

# 自守函数与 闵可夫斯基函数

李国平 郭友中 陈银通 著

---

科学出版社

# 自守函数与闵可夫斯基函数

李国平 郭友中 陈银通 著

科学出版社

1979

## 内 容 简 介

本书以作者自己的工作为基础,系统总结了自守函数和闵可夫斯基(Minkowski)函数的理论、应用、推广以及相互关联性。

全书共十章:第一章及第六章介绍正常不连续群、连分数理论和其它预备知识;第二章至第五章分别论述自守函数理论及其在单值化、微分方程、Riemann 边值问题中的应用;第七章至第九章建立实变、复变、Fuchs 群上的 Minkowski 函数理论及其与自守函数的关联性;第十章介绍古典分析数学泛函化的原则以及两种函数在 Banach 空间中的推广。

本书可供数学、物理及力学方面的研究工作者,高等院校师生参考。

## 自守函数与闵可夫斯基函数

李国平 郭友中 陈银通 著

\*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

上海商务印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1979年2月第一版 开本:850×1168 1/32

1979年2月第一次印刷 印张:8 5/8

印数:0001—35,540 字数:224,000

统一书号:13031·879

本社书号:1250·13—1

定 价:1.05 元

## 序

自守函数的一般理论是 Poincaré 和 Klein 在上一世纪的八十年代建立起来的, 最先对 Minkowski 函数进行深刻研究的则是 Denjoy. 这两种函数之间有着密切的内在联系. 单独研究这一理论不但在分析学上来说是重要的, 而且它的发展在单值化理论、微分方程解析理论以及 Riemann 边值问题上都有十分重要的应用, 直接为流体力学和弹性力学用来解决某些工程问题. 因此, 这一学科的研究不唯有它的理论意义而且有它的实用价值.

本书首先介绍自守函数及其在上述各方面的应用, 主要参考文献是 Ford 的书 [2] 和收集在 Darboux 编的 [3] 中的 Poincaré 的著作; 然后, 详细介绍了 Denjoy 的 Minkowski 函数理论及其在微分方程中的应用, 主要参考文献是 Denjoy 的论文 [12~14]. 其中详细的证明迄今尚未发表, 书中现已一一补足; Fuohs 群上的 Minkowski 函数则是著者在这方面研究的开端; 最后, 给出了这两种函数的泛函化, 目的是为古典分析数学在近代物理, 特别是量子场论的应用试辟道路, 以便于物理学工作者掌握古典分析泛函化的方法.

主要工作完成于 1956 年; 为了便于从事这方面工作的同志查考、了解和进行研究工作, 于 1958 年连同这一学科的基本知识汇集册; 接着又作了部分补充、删节和修改. 时辍时续, 谬误不当之处一定很多, 尚祈读者指正.

著 者



# 目 录

序 .....	i
<b>第一章 正常不连续群 .....</b>	<b>1</b>
§ 1. 线性变换群 .....	1
§ 2. 等长圆 .....	2
§ 3. 正常不连续群 .....	7
§ 4. 基域 $R$ .....	12
§ 5. 循环子群 .....	16
§ 6. 正常循环 .....	19
§ 7. 函数群 .....	25
§ 8. Fuchs 群 .....	27
§ 9. 合并法形成正常不连续群 .....	30
<b>第二章 自守函数与准自守函数 .....</b>	<b>32</b>
§ 10. 自守函数 .....	32
§ 11. 简单自守函数 .....	34
§ 12. 简单自守函数的相互关联性 .....	43
§ 13. 简单自守函数与常微分方程的相互关联性 .....	45
§ 14. 准自守函数 .....	49
§ 15. 自守函数的存在性 .....	52
<b>第三章 自守函数与单值化理论 .....</b>	<b>55</b>
§ 16. 基本概念 .....	55
§ 17. Riemann 面拓扑学 .....	56
§ 18. 代数函数的单值化 .....	62
§ 19. 基域的亏格 .....	67
§ 20. 再论代数函数的单值化 .....	68
<b>第四章 自守函数与微分方程 .....</b>	<b>70</b>
§ 21. 微分方程群 .....	75
§ 22. 解函数的反函数 .....	76

§ 23. 微分方程的正规异点 .....	84
§ 24. 有理系数微分方程 .....	89
§ 25. 任意阶微分方程 .....	93
§ 26. Poincaré 定理 .....	96
<b>第五章 自守函数与边值问题</b> .....	<b>99</b>
§ 27. 前言 .....	99
§ 28. 推广的 Plemelj 公式及其推论 .....	99
§ 29. 奇异积分方程与边值问题的相互关联性 .....	107
§ 30. 关于有限群自守函数的边值问题 .....	108
§ 31. 关于无限群自守函数的边值问题 .....	111
§ 32. 一些奇异积分方程的闭合解 .....	113
<b>第六章 连分数解析理论</b> .....	<b>116</b>
§ 33. 连分式 .....	116
§ 34. 连分数的收敛概念 .....	117
§ 35. 普通连分数 .....	118
§ 36. 具零不完全商的连分数 .....	119
§ 37. 双方无限展开式 .....	125
§ 38. 实数的标准连分数展开式 .....	133
<b>第七章 实变 Minkowski 函数</b> .....	<b>140</b>
§ 39. 基本概念 .....	140
§ 40. 反函数 .....	142
§ 41. 线性变换性 .....	144
§ 42. 一种推广 .....	157
§ 43. Minkowski 函数的微分与微分方程 .....	157
<b>第八章 复变 Minkowski 函数</b> .....	<b>167</b>
§ 44. 主要思想与结果 .....	167
§ 45. Schwarz 群与连分数的相互关联性 .....	170
§ 46. 割线集 $\Omega$ 的性质 .....	178
§ 47. 幕通路与渐近分式的相互关联性 .....	184
§ 48. 解析开拓 .....	187
§ 49. 最一般的表写形式 .....	202

<b>第九章 Fuchs 群上的 Minkowski 函数</b> .....	205
§ 50. 一类 Fuchs 群 .....	205
§ 51. 上半平面的割割 .....	209
§ 52. $\mathcal{L}_z$ 通路 与 渐近分式的相互关联性.....	214
§ 53. 梯形区域 $z$ .....	219
§ 54. Minkowski 函数的推广及其与自守函数的相互关联性 .....	223
<b>第十章 Banach 空间中的自守函数与 Minkowski 函数</b> ...	228
§ 55. 前言 .....	228
§ 56. 古典分析数学泛函化 .....	228
§ 57. $\mathcal{A}$ -自守函数 .....	238
§ 58. $\mathcal{A}$ -Minkowski 函数 .....	240
§ 59. $\mathcal{A}$ -微分方程 .....	240
§ 60. $\mathcal{A}$ -积分方程 .....	246
§ 61. 广义函数 .....	248
§ 62. $\mathcal{A}$ -混合量 .....	261
<b>参考文献</b> .....	263
<b>内容索引</b> .....	265

# 第一章 正常不连续群

线性变换在我们的讨论中起着很重要的作用。它的一般性质在 Привалов 的书[1]中已有详细的讨论，本章只对线性变换的等长圆理论加以叙述。等长圆的引入大大简化了 Poincaré 的正常不连续群理论，这便是 Ford 在他的著作[2]中采用的方法。等长圆的原意则是 Whittaker 最先提出来的。

## § 1. 线性变换群

复变量  $z$  与  $z'$  的线性分式变换

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.1)$$

其中  $a, b, c, d$  都是常数,  $ad - bc \neq 0$ , 称为线性变换, 简记作  $S$ 。它的系数所成的方阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

称为变换方阵, 简记作  $(S)$  或  $\mathbf{S}$ ;  $(S)$  对应的行列式称为变换行列式, 简记作  $|(S)|$ 。以  $\pm |(S)|^{\frac{1}{2}}$  来除任一线性变换  $S$  的系数, 就一定可以将变换行列式化为 1。因此我们恒假定:

$$|(S)| = 1. \quad (1.2)$$

这一条件无改于线性变换的一般性。

两个线性变换  $S$  及  $T$ , 它们的乘积  $ST$  定义为:

$$z'' = S(z') = S[T(z)] = ST(z) (\neq TS(z)). \quad (1.3)$$

易知:

$$(ST) = (S)(T); \quad |(ST)| = |(S)| |(T)| = 1.$$

从式(1.1)中解出  $z$ , 则得

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}, \quad (1.4)$$

称为  $S$  的逆变换, 简记作  $S^{-1}$ . 显然

$$|(S^{-1})| = 1.$$

有限或无限个变换形成的一个集合, 假如:

1. 每一个变换的逆变换属于这一集合,
2. 任两个变换的乘积亦属于这一集合,

则称为变换群.

因此, 所有变换行列式为 1 的线性变换依变换乘积合成一个群, 称为线性变换群.

对于线性变换群  $G$  中的任一元素  $S$  (记作  $S \in G$ ), 用一个不属于  $G$  的线性变换  $C$  (记作  $C \notin G$ ), 进行转换

$$S^* \equiv CSC^{-1},$$

可见  $|(S^*)| = |(C)| |(S)| |(C^{-1})| = 1$ .  $S^*$  的全体成为一个群, 称为  $G$  的转换群, 记作  $G^*$ . 显然, 这两个群的元素及它们的乘积均分别一一对应, 所以它们是同构的, 简记作

$$G \simeq G^*.$$

这种转换方法是非常有用的.

对于线性变换群的任一元素, 若存在与之无限接近而不相同的另一元素, 则称为连续群. 不然, 就是不连续群. 不连续群中的特殊一类, 使  $z$  平面上至少存在一点  $z_0$  及一邻域  $V(z_0)$ , 对此一类中的每一元素  $S$  (除恒等变换外), 有  $S(V(z_0)) \not\subseteq V(z_0)$ , 则称这一类为正常不连续群.

正常不连续群是建立自守函数的基础, 后面我们还要详细地讨论.

## § 2. 等长圆

任一线性变换  $S$ ,

$$z' = S(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0, \quad |(S)| = 1,$$

取其微分的绝对值,得

$$|dz'| = \frac{|dz|}{|cz+d|^2}.$$

由此可见,

$$|dz'| = |dz|$$

的充要条件为:

$$|cz+d| = 1. \quad (2.1)$$

这是一个以  $-\frac{d}{c}$  为圆心,  $\frac{1}{|c|}$  为半径的圆, 称为线性变换  $S$  的等长圆, 简记作  $I$ . 变换  $S$  在等长圆上任一点的邻域中, 无改于长度和面积; 在等长圆外任一点的邻域中, 长度和面积缩小; 在等长圆内任一点的邻域中, 长度和面积放大. 这一性质对我们以后的讨论是很重要的.

显然,  $S^{-1}$  的等长圆  $I^{-1}$  为:

$$|cz-a| = 1. \quad (2.2)$$

这是以  $\frac{a}{c}$  为圆心,  $\frac{1}{|c|}$  为半径的圆.

容易证明:  $S$  的等长圆  $I$ , 经  $S$  变换后, 即为  $S^{-1}$  之等长圆  $I^{-1}$ ,  $I$  与  $I^{-1}$  的半径相等, 即

$$S(I) = I^{-1}. \quad (2.3)$$

下面介绍一些等长圆的重要性质.

**1. 线性变换与反形** 根据等长圆的性质, 我们将证明: 每一个线性变换相当于四个反形.

考察线性变换  $S$  及其逆变换  $S^{-1}$  的等长圆  $I$  与  $I^{-1}$  之间的关系.

我们知道任意偶数次反形相当于一个线性变换. 假如有偶数次反形将  $I$  变为  $I^{-1}$ , 并且依公式 (2.3) 互相对应的两点亦相对应, 则它们与线性变换  $S$  全同.

设点  $P \in I$ ,  $S(P) = P^{-1} \in I^{-1}$ ; 对  $I$ ,  $I^{-1}$  适当定向后, 依正向取  $P_1 \in I$ ,  $P_1^{-1} \in I^{-1}$ , 使  $\widehat{PP_1} = \widehat{P^{-1}P_1^{-1}}$ , 则

$$P_1^{-1} = S(P_1).$$

我们证明,  $I$  与  $I^{-1}$  必须反向. 事实上, 如果  $I$  与  $I^{-1}$  同向, 则可由一平移与一旋转(相当于四个反形)使  $I$  与  $I^{-1}$  及它们的各对应点互相重合. 一平移与一旋转之乘积必须以  $\infty$  点为固定点, 故  $S$  须以  $\infty$  点为固定点, 因此  $c=0$ . 这与假设矛盾.

现在从  $I$  与  $I^{-1}$  的相关位置分别来讨论怎样利用反形变换使  $I$  与  $I^{-1}$  重合,  $P$  与  $P^{-1}$  重合, 而方向相反.

(1) 设  $I$  与  $I^{-1}$  不相重合 令  $I$  与  $I^{-1}$  的联心线为  $\Omega$ ,  $\Omega$  的中垂线为  $\Delta$ . 首先,

1. 对  $I$  作反形, 则  $I$  的内域变为  $I$  的外域, 而  $I$  保持不变;
2. 对  $\Delta$  作反形, 则  $I$  变为  $I^{-1}$ , 而方向恰好相反.

令  $P$  为  $I$  与  $\Omega$  的交点,  $S(P) = P^{-1} \in I^{-1}$ ;  $P$  对  $\Delta$  的反形为  $P_*$ . 然后,

3. 对  $I^{-1}$  的圆心作一反向旋转(相当于两个反形)使  $P_*$  与  $P^{-1}$  重合.

若从  $P$  沿  $I$  的正向取另一点  $P_1$ ,  $P_1$  对  $\Delta$  的反形  $P_{1*}$  为自  $P^{-1}$  沿  $I^{-1}$  的反向旋转同一弧长而得的点为  $P_1^{-1} = S(P_1)$ . 因此, 这四个反形与  $S$  全同.

(2) 设  $I$  与  $I^{-1}$  重合 令点  $P \in I$ ,  $P^{-1} = S(P)$ ,  $\Delta$  为  $PP^{-1}$  的中垂线. 于是

1. 对  $I$  作反形, 则  $I$  保持不动;
2. 对  $\Delta$  作反形, 则  $I$  变为同一圆周表示的  $I^{-1}$ , 两者方向相反,  $P$  与  $P^{-1}$  重合.

若从  $P$  沿  $I$  的正向取另一点  $P_1$ , 则  $S(P_1) = P_1^{-1} \in I^{-1}$  与从  $P_1$  沿  $I^{-1}$  的反向旋转同一弧长而得的点重合. 因此, 这两个反形与  $S$  全同.

这一特殊情况在

$$S(z) \equiv \frac{az + b}{cz + d} \quad (|S| = 1)$$

中  $c \neq 0$ ,  $a+d=0$  时发生. 此时,  $S$  的乘数  $k = e^{i\alpha}$ , 故  $S$  为以 2 为周期的椭圆变换.

以上是就等长圆存在, 即  $c \neq 0$  的情况下进行的讨论, 此时所得的特种反形在以后的论证中有着重要的地位, 读者宜加注意.

当  $c=0$  时,  $S$  退化为

$$S(z) \equiv az + b \quad (a \neq 0),$$

相当于四个反形至为显然.

**2.  $I$  与  $I^{-1}$  的关联性** 根据线性变换  $S$  的类型可以阐明  $I$  与  $I^{-1}$  的关系. 从上面的叙述看得出来,  $I$  与  $I^{-1}$  的圆心距离为

$$\left| \frac{a}{c} + \frac{d}{c} \right|, \text{ 半径为 } \frac{1}{|c|}. S \text{ 的乘数 } k \text{ 为方程}$$

$$k + 1/k = (a+d)^2 - 2$$

所决定. 因此, 有下列判断:

1.  $S$  为双曲型时,  $k = u$  (实数  $\neq 1$ ),  $(a+d)$  为实数,  $|a+d| > 2$ ,  $I$  与  $I^{-1}$  不相交, 固定点不能在  $I$  及  $I^{-1}$  上, 亦不能同时在  $I$  或  $I^{-1}$  之内或之外;

2.  $S$  为椭圆型时,  $k = e^{i\theta}$ ,  $(a+b)$  为实数,  $|a+d| < 2$ ,  $I$  与  $I^{-1}$  相交, 固定点即  $I$  与  $I^{-1}$  之交界;

3.  $S$  为抛物型时,  $k = 1$ ,  $|a+d| = 2$ ,  $I$  与  $I^{-1}$  相切, 固定点即  $I$  与  $I^{-1}$  之切点;

4.  $S$  为混合型时,  $k = ue^{i\theta}$  ( $u \neq 1$ ),  $(a+d)$  为复数,  $I$  与  $I^{-1}$  之相关位置可以具有前面三种性质之一, 但因存在绕  $I^{-1}$  的旋转, 固定点不能在  $I$  或  $I^{-1}$  之上, 亦不能同在  $I$  或  $I^{-1}$  之内或之外.

现在我们来说明  $I$  与  $I^{-1}$  的联心线与  $I$ ,  $I^{-1}$  的交点  $P$  与  $P_*$  以及  $S(P) = P^{-1}$  的坐标  $z$ ,  $z_*$  及  $z'$  之间的关系. 因为  $-d/c$ ,  $z$ ,  $z_*$ ,  $a/c$  顺次在联心线上, 因此:

$$z + \frac{d}{c} = \frac{a+d}{|a+d|c}; \quad (2.4)$$

$$z_* - \frac{a}{c} = -\frac{a+d}{|a+d|c}. \quad (2.5)$$

但是

$$z' - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c^2 \left( z + \frac{d}{c} \right)}, \quad (2.6)$$

所以

$$z' - \frac{a}{c} = -\frac{|a+d|}{(a+d)c} = -\frac{\bar{a}+\bar{d}}{|a+d|c}. \quad (2.7)$$

由此可见,  $P_*$  与  $P^{-1}$  重合的充要条件为:

$$a+d = \bar{a} + \bar{d},$$

亦即  $a+d$  为实数.

总结上述, 可知:

$P_*$  与  $P^{-1}$  相重的充要条件是  $S$  ( $c \neq 0$ ) 不是混合型变换; 当  $S$  为混合型变换时  $P_*$  与  $P^{-1}$  不相重.

由

$$z' - \frac{a}{c} = \frac{\bar{a} + \bar{d}}{a+d} \left( z_* - \frac{a}{c} \right) = e^{-2i\varphi} \left( z_* - \frac{a}{c} \right)$$

知

$$-2\varphi = 2 \arg(a+d) \quad (2.8)$$

是绕  $I^{-1}$  的圆心使  $P_*$  与  $P^{-1}$  重合所应转动的角度.

**3.  $z, z'$  与  $I, I^{-1}$  之间的关系** 我们讨论  $S$  不是混合型变换的情况. 圆心在  $I$  与  $I^{-1}$  的联心线的中垂线上, 且与  $I$  (及  $I^{-1}$ ) 正交的单参数圆族  $\{Q\}$  对于非混合型变换  $S$  是不变的, 这种圆  $Q$  称为  $S$  的固定圆. 对此, 我们可以证明:

非混合型线性变换  $S$  ( $c \neq 0$ ), 以  $q$  记  $S$  的任一固定圆  $Q$  的圆心, 令  $h \equiv |q-z|$ ,  $h' \equiv |q-z'|$ ,  $z' \equiv S(z)$ , 于是

1.  $h' = h$ , 如果  $z$  在  $I$  或  $Q$  上;
2.  $h' < h$ , 如果  $z$  在  $I$  及  $Q$  内或外;
3.  $h' > h$ , 如果  $z$  在  $I$  内,  $Q$  外或  $I$  外  $Q$  内.

不失一般性, 我们可以改变  $I$  的位置与大小, 使  $I$  的方程为

$$z\bar{z} = 1; \quad (2.9)$$

$Q$  的方程为

$$(z-q)(\bar{z}-q) = r^2, \quad (2.10)$$

即  $q$  在实轴上, 见图 1. 由于  $I$  与  $Q$  正交,

$$r^2 + 1 = q^2.$$

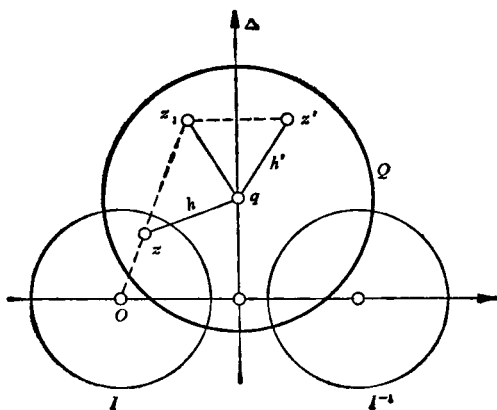


图 1

所以  $Q$  的方程可改写为

$$z\bar{z} - q(z + \bar{z}) + 1 = 0,$$

但,

$$h^2 = (z - q)(\bar{z} - q) = z\bar{z} - q(z + \bar{z}) + 1 + r^2; \quad (2.11)$$

记  $z$  对  $I$  的反形为  $z_1$ ,

$$z_1 = \frac{1}{z},$$

于是

$$\begin{aligned} h'^2 &= z_1\bar{z}_1 - q(z_1 + \bar{z}_1) + 1 + r^2 \\ &= \frac{1 - q(\bar{z} + z) + z\bar{z}}{z\bar{z}} + r^2; \end{aligned} \quad (2.12)$$

因此,

$$h^2 - h'^2 = \frac{[z\bar{z} - 1][z\bar{z} - q(z + \bar{z}) + 1]}{z\bar{z}}. \quad (2.13)$$

由此立刻可得上述判断的证明。

### § 3. 正常不连续群

在 § 1 中我们定义了线性变换的正常不连续群, 现在, 我们要用等长圆的性质来讨论这一理论。

**1. 正常不连续群的基域** 我们用记号  $\mathcal{G}$  表示一个正常不连续群,  $z$  平面上的图形  $D$  (点、线、集合、区域等), 经任一变换  $S \in \mathcal{G}$  而得的图形  $S(D)$  称为  $D$  关于  $\mathcal{G}$  的等同图形.

$z$  平面的任何区域  $\Omega$  (连通的或不连通的) 称为  $\mathcal{G}$  的基域, 如果

1.  $\Omega$  内任何两点均不等同;
2.  $\Omega$  的每一界点的充分小邻域内都有  $\Omega$  内点的等同点.

显然,  $\mathcal{G}$  的基域的等同图形也是  $\mathcal{G}$  的基域.

对于正常不连续群  $\mathcal{G}$ , 由定义知道, 存在  $z_0$  及  $V(z_0)$ , 使任一  $S \in \mathcal{G}$ , 有  $S(V(z_0)) \subseteq V(z_0)$ . 将  $V(z_0)$  尽量扩大, 保持基域性质 1, 至不能再扩大为止, 则此最大区域, 记作  $W(z_0)$ . 它的界点具有基域性质 2. 所以  $W(z_0)$  即  $\mathcal{G}$  的基域. 由此可见  $\mathcal{G}$  的基域确实存在.

我们可以证明:

若  $\Omega$  为  $z$  平面上的一个区域, 其中任何两点均不等同 (关于  $\mathcal{G}$ ), 则  $\Omega$  之任意两个等同 (相应于  $\mathcal{G}$  中两个变换的等同) 图形必不互相重叠.

设  $S, S' \in \mathcal{G}, S \neq S'$ . 假如  $S(\Omega)$  与  $S'(\Omega)$  互相重叠, 即有一点  $z^* = S(z) = S'(z')$ .  $z, z' \in \Omega$ , 则

$$z' = S'^{-1}(z^*) = S'^{-1}S(z).$$

由于  $S'^{-1}S = 1$ , 所以  $z$  与  $z'$  等同 (关于  $\mathcal{G}$ ). 与  $\Omega$  的条件矛盾, 证完.

由此推得基域的基本性质:

正常不连续群的基域及其等同图形互不重叠. 由此显见, 正常不连续群的群元成一可数集.

**2. 群的等长圆** 群元的等长圆对于基域的构造有着决定性的意义. 因此, 必须对群  $\mathcal{G}$  施行转换, 使之成为  $\mathcal{G}^*$ ,  $\mathcal{G}^*$  中每一变换 (除恒等变换外) 均有等长圆. 为此必需使得每一变换都具有

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

的形式, 其中  $|(S)|=1$ ,  $c \neq 0$ , 亦即不以  $\infty$  点为固定点. 利用等长圆的性质构造  $\mathcal{G}^*$  的基域, 再转化为  $\mathcal{G}$  的基域.

具体地说, 我们可以利用线性变换  $C(z) \equiv 1/(z-z_0)$  将  $z_0$  变为  $\infty$  点, 将  $\mathcal{G}$  变为  $\mathcal{G}^* = C\mathcal{G}C^{-1}$ . 此时  $\infty$  点就不可能成为  $\mathcal{G}^*$  中任一非恒等变换的固定点, 且  $\infty$  点有一邻域  $V(\infty)$  没有关于  $\mathcal{G}^*$  的等同点, 故  $\mathcal{G}^*$  中除恒等变换外的每一变换均有等长圆. 如果已知  $\mathcal{G}^*$  的基域为  $\Omega^*$ , 则  $\mathcal{G}$  的基域  $\Omega = C^{-1}(\Omega^*)$ .

为了避免符号混变, 我们认为下面谈到的  $\mathcal{G}$  均已经过上述转换. 因此,  $\infty$  点的邻域  $V(\infty)$  中没有两点是等同的,  $V(\infty)$  的点关于  $\mathcal{G}$  的等同点均在圆  $|z| < \rho$  内. 注意, 此时除以 2 为周期的椭变换的正、逆两群之外,  $\mathcal{G}$  中任何两个不同的变换均不可能有相同的等长圆.

我们首先考察任意两个变换

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

于是

$$ST(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}, \quad (3.1)$$

其中  $|(T)| = |(S)| = 1$ ,  $|(ST)| = 1$ .

$T, T^{-1}, S, S^{-1}, ST$  的等长圆分别记作:  $I_T, I_T', I_S, I_S', I_{ST}$ , 等长圆心分别记作:  $g_T, g_T', g_S, g_S', g_{ST}$ ; 等长圆半径分别记作:  $r_T, r_T', r_S, r_S', r_{ST}$ . 于是

$$\begin{aligned} g_T &= -\frac{d}{c}, & r_T &= \frac{1}{|c|}; \\ g_T' &= \frac{a}{c}, & r_T' &= \frac{1}{|c|}; \\ g_S &= -\frac{\delta}{\gamma}, & r_S &= \frac{1}{|\gamma|}; \\ g_S' &= \frac{\alpha}{\gamma}, & r_S' &= \frac{1}{|\gamma|}; \\ -g_{ST} &= \frac{\gamma b + \delta d}{\gamma a + \delta c}, & r_{ST} &= \frac{1}{|\gamma a + \delta c|} = \frac{r_S r_T}{|g_T' - g_S|}. \end{aligned}$$