复变函数论中一些基本概念、基本理论和基本运算，全书共有五章：解析函数，复变函数的积分，级数，留数，保角映射。每章附有思考题和习题。

本书力求少而精，通俗易懂。可作为大专教材，也可作为本科少课时教材。

责任编辑　　吴　旋

复变函数论

何仁杰

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼2号）

南京航空学院飞达印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32　印张 5 7/16　字数 141 千

1991 年 8 月第 1 版　1991 年 8 月第 1 次印刷

印数：1-2000 册

ISBN 7-81023-522-2

O·50　　　　定价：2.90 元

前　　言

本书作为大专教材第四本。在此之前，已经出版《微积分》和《线性代数与概率统计》，这两书以后将改成三本书出版。

本书是在多年使用的讲义基础上修改而成。全书内容少而精，照顾了复变函数论的基本理论和基本运算，又考虑工科需要，同时根据大专实际情况尽可能减少课时，一般可在 30 课时内完成教学（其中保角映射作为选修内容）。在引入新内容时尽量联系微积分已有知识，由浅入深，自然易懂，只要具备微积分基本知识，自学也很容易。在编写时又对照了本科教学大纲，因此虽作为大专教材，也能基本满足本科要求。

本书特请南京大学数学系马吉傅教授审稿，在此表示感谢。

作　　者

1991.6

目　　录

绪　言

18 世纪随着微积分的完善与发展，一个新的数学分支——复变函数论（或称函数论）开始形成。达朗贝尔、欧拉都对此做了不少贡献，如达朗贝尔推出复变函数 $f(z)=p(x,y)+iq(x,y)$可导的充要条件$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}$，$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}$，现在称为柯西–黎曼条件．欧拉用 i 表示$\sqrt{-1}$，并推出公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$，利用复变函数去计算实函数的值．此后高斯引进了复变函数论的一些基本概念，泊松首先沿复平面上的路线进行积分，他们的工作进行到 19 世纪初，这时复变函数论进入全盛时期，柯西、黎曼和维尔斯特拉斯成为复变函数论的三个主要的奠基人，尽管他们研究途径各有不同的思想和方法，但很快柯西和黎曼的思想得到融合，而维尔斯特拉斯的思想可由前两者推导出来，到 20 世纪完成了统一。

从理论上说，复变函数论是微积分学在复数域上的推广，研究方法仍是以极限作为出发点，而研究对象则是以复变数作为自变量的复变函数．在学习中我们可以看到复变函数论中的函数、极限、导数、积分和级数的定义和微积分学中的一些定义非常相象。

实数是复数的特例，复数是实数的推广，加上研究方法的相同，它们在理论与运算中当然有大量相同之处，但是，因为复数运算有其自己的特点，因而形成复变函数特有的运算规律．要学好这些内容，必须细心地比较复变函数论与微积分间的相同处和不同点，避免混淆又能互相借鉴，这是学习中的一个关键．

不能认为实数与复数这一差别似乎不大，事实上这个推广提供了一个阔广的新领域，从而解决了许多微积分所无法解决的运

算和应用．由于本教材对象主要是大专工科学生，所以只涉及一些基础知识．对于有兴趣提高的学生，本书列有少量的参考内容供其自学，用小字和＊号表示．

复变函数论有广泛的应用，限于篇幅不能详细探讨，就是一些粗浅的介绍也只好省略．对于初学者来说，恐怕很难理解虚数 i 会有什么实际意义，但如把复数 $a+ib$ 对应一个平面上的点 (a,b) 或一个平面上的向量 $a\vec{i}+b\vec{j}$，那么复变量 $z=x+iy$ 将对应平面动点或运动中的向量，可以想象这将大大有助于解决不少物理问题，如理论物理、流体动力学、弹性理论和天体力学等，此外在纯粹数学的各个部门如代数、解析数论、微分方程等都有所应用．虽然这些应用在本教材中无法体现，但可以相信，将来随着工作、学习与进修，能逐步体会到这一点．

第一章　解析函数

这一章从复数的基本运算开始，把微积分学中的函数，极限，导数等概念从实数域推广到复数域上去，成为复变函数论的开端。

高等数学研究的对象是变量，所以复变函数论的讨论从复变量 $z=x+iy$ 开始，和复常数 $a+ib$ 中 a、b 是实常数不同，x、y 是实变量．把复变量 $z=x+iy$ 作自变量所建立的函数 $w=f(z)$ 称为复变函数，这就是复变函数论所研究的对象。

在这一章中，我们将定义若干初等复函数如：多项式 $P(z)$，e^z，$\ln z$，$\sin z$ 等由于 $z=x+iy$ 是复数，这些函数虽然形式上和实函数十分相象，但发生了质的变化，除了定义要重新建立外，并且计算的方法也有所不同，我们必须习惯于这些基本运算作为学习这一门课的基础。

和微积分相同，复变函数论的研究方法仍然从使用极限作出发点，随之建立复变函数的导数的概念．从表面上看，定义的方法和求导公式与实函数的导数定义与计算十分相似，实际上复变函数论包含的内容要丰富得多．复变函数 $w=f(z)$ 是否可导的充要条件为柯西-黎曼条件是十分重要的，在随后的讨论中研究对象主要是区域内可导的函数，称为解析函数。

在中学已经学习过复数的基本概念和基本运算，先对这些内容作一些复习和回忆是必要的。

§1　复数及其运算

复数的表示式有三种：即代数表示式 $a+ib$，三角表示式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 和指数表示式 $re^{i\theta}$。其中指数表示式将在下一节

讨论．对于前两种表示式及其运算在中学已经熟悉，故在本节只作总结性复习．

[复数的代数表示式]

对于代数表示式 $z=x+iy$ 作如下说明:

i 是虚数单位，定义为: $i^2=-1$ 或 $i=\sqrt{-1}$;

x 称为复数 z 的实部，记作 $x=\mathrm{Re}\,z$;

y 称为复数 z 的虚部，记作 $y=\mathrm{Im}z$，注意 $\mathrm{Im}z$ 是实数。

这样，$z=x+iy=\mathrm{Re}z+i\ \mathrm{Im}z$。

如 $\mathrm{Im}z=0$，则 $z=\mathrm{Re}z$ 是实数（实数是复数的特例）．

如 $\mathrm{Im}z\neq0$，而 $\mathrm{Re}z=0$，则 $z=i\ \mathrm{Im}z$ 称为纯虚数．

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 的实部与虚部都相等，即

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

称这两复数相等，即 $z_1=z_2$。

两个复数间除相等之外，再无大小之分．

两个实部相等而虚部符号相反的两个复数

$$z=x+iy,\qquad \bar{z}=x-iy$$

称为是共轭的．

[复数的几何表示]

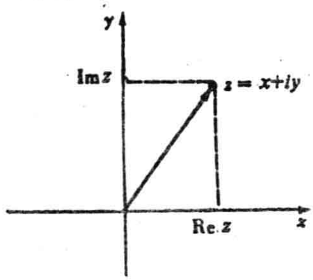

图 1-1 复数的几何表示

复数 $=x+iy$ 与平面直角坐标系上的点(x, y)一一对应，故而把平面上的一点(x, y)作为复数 $z=x+iy$ 的几何表示．此外，复数还可以表示为由原点 $O(0, 0)$ 到点 $M(x, y)$的一个向量$\overline{OM}$．为了方便，今后把"复数 z"与"点 z"和"向量 z"看作是同义的．

在几何表示中如图 1-1，横坐标 $x=\mathrm{Re}z$ 表示复数的实部，纵坐标 $y=\mathrm{Im}z$ 表示复数的虚部，我们称 x 轴为实轴，而 y 轴称为虚轴．实轴与虚轴所在平面叫复平面．今后常把表示复数

$z=x+iy$ 的平面叫 z 平面，表示复数 $w=u+iv$ 的平面叫 w 平面。

应当注意复平面与实平面（用直角坐标系表示）的区别，复平面通常不写原点 O，在许多书上实轴和虚轴不带箭头，甚至不写 x，y。本书照顾习惯仍加箭头和 x、y 需要时加点 O 不过学生应当明确其中的区别。

[复数的三角表示式]

在上述的几何表示中，向量的长度为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，称为复数 z 的模，记作 $|z|$。

实轴正向与向量 z 的夹角 θ 称为复数的幅角，记作 Arg$z$。显然，Arg$z$ 有无限多个值，每两个值之间相差 2π 的整数倍，其中只有一个值 θ 满足 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，这个 θ 叫是 z 的幅角的主值，记作 arg$z$。

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

由于 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=x+iy$，所以

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta+ir\sin\theta \\ &= r\ (\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned}$$

或

$$z=|z|\ (\cos \operatorname{Arg} z+ i\sin \operatorname{Arg} z)$$

这个式子叫复数的三角表示式，又叫极表示式如图 1-2。

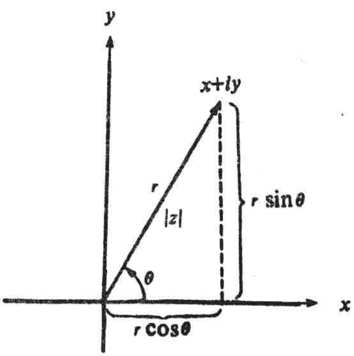

图 1-2　复数的三角表示

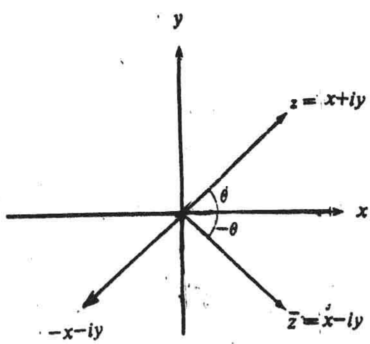

图 1-3　共轭复数

特殊情况是 $x=0$，$y=0$ 时，复数的模 $r=0$ 而幅角 $\operatorname{Arg} z$ 不定。

共轭复数 $\bar{z}=x-iy$

$$=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

可见 $\bar{z}$ 和 z 之间模相等，幅角只差一符号，在复平面上相互对称于实轴(见图 1—3)。

又因 $\quad -z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r[\cos(\pi+\theta)+i\ \sin(\pi+\theta)]$$

其模与 z 的模相同，幅角相差 $\pi+2\pi k$，$-z$ 与 z 在几何表示时方向相反，或者说旋转了角 π 弧度。

[复数的运算]

一、当复数用代数表示时的运算

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 加法与乘法运算法则和多项式的运算法则相同。

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)$$

$$=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$

$$=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

特殊情况，相互共轭的两复数乘积为实数。

设 $z=x+iy$，则

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

复数的倒数

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

除法，可表示为一个复数乘以另一个复数的倒数，即

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=(x_1+iy_1)\frac{x_2-iy_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

两复数的和与差可以表示为两个向量的和与差，见图 1–4。

例 1 $(3+2i)+(1+3i)$

$=4+5i$

$(3+2i)-(1+3i)$

$=2-i$

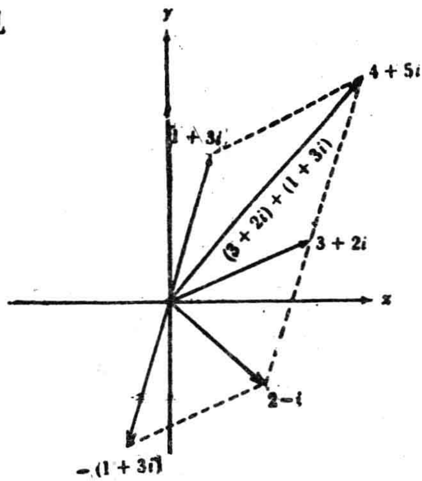

图 1–4 两复数的加减

两复数间虽无大小之分，但是它们的模却是实数，可以比较大小。

根据三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边的性质，可以引出以下两个三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

二、两复数用三角表示式时，加减仍化作代数表示式再计算

$$r_1(\cos\theta_1+i\ \sin\theta_1)\pm r_2(\cos\theta_2+i\ \sin\theta_2)$$

$$=(r_1\cos\theta_1\pm r_2\cos\theta_2)+i(r_1\sin\theta_1\pm r_2\sin\theta_2)$$

但在计算乘除时，复数用三角表示式却较为方便，计算法则见以下定理。

定理 1 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{2}$$

由此还可以推出:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{3}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{4}$$

证明(1)

左边 $=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$=$ 右边

三、复数的乘方与开方

在简单的情况下复数的乘方可以作为乘法而完成。

$(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

$(x+iy)^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

但是通常用三角表示式比较方便。

定理 2 （德·摩维尔公式）如

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$ 是一个正整数，那么

$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

这可由乘法法则推出。

复数的开方虽也可以按代数表示式计算，但只能在简单情况下来做。

例 2 $z^2+i=0$，$z=\pm\sqrt{-i}$

设 $z=x+iy$，$z^2=x^2-y^2+2ixy=-i$

解

$$\begin{cases}x^2-y^2=0\\ 2xy=-1\end{cases}$$

解出 $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$， $z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

但是，复数开方通常化为三角表示式，并按以下定理计算。

定理 3 设 $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，那么 w 的 n 次根是 n 个复数，且

$$z_k=\sqrt[n]{w}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1)$$

由此计算上例，按照 $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

$$z_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\qquad(k=0,1)$$

$k=0$ $\quad z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$;

$k=1$ $\quad z_2=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$。

例 3 解方程 $z^6+1=0$

解 $z^6=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$$

$$(k=0,1,\cdots,5)$$

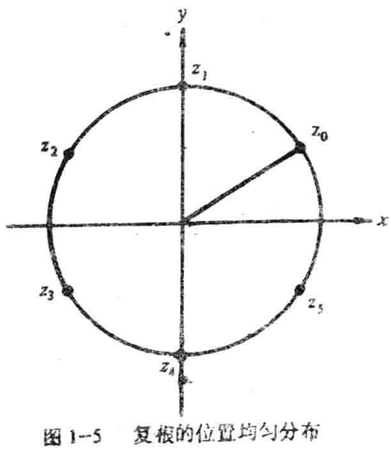

图 1-5 复根的位置均匀分布

可求出 6 个根

$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$z_1=i$; $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$z_4 = -i; \qquad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

从图 1–5 上可以看到这 6 个复根在复平面上的位置均匀地分布在单位圆上。

* 以下的例子说明如何从复数语言表示解析几何

例 4 以复数形式表达直线、圆和椭圆方程。

解 (1) 与两点 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 等距离的点的轨迹:

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

(2) 过一点 $z_0 = x_0 + iy_0$，取方向 $\alpha = a + ib$ 的直线:

$$z = z_0 + \alpha t$$

(3) 以 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为圆心，以 r 为半径的圆:

$$|z - z_0| = r$$

(4) 焦点为 z_1，z_2，半长轴为 a 的椭圆:

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

例 5 利用摩维尔定理把 $\cos 3\theta$ 表示为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的项。

解 $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin\theta$

$$= \cos\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

使实部和虚部分别相等，得

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

例 6 说明下列关系式的几何意义。

(1) $0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$; (2) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$;

(3) $z = a\cos t + ib\sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

解(1) $z = x + iy$, $\quad iz = ix - y$

$\mathrm{Re}(iz) = -y$, $\quad 0 < -y < 1$

即

$$-1<y<0$$

带状区域如图 1-6.

解(2)

$$\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2},\quad \mathrm{Re}\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$$

则

$$x^2+y^2=2x$$

$$(x-y)^2=0,\ x=y$$

$$\therefore\ \frac{x}{2x^2}=\frac{1}{2},\quad x=1,\quad y=1$$

这是一点，即

$$z=1+i$$

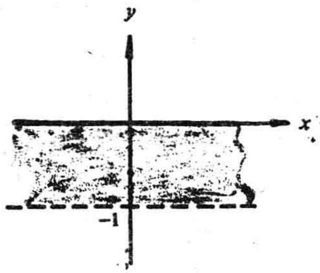

图 1-6　$0<\mathrm{Re}(iz)<1$

解(3)　表示成参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

这是椭圆曲线。

[思考题]

一、复习及证明复数的以下一些性质：

1、共轭复数的主要性质

(1)　$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(2)　$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(3)　$\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$

(4)　$z\bar{z}=|z|^2$

$z^{-1}=\bar{z}/|z|^2\quad(z\neq 0)$

(5)　$\mathrm{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}\qquad \mathrm{I_m}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2}$

(6)　$\bar{\bar{z}}=z$

2、复数模的性质：

(1)　$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

(2)　$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,\ |z_2|\neq 0$

(3)　$-|z|<\mathrm{Re}z<|z|,\quad -|z|<\mathrm{Im}z<|z|$