核函数法及有限基本解
数值计算方法

南京航空学院

1983.2.

核函数法及有限基本解数值计算方法

目　录

第四章　计算亚音速非定常机翼载荷分布的偶极子网格法

第一章　空气动力线化理论基础

§1-1　非定常位流的线化方程

一、运动坐标系中的非定常位流线化方程

这里所谓的运动坐标系是指固连于运动物体（它以速度V_∞沿负X轴方向运动）上的直角坐标系，或者说成是相对于无穷远处的流体以速度V_∞沿负X轴方向运动的直角坐标系。

在小扰动条件下，与定常位流线化方程的推导类似，略去非一阶项后，得

$$\left(1-\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-2\frac{V_\infty}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (1-1-1)$$

这就是运动坐标系中的非定常位流线化方程，它是大多数非定常机翼（包括亚音速及超音速的）理论的基本方程，(1-1-1)式中的V_∞为未经扰动的直匀流的速度，a_∞是未经扰动的直匀流中的音速，φ为扰动速度位。φ与速度位Φ的关系以矢量形式表示为

$$\nabla\varphi = q-\vec{V}_\infty=\nabla\Phi-\vec{V}_\infty$$

我们可以把扰动速度位当作是物体浸没在直匀来流（以速度V_∞沿正X轴方向运动）中所产生的小扰动速度位（这是因为对于一个固定在运动坐标系上的观察者来说，无穷远处的流体具有沿正X轴方向的速度V_∞），也可认为是物体以速度V_∞沿负X轴方向运动而在静止流体中所产生的小扰动速度位。

二、固定坐标系中的非定常位流线化方程

这里所谓的固定坐标系是指固定于空间的直角坐标系，或者说成是和无穷远处流体没有相对运动的坐标系，在图1-1-1中，固定坐标系用ξ，η，ζ来表示。

对于运动坐标系，扰动速度位φ（X，y，t）的线化方程已由（1-1-1）式给出，而固定坐标系中的非定常位流线化方程可

以用伽里略变换（参见图 1-1-1）

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \xi + Vt \\
y &= \eta \\
z &= \zeta \\
t &= t
\end{aligned}\right\} \qquad (1-1-2)
$$

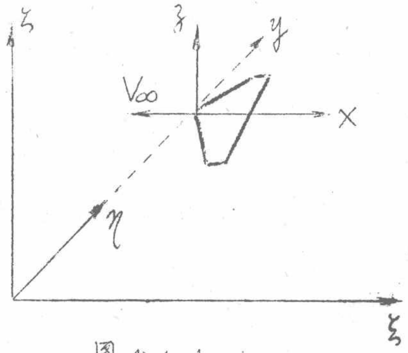

图 1-1-1

将（1-1-1）式加以变换后得到。

在固定坐标系中

$$\varphi = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)$$

因此，由（1-1-2）式，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = \left(-V_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = V_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - 2V_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(-V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -V_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial t}$$

将以上诸式代入（1-1-1）式，得

$$\square^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (1-1-3)$$

这就是在固定坐标系中，因物体在静止流体中运动而引起的扰动速度位所应满足的方程，它的形式与声学中的波动方程完全一样。所以线化空气动力学可以看作是声学的一个分支，并且用来研究波动传播的方法也可直接用于线化气流。

§1—2 加速度位和加速度位的线化方程

正压流体的欧拉运动方程可写成

$$\frac{D\vec{q}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla\int\frac{dp}{\rho} \qquad (1-2-1)$$

上式表明加速度矢量 $D\vec{q}/Dt$ 是一个标量的梯度。因此 $D\vec{q}/Dt$ 可以从一个标量函数 $\Omega(x, y, z, t)$ 中导出，

$$\frac{D\vec{q}}{Dt}=\nabla\Omega \qquad (1-2-2)$$

这与 $\quad \vec{q}=\nabla\varphi$

相仿，于是 Ω 被称为加速度位，将（1-2-2）式代入（1-2-1）式，积分后得到

$$\Omega=-\int\frac{dp}{\rho}+G(t) \qquad (1-2-3)$$

式中 $G(t)$ 是一个时间函数，在无穷远处的条件没有变化时，它是一个纯粹的常数。

在小扰动条件下，（1-2-3）式可以进一步简化，由于是小扰动，我们可写出

$$\rho=\rho_\infty+\rho', \qquad p=p_\infty+p'$$

式中 p、ρ 为局部压强和局部密度，p_∞，ρ_∞ 是未扰动流场中的压强和密度，p'、ρ' 表示扰动压强和扰动密度，p' 和 ρ' 都是微量，

由（1-2-3）式，取在 p_∞ 时的 Ω 为零，我们有

$$\Omega=-\int_{p_\infty}^{p}\frac{dp}{\rho}=-\int_{p_\infty}^{p_\infty+p'}\frac{dp}{\rho}\doteq-\int_0^{p'}\frac{dp'}{\rho_\infty(1+\rho'/\rho_\infty)}$$

$$=-\int_0^{p'}\frac{dp'}{\rho_\infty}\left[1-\frac{\rho'}{\rho_\infty}+\left(\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^2+\cdots\right]$$

略去一阶及以上微量后，我们得到

$$\Omega=-\frac{p'}{\rho_\infty} \qquad (1-2-4)$$

上式表明加速度位 Ω 与流体中的扰动压强成正比。

设 $\vec{q}=\nabla\phi$，则（1-2-2）式可写成

$$\frac{D}{Dt}\nabla\phi=\nabla\Omega$$

在小扰动条件下

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{q}\cdot\nabla\approx\frac{\partial}{\partial t}+V_\infty\frac{\partial}{\partial x}$$

于是

$$\frac{D}{Dt}\nabla\phi\approx\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_\infty\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla\phi=\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+V_\infty\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

因此，我们得到

$$\Omega=\frac{\partial\phi}{\partial t}+V_\infty\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (1-2-5)$$

这就是小扰动条件下加速度位 Ω 与速度位 ϕ 之间关系式。

除了升力面位置以外，压强及加速度位是到处连续的，但是对于超音速气流，在马赫锥表面上也可能不连续。如果尾迹被理想地认为是没有厚度的面，则在越过这个面时，速度位是不连续的，而加速度位是连续的。在把加速度位用于机翼理论时，这一优点是很重要的。

下面来推导线化流场中的加速度位方程。

取一个固定坐标系，并且只考虑小扰动情况。因为是小扰动，所以扰动速度分量或它们对空间，时间的导数的平方及高次方比之它们的一次方都可以略去不计。令 p_∞、ρ_∞ 为未经扰动前流体的压强和密度，p'、ρ' 为扰动压强和密度，u'、v'、w' 表示扰动速度分量，于是欧拉运动方程和连续方程可分别线化成为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial p'}{\partial \xi}\\ \frac{\partial v'}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial p'}{\partial \eta}\\ \frac{\partial w'}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial p'}{\partial \zeta}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2\text{-}6)$$

及

$$\rho_\infty\left(\frac{\partial u'}{\partial \xi}+\frac{\partial v'}{\partial \eta}+\frac{\partial w'}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial \rho'}{\partial t}=0\qquad(1\text{-}2\text{-}7)$$

先将（1-2-6）中的三个式子分别对 ξ、η、ζ 微分，并将式（1-2-7）对 t 微分，然后消去 $\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial \xi\partial t}+\frac{\partial^2 v'}{\partial \eta\partial t}+\frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta\partial t}\right)$，我们得到

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}=0\qquad(1\text{-}2\text{-}8)$$

对于正压流体，如果我们写出

$$\frac{p'}{\rho'}=\frac{dp}{d\rho}=a^2$$

在小扰动条件下

$$\begin{aligned}a^2=\frac{dp}{d\rho}&=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho'=0}+\rho'\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho'=0}+\cdots\\ &=a_\infty^2+0(\rho')\end{aligned}$$

如果略去一阶和以上高阶项，则式（1-2-8）成为

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial \zeta^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=0\qquad(1\text{-}2\text{-}9)$$

式中a_∞是声波在未经扰动前流体中的传播速度。

由于加速度位同扰动压强p'成正比，因而加速度位Ω是由同一方程所确定的

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}=0 \qquad (1-2-10)$$

上式亦可写成

$$a_\infty^2 \nabla^2 \Omega=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \qquad (1-2-11)$$

这就是固定坐标系中的加速度位的线化方程。

运动坐标系中的加速度位的线化方程可以用伽里略变换

$$\xi=x-V_\infty t, \quad \eta=y, \quad \zeta=z, \quad t=t \qquad (1-2-12)$$

将（1-2-10）式加以变换后得到，由（1-2-12）式，有

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}=\left(V_\infty\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Omega=V_\infty^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}+2V_\infty\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}.$$

将以上诸式代入（1-2-10）式，得

$$\left(1-\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\right)\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}-2\frac{V_\infty}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}=0 \qquad (1-2-13)$$

这就是运动坐标系中的加速度位的线化方程。

§1-3 非定常线化小扰动位流方程的基本解

我们已导得坐标系固定在运动物体上的非定常小扰动速位方程为：

$$\left(1-\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-2\frac{V_\infty}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \quad (1-3-1)$$

当运动物体的速度（或来流速度）$V_\infty=0$ 时，或通过如下坐标变换

$$x=\xi+V_\infty t,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,\quad t=t \quad (1-3-2)$$

都可将（1-3-1）式变换成坐标系固定在空间上的非定常小扰动位流方程为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \zeta^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}=0 \quad (1-3-3)$$

因此，方程（1-3-1）的基本解可从方程（1-3-3）变换得，大家知道方程（1-3-3）是波动方程，它的基本解可从工程数学课程中所导得的基尔霍夫公式求得：

一、基尔霍夫公式和固定坐标系下非定常源和非定常偶极子

在工程数学导得空间波动方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{a_\infty^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$ 的基尔霍夫解式为

$$\varphi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{a_\infty r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}ds \quad (1-3-4)$$

式中 n 是界面 S 的外法线方向，[ ] 符号表示函数在 $t-\frac{r}{a_\infty}$ 时之值。（1-3-4）式表明 t 时刻流场中点（x,y,z）之 φ 值取决于界面 S 上在 $t-\frac{r}{a_\infty}$ 时刻之 φ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 值，也就是说界面 S 在时刻 $t-\frac{r}{a_\infty}$ 所发出的扰动，在时刻 t 才传到点（x,y,z），这里考虑到扰动传播时间 $\tau=\frac{r}{a_\infty}$。

将（1-3-4）式与定常流中格林公式相比较，可知式（1-3-4）所表示的基本解乃是非定常源和非定常偶极子，它们分别为：

$$\varphi_{源}=-\frac{1}{4\pi r}f\left(t-\frac{r}{a_\infty}\right) \tag{1-3-5}$$

$$\varphi_{偶}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}\dot{f}\left(t-\frac{r}{a_\infty}\right)\right] \tag{1-3-6}$$

式中 r 是位于点（ξ，η；ζ）的源或偶极子到点（x，y，z）的距离。

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

源和偶极子的强度均为任意的，由函数 $f(t)$ 给定，基本解非定常源表示在静止介质中从一扰动源所发出的球面波。

对随时间作周期性振动所谓谐振的非定常运动，φ 可表示为：

$$\varphi=\varphi^* e^{i\omega t} \tag{1-3-7}$$

式中 φ^* 为简谐振动速位幅值，幅角 ωt 中的 ω 为谐振频率（弧度/秒）。将（1-3-7）式代入上述空间波动方程得谐振速位幅值满足如下方程：

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial z^2}+k^2\varphi^*=0 \tag{1-3-8}$$

式中 $k=\omega/a_\infty$ 为减缩频率

（1-3-8）式的积分解式，所谓海尔霍姆兹解式，可从基尔霍夫解式（1-3-4）导得，这时（1-3-4）式中的

$$\left.\begin{aligned}
[\varphi]&=\varphi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a_\infty}\right)=\varphi^*(\xi,\eta,\zeta)e^{i\omega\left(t-\frac{r}{a_\infty}\right)}\\
&=\varphi^*(\xi,\eta,\zeta)e^{i(\omega t-kr)}\\
\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]&=\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}e^{i(\omega t-kr)}\\
\frac{1}{a_\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]&=i\left(\frac{\omega}{a_\infty}\right)\varphi^* e^{i(\omega t-kr)}=ik\varphi^* e^{i(\omega t-kr)}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3-9}$$

将（1-3-9）式代入（1-3-4）式得：

$$\varphi^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}-\varphi^*\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right]dS \quad (1-3-10)$$

从（1-3-10）式可见，作为谐振非定常运动的基本解的非定常源和非定常偶极子的速位幅值分别为：

$$\left.\begin{aligned}\varphi^*_{源}&=-\frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}\\ \varphi^*_{偶}&=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}e^{-ikr}\right]\end{aligned}\right\} \quad (1-3-11)$$

二、在固定坐标系下运动的非定常源和非定常偶极子的扰动速位

方程（1-3-1）的基本解可以用运动的非定常源和非定常偶极子来表示。

假设源沿负X轴以速度 V_∞ 运动，则源在每时刻 τ 的坐标为：

$$\xi=-V_\infty\tau\ ,\ \eta=0\ ,\ \zeta=0 \quad (1-3-12)$$

因此，在 $\tau=-\infty$ 时，源位于 $\xi=\infty$ 处，而当 $\tau=0$ 时，源则位于原点，因此，源在每一时刻 τ 与流场中点（x,y,z）的距离为

$$r=\sqrt{(x+V\tau)^2+y^2+z^2} \quad (1-3-13)$$

源在 τ 时刻所发出的扰动，点（x,y,z）在 t 时刻是不是能感受到，要看时刻 τ 和扰动从源位置传播到点（x,y,z）所需时间 $\frac{r}{a_\infty}$ 之和是不是等于 t 而定，如果 $t=\tau+\frac{r}{a_\infty}$，则点（$x,y,z$）在 t 时刻就能感受到 τ 时刻源的扰动，否则如果 $t\neq\tau+\frac{r}{a_\infty}$，则不能感受到，因此，（1-3-5）式源的强度 $f(t)$ 可以用一脉冲函数 $\delta(t-(\tau+\frac{r}{a_\infty}))$ 与函数 $f(\tau)$ 的乘积来表示，即 $f(\tau)\delta(t-\tau-\frac{r}{a_\infty})$

因为脉冲函数δ具有如下特性：

$$\delta(x)=0 \qquad (当 x \neq 0) \tag{1-3-14}$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)dx=1 \qquad (当 \epsilon\to 0) \tag{1-3-15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0) \tag{1-3-16}$$

显然，这些特性是符合上述要求的，因此，在时刻t之前所有各时刻τ的源在时刻t对点(x, y, z)的总扰动速位为：

$$\varphi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a_\infty}}\frac{f(\tau)}{r}\delta\left(t-\tau-\frac{r}{a_\infty}\right)d\tau \tag{1-3-17}$$

根据脉冲函数特性（1-3-14）式，上式中的被积函数只当

$$t=\tau+\frac{r}{a_\infty} 时即$$

$$t-\tau=\frac{r}{a_\infty}=\frac{1}{a_\infty}\sqrt{(x-U\tau)^2+y^2+z^2} \tag{1-3-18}$$

时才不等于零。积分下限之所以取为$-\infty$是表明源位置是从$\xi=-U\tau=-\infty$开始的。

令（1-3-17）式中的

$$t-\tau-\frac{r}{a_\infty}=-\theta \tag{1-3-19}$$

并将（1-3-17）式改写成：

$$\varphi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a_\infty}}\frac{f(\tau)}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\delta(-\theta)d\theta$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\delta(-\theta)d\theta \tag{1-3-20}$$

（1-3-20）式的上限之所以能伸展到∞是因为在$\tau>t-\frac{r}{a_\infty}$时被积函数为零之故。

根据脉冲函数特性（1-3-16）式 上式可写成

$$\varphi(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{f(\tau)}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\right]_{\theta=0} \tag{1-3-21}$$

令（1-3-19）式中的 $\theta=0$ 得

$$r\Big|_{\theta=0}=a_\infty(t-\tau) \tag{1-3-22}$$

由（1-3-18）式得：

$$a_\infty(t-\tau)=\sqrt{(x+V_\infty\tau)^2+y^2+z^2}$$

即 $$\tau^2(1-M_\infty^2)-\left(2t+2x\frac{U}{a_\infty^2}\right)\tau+t^2-\frac{1}{a_\infty^2}(x^2+y^2+z^2)=0 \tag{1-3-23}$$

（1-3-23）式是一个关于 τ 的二次方程，它的解为：

$$\tau=\frac{2\left(t+\frac{xV_\infty}{a_\infty^2}\right)}{2\beta^2}\pm\frac{4\left(t+\frac{xV_\infty}{a_\infty^2}\right)^2+\frac{4\beta^2}{a_\infty^2}(x^2+y^2+z^2)-4\beta^2t^2}{2\beta^2}$$

$$=\frac{1}{\beta^2}\left[\left(t+\frac{xV_\infty}{a_\infty^2}\right)\pm\frac{1}{a_\infty}\sqrt{(x+V_\infty t)^2+\beta^2(y^2+z^2)}\right] \tag{1-3-24}$$

由于 τ 必须小于 t 故只能取上式根号前的负号即

$$\tau=\frac{1}{\beta^2}\left(t+\frac{xV_\infty}{a_\infty^2}-\frac{R}{a_\infty}\right) \tag{1-3-25}$$

式中令 $R=\sqrt{(x+V_\infty t)^2+\beta^2(y^2+z^2)}$ (1-3-26)

从（1-3-19）式得：

$$-\frac{d\tau}{d\theta}-\frac{1}{a_\infty}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\tau}{d\theta}=-1 \tag{1-3-27}$$

根据（1-3-18）式：

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{V_\infty(x+V_\infty\tau)}{\sqrt{(x+V_\infty\tau)^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{r}\left[V_\infty(x+V_\infty\tau)\right] \tag{1-3-28}$$

将（1-3-28）式代入（1-3-27）式得

$$\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{a_\infty}{a_\infty+\frac{dr}{d\tau}}=\frac{ra_\infty}{ra_\infty+V_\infty(x+U\tau)}\ .$$

故
$$\frac{1}{r}\frac{d\tau}{d\theta}=\frac{a_\infty}{ra_\infty+V_\infty(x+V_\infty\tau)}\ . \qquad (1\text{-}3\text{-}29)$$

将（1-3-22）式代入上式得 $\theta=0$ 时 $\left(\frac{1}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ 之值为：

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\right)_{\theta=0}=\frac{1}{a_\infty\left[\tau(M_\infty^2-1)+\frac{M_\infty x}{a_\infty}+t\right]}$$

将（1-3-25）式之τ值代入上式得：

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d\tau}{d\theta}\right)_{\theta=0}=\frac{1}{R} \qquad (1\text{-}3\text{-}30)$$

将（1-3-25）和（1-3-30）式代入（1-3-21）式得运动源在固定坐标系下对流场中点（x，y，z）的扰动速位为：

$$\varphi_{源}(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi R}f\left[\left(t+\frac{V_\infty x}{a_\infty^2}-\frac{R}{a_\infty}\right)\frac{1}{\beta^2}\right] \qquad (1\text{-}3\text{-}31)$$

相应的运动偶极子的扰动速位，可将（1-3-31）式沿偶极轴方向n微分而得：

$$\varphi_{偶}(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{R}f\left[\left(t+\frac{V_\infty x}{a_\infty^2}-\frac{R}{a_\infty}\right)\frac{1}{\beta^2}\right]\right] \qquad (1\text{-}3\text{-}32)$$

三、坐标系与非定常源，偶极子一起运动时非定常源和偶极子的扰动速位

式（1-3-31）和（1-3-32）是对固定坐标系而言的。如坐标系与源一起以速度 V_∞ 沿负x运动，则称它为运动坐标系，设源在该运动坐标系的坐标为（ξ_0，η_0，ζ_0），流场中某点P相对该运动坐标系的坐标为（x_0，y_0，z_0），则固定坐标系与此运动坐标系

之间的关系可表示为，见图1-3-1。

$$y=y_0-\eta_0 \;,\quad z=z_0-\zeta_0 \;,\quad x+Ut=x_0-\xi_0 \qquad (1\text{-}3\text{-}33)$$

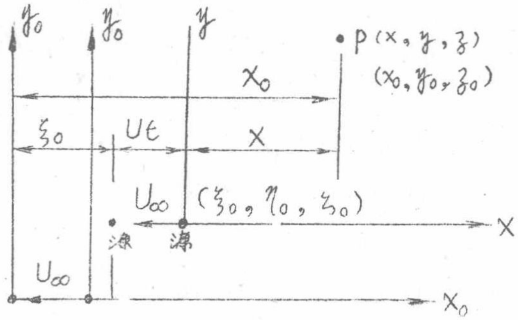

图 1-3-1

1.）亚音速非定常源和偶极子

将（1-3-33）式代入（1-3-31）式得在运动坐标系下运动源的扰动速位为：

$$\varphi_{源}(x_0,y_0,z_0,t)=-\frac{1}{4\pi R}f\left[\left(t+\frac{V_\infty(x_0-\xi_0)-V_\infty^2 t}{a_\infty^2}-\frac{R}{a_\infty}\right)\frac{1}{\beta^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi R}f\left[\frac{t}{\beta^2}+\frac{M_\infty(x_0-\xi_0)}{a_\infty\beta^2}-\frac{M_\infty^2 t}{\beta^2}-\frac{R}{a_\infty\beta^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi R}f\left[t+\frac{M_\infty(x_0-\xi_0)}{a_\infty\beta^2}-\frac{R}{a_\infty\beta^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{4\pi R}f(t-\tau_1) \qquad (1\text{-}3\text{-}34)$$

式中令 $$\tau_1=\frac{-M_\infty(x_0-\xi_0)+R}{a_\infty\beta^2}=\frac{D}{a_\infty} \qquad (1\text{-}3\text{-}35)$$

这里令 $$D=\frac{-M_\infty(x_0-\xi_0)+R}{\beta^2}$$

由于 $$R=\sqrt{(x+V_\infty t)^2+\beta^2(y^2+z^2)}=\sqrt{(x_0-\xi_0)^2+\beta^2[(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2}$$

因此
$$D=\frac{-M_\infty(x_0-\xi_0)+\sqrt{(x_0-\xi_0)^2+\beta^2\left[(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2\right]}}{\beta^2} \tag{1-3-36}$$

比较（1-3-5）式和（1-3-34）式可见，方程（1-3-1）的运动源基本解可通过将波动方程（1-3-3）的固定源基本解（1-3-5）式中的半径 r：在幅值处用 R 来代替，在相位处用 D 来代替。因此，R 称为幅值半径，D 称为相位半径。（1-3-34）式表明，点 (x_0, y_0, z_0) 在 t 时刻的扰动速位决定于源在较 t 早 τ_1 时刻所发出的扰动强度。

为了说明 D 和 R 的物理意义，我们利用图 1-3-2 来作一个几何解释。现在来观察时刻 t 流场中一点 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 和一个位于 O 点以速度 V_∞ 沿负 x 向运动的非定常源，距离 $\overline{OQ}=r$ 是通常的半径，在 t 时刻通过 Q 点的球面波是在 $t-\tau_1$ 时刻当源在 P 点时所发出的。因此

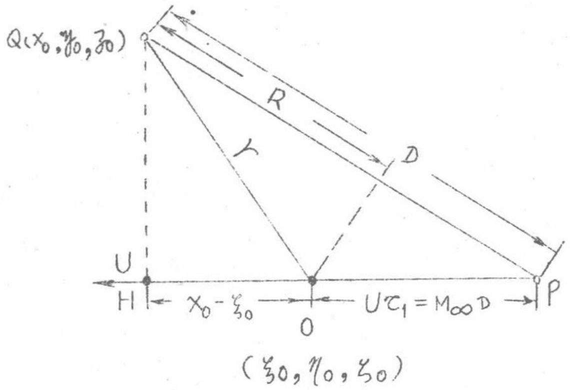

图 1-3-2

$$\overline{OP}=U\tau_1,\quad \overline{PQ}=a_\infty\tau_1=D$$

故 $\overline{OP}=M_\infty\overline{PQ}=M_\infty D$

从图 1-3-2 的几何关系有

$$\overline{PQ}^2=\left[x_0-(\xi_0+\overline{OP})\right]^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2$$

即
$$D^2=(x_0-\xi_0-M_\infty D)^2+(y_0-\eta_0)^2+(z_0-\zeta_0)^2$$

$$(1-M_\infty^2)D^2+2M_\infty(x_0-\xi_0)D-(x_0-\xi_0)^2-(y_0-\eta_0)^2-(z_0-\zeta_0)^2=0 \tag{1-3-37}$$