铁道部科学研究院

论文集

铁路基础理论专辑



2

1981

需要全本请访问 www.ertongbook.com

南京航空学院 藏書 图書馆
U2-53
1001

目　录

〔**编者按**〕每篇文章的内容，由作者自负责任。编者不作文章的业务审查，只作政治审查。

目录编排的次序，依文稿收到时间的先后作安排。

关于*Mercer*展开定理的研究…… 李树荣　邓耀华（1）

内燃机车曲线通过的空间理论……冯登泰（7）

用振幅逼近法计算柴油机曲轴扭振有阻尼自振频率……冯登泰（37）

用*Jacobi*法计算柴油机曲轴扭振有阻尼自振频率……冯登泰（45）

求车辆车架自由偏转通过圆曲线轨道时X_1值的切线迭代法…… 谢天辅（49）

变参数振动系统振动性态的某些分析……靳　蕃　吴章江（57）

关于*Bellman*引理的注记…… 吴章江（77）

教学心得——推导弹性平板应力状态下*Lamé*方程的另一途径…… 吴柏祥（82）

30335833

441750

南京航空学院 藏书

关于Mercer展开定理的研究

李树荣　邓耀华

众所周知，许多力学和工程实际问题都可以化为一个带正定核的积分方程（例如见〔1〕§3.14）因此对于正定核的研究一直在积分方程理论中占有十分重要的位置。在〔2〕中*Mercer*曾经给出有关正定连续核的一个展开定理，这一定理可看作下述矩阵谱分解定理在无穷维*Hilbert*空间L_2的类似和推广：设A为一$n\times n$阶实对称矩阵，则A可藉助于其特征值λ_i和相应的特征向量q_i（$i=1,2,\cdots\cdots n$）表示为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i q_i q_i^T$$

（详见〔3〕,*P*.135）。在〔4〕中*A.C.Zaanen*进一步推广了*Mercer*的结果，他证明当核的连续性条件减弱为平均连续时，类似的特征展开也是成立的，亦即有*Zaanen—Mercer*定理：假设

1. $H(x,y)$为—L_2正定*Hermite*核，亦即合

$$\int_a^b\int_a^b |H(x,y)|^2 d\times dy<\infty,\quad H(x,y)=\overline{H(y,x)} \tag{1}$$

且对任一$\varphi(x)\in L_2[a,b]$有

$$\int_a^b\int_a^b H(x,y)\varphi(x)\,\overline{\varphi(y)}\,d\times dy\geqslant 0 \tag{2}$$

2. $H(x,y)$在$[a,b]\times[a,b]$上平均连续：

$$\lim_{x_2\to x_1}\int_a^b |H(x_2,y)-H(x_1,y)|^2 dy=0,\quad (a\leqslant x_1,x_2\leqslant b)$$

$$\lim_{y_2\to y_1}\int_a^b |H(x,y_2)-H(x,y_2)|^2 dx=0,(a\leqslant y_1,y_2\leqslant b) \tag{3}$$

3. $H(x,y)$在每一点$(x,x)\in\Delta\times\Delta$连续；

则积分核$H(x,y)$在$[a,b]\times[a,b]$上可展开为

$$H(x,y)\overset{p.p.}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \tag{4}$$

上式右端级数在$[a,b]\times[a,b]$上关于(x,y)一致收敛，$\{\lambda_i\}_1^\infty$和$\{\varphi_i(x)\}_1^\infty$分别表示$H(x,y)$的特征值和相应的正交规格化特征函数序列。

在〔5〕中张世勋教授指出了*A.C.Zaanen*在证明上述定理中的缺陷，并给出了*Zaanen*—

*mercer*定理的补证和推广。本文的目的在于研究*Mercre* 展开定理成立的充要条件，并在此基础上对所述定理作进一步的推广。

定义 1：设Δ为*Euclid* 空间的有界闭集，又$H(x,y)$ 为定义在$\Delta\times\Delta$ 上的积分核，如果对于$H(x,y)$*Zaanen—mercɔr*定理成立，则我们称$H(x,y)$ 为一*Mercer*核。

定理 1：设Δ为*Euclid* 空间的有界闭集，$H(x,y)$ 为定义在$\Delta\times\Delta$上的正定 *Hermite* 核；假定 $H(x,y)$ 在每一点 $(x,x)\in\Delta\times\Delta$均连续，且$H(x,y)$ 的所有特征函数均为Δ上的连续函数，则$H(x,y)$为*Mercer*核的充要条件为$H(x,y)$ 所对应的积分算子

$$H\varphi=\int_{\Delta}H(x,y)\varphi(y)dy$$

是空间$L_2(\Delta)$ 到空间$L_2(\Delta)$ 的列紧算子。

证：充分性。由于H为正定列紧算子，故$H(x,y)$ 至多有可数个特征值λ_i，且$\lambda_i\geqslant 0$。设$\varphi_i(x)$ 为$H(x,y)$ 对应于λ_i的规格化特征函数，记

$$H^{(n)}(x,y)=H(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \tag{5}$$

易知（详见〔4〕*Chap*.14，*P*.532，*Theorem* 1），这时$H^{(n)}(x,y)$ 所对应的积分算子$H^{(n)}$同样为正定列紧算子。用$R_eH(x,y)$ 和$R_eH^{(n)}(x,y)$ 表示$H(x,y)$ 和$H^{(n)}(x,y)$ 的实部，类似于〔5〕引理1 可证，$H(x,x)=R_eH(x,x)\geqslant 0$，$H^{(n)}(x,x)=R_eH^{(n)}(x,x)\geqslant 0$。根据定理假设，$H(x,x)=R_eH(x,x)$ 为有界闭集Δ上的连续函数，故存在上界$M=\max\limits_{x\in\Delta}R_eH(x,x)$，于是由（5）得到

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2=H(x,x)-H^{(n)}(x,x)\leqslant M \tag{6}$$

亦即级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2$绝对收敛。因此对任意给定的小数$m>0$和固定的$x_0$，存在正整数$n_0=n_0(m,x_0)$，当$l\geqslant n\geqslant n_0$时有

$$\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(x_0)|^2<m$$

由此利用*Cauchy*不等式即得证

$$\left\{\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(x_0)\overline{\varphi_i(y)}|\right\}^2\leqslant\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(x_0)|^2\cdot\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(y)|^2\leqslant m\cdot M$$

上式表明级数

$$S(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

对任一固定的$x\in\Delta$，关于y是一致收敛的，因而$S(x,y)$ 对于每一固定的$x\in\Delta$为y 的连续函数。同理可证对于每一固定的$y\in\Delta$，$S(x,y)$ 为x的连续函数。记$K(x,y)=H(x,y)-S(x,y)$，注意到级数$S(x,y)$作为单个变量x或y的函数级数是一致收敛的，因此对任一$\varphi(y)\in L_2(\Delta)$，我们均可逐项积分得到

$$\int_{\Delta} K(x,y)\varphi(y)dy=\int_{\Delta} H(x,y)\varphi(y)dy-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\int_{\Delta}\overline{\varphi_i(y)}\varphi(y)dy$$

由此根据熟知的*Hilbert*公式即得（〔4〕，*P*.521，*Th*.7）

$$\int_{\Delta\times\Delta} K(x,y)\varphi(y)\ \overline{f(x)}\ dxdy=\int_{\Delta\times\Delta} H(x,y)\varphi(y)\ \overline{f(x)}\ dxdy-$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\left(\int_{\Delta}\overline{\varphi_i(x)f(x)}\ dx\right)$$

$$\times\left(\int_{\Delta}\overline{\varphi_i(y)}\varphi(y)dy\right)=0 \qquad (7)$$

其中$f(x)\in L_2(\Delta)$为任一函数。由于$\varphi(y)$，$f(x)\in L_2(\Delta)$的任意性，根据上式不难证明$K(x,y)$在$\Delta\times\Delta$上几乎处处等于零，亦即有

$$H(x,y)\overset{p.p.}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \qquad (8)$$

下面我们来证明（8）式右端级数$S(x,y)$关于(x,y)的一致收敛性。为此先证对于所有$x\in\Delta$均有$H(x,x)=S(x,x)$。事实上，如果存在x_0使得$H(x_0,x_0)\neq S(x_0,x_0)$，则由$S(x,y)$为单个变量$x$或$y$的连续函数可知，对于$x_0$充分小的邻域$\Delta_1$中所有的$x$均有

$$|S(x,x_0)-H(x_0,x_0)|>2m \qquad (9)$$

这里$m=\frac{1}{4}|H(x_0,x_0)-S(x_0,x_0)|$。另一方面，根据定理假设，$H(x,y)$在$(x,x)\in\Delta\times\Delta$连续，因而我们总可找到$x_0$的邻域$\Delta_2\subset\Delta_1$，使得当$(x,y)\in\Delta_2\times\Delta_2$时有$|H(x,y)-H(x_0,x_0)|<\frac{m}{2}$，由此利用（7）式我们即得证对于几乎$x\in\Delta_2$和几乎$y\in\Delta_2$，$|S(x,y)-H(x_0,y_0)|=|H(x,y)-H(x_0,y_0)|<\frac{m}{2}$。设$x_1\in\Delta_2$为使得

$$|S(x_1,y)-H(x_0,x_0)|<\frac{m}{2} \qquad (10)$$

对于几乎$y\in\Delta_2$均成立的点。注意到$S(x,y)$为y的连续函数，而在$y=x_0$任意小的邻域我们均可找到使（10）成立的点y，因而我们总可找到y_1使得$|S(x_1,y_1)-S(x_1,x_0)|<\frac{m}{2}$和（10）式同时成立，亦即有

$$|S(x_1,x_0)-H(x_0,x_0)|<|S(x_1,x_0)-S(x_1,y_1)|+|S(x_1y_1)-H(x_0,y_0)|<m$$

由于$x_1\in\Delta_2\subset\Delta_1$，上式与（9）式矛盾，故我们得证$H(x,x)=S(x,x)$。

由于级数$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2$为正项级数，它收敛于连续函数$S(x,x)=H(x,x)$，应用*Dini*定理（见〔4〕*P*.495，*Th*.8）可知$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2$为一致收敛的级数，由此根据*Cauchy*

需要全本请访问 www.ertongbook.com

不等式

$$\left\{\sum_{i=n}^{l}|\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}|\right\}\leqslant\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2\cdot\sum_{i=n}^{l}\lambda_i|\varphi_i(y)|^2$$

即可得知（8）式右端为一关于（x,y）一致收敛的级数。充分性完全得证。

必要性。假定*Zaanen—Mescer*定理对于$H(x,y)$成立，由展开式（4）易知$H(x,y)$至多有可数个特征值λ_i，且 $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=0$。今设$f(x)\in L_2(\Delta)$为任一与所有特征函数$\varphi_i(x)$正交的函数：$(f,\varphi_i)=0$，$(i=1,2,\cdots\cdots)$，利用展开式（4）可得

$$\int_{\Delta}H(x,y)f(y)\,dy\overset{p.p.}{=}0$$

亦即$Hf=0$。于是，由〔1〕$P357$定理1可知，H为$L_2(\Delta)$空间到$L_2(\Delta)$空间的列紧算子。定理证毕。

定理2：设$H(x,y)$为定义在$\Delta\times\Delta$上的正定*Hermite*核，假定$H(x,y)$的$p(p\geqslant1)$次迭代核

$$H_p(x,y)=\int_{\Delta}H_{p-1}(x,z)H(z,y)dz$$

平均连续：

$$\begin{aligned}&\lim_{x_2\to x_1}\int_{\Delta}|H_p(x_2,y)-H_p(x_1,y)|^2dy=0,\qquad x_1,x_2\in\Delta\\&\lim_{y_2\to y_1}\int_{\Delta}|H_p(x,y_2)-H_p(x,y_1)|^2dx=0,\qquad y_1,y_2\in\Delta\end{aligned}\tag{11}$$

且$H(x,y)$在$(x,x)\in\Delta\times\Delta$连续，则积分核在$\Delta\times\Delta$上可展开为

$$H(x,y)\overset{p.p.}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

上式右端为$\Delta\times\Delta$上一致收敛的级数，$\{\lambda_i\}_1^{\infty}$和$\{\varphi_i(x)\}_1^{\infty}$分别表$H(x,y)$的特征值以及相应的正交规格化特征函数序列。

取$\Delta=[a,b]$，由Hölder不等式易知，当条件（1），（2），（3），（4）成立时，定理2的条件必然成立。反之，则不然。故定理2包含了*Zaanen—Mercer*定理作为自己的特殊情况。

为了证明定理2，我们先需要证明下述引理。

引理1：设$H(x,y)$满足定理2的条件，则积分算子

$$H_pf=\int_{\Delta}H_p(x,y)\varphi(y)dy$$

为连续函数空间$C(\Delta)$上的列紧算子。

证：设$\{\varphi_n(x)\}$为$C(\Delta)$中的有界序列。记$M=\sup\limits_n\|\varphi_n\|_c=\sup\limits_n(\max\limits_{x\in\Delta}|\varphi_n(x)|)$，我们有

$$|(H_\rho\varphi_n)(x)-(H_\rho\varphi_n)(x')|=\left|\int_\Delta[H_\rho(x,y)-H_\rho(x',y)]\varphi_n(y)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi_n\|_c\cdot\int_\Delta|H_\rho(x,y)-H_\rho(x'y)|dy$$

$$\leqslant M\cdot(mes\Delta)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Delta|H_\rho(x,y)\right.$$

$$\left.-H_\rho(x';y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

根据条件（11）和有界闭集上连续函数特性，由上式易知函数族$\{(H_\rho\varphi_n)(x)\}$在Δ上等度连续。此外，由条件（11）我们还可以推出函数族$\{(H_\rho\varphi_n)(x)\}$是一致有界的：

$$\|H_\rho\varphi_n\|_c\leqslant M_1\cdot\|\varphi_n\|_c\leqslant M_1\cdot M \tag{13}$$

其中$M_1=(\mathrm{mes}\,\Delta)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\max_{x\in\Delta}\int_\Delta|H_\rho(x,y)|^2dy\right)^{\frac{1}{2}}$。综合（12）（13）可知，$H_\rho$将任一有界序列映射为一等度连续和一致有界的函数族。由此根据*Alzera*定理（详见[6]），存在一$g(x)\in C(\Delta)$和$\{n\}$的一个子序列$\{n_i\}$使得

$$\lim_{i\to\infty}\|H_\rho\varphi_{n_i}-g\|_c=0$$

这表明H_ρ为$C(\Delta)$上的列紧算子。引理证毕。

引理2：在定理2的条件下，$H_\rho(x,y)$的任一特征函数$\varphi(x)\in L_2(\Delta)$必属于$C(\Delta)$。

证：用E_c和E_{L_2}分别记方程

$$\varphi(x)-\int_\Delta H_\rho(x,y)\varphi(y)dy=0$$

在$C(\Delta)$和$L_2(\Delta)$中的解所组成的子空间。由于$E_c\subset E_{L_2}$，故我们有

$$\alpha_C=\dim E_c\leqslant\alpha_{L_2}=\dim E_{L_2} \tag{14}$$

这里$\dim E$表示空间E的维数。

用$H^*_{\rho C}$和$H^*_{\rho L_2}$分别记算子H_ρ在$C(\Delta)$和$L_2(\Delta)$上的*Banach*共轭算子，$C^*(\Delta)$和$L^*_2(\Delta)$分别记$C(\Delta)$和$L_2(\Delta)$的*Banach*共轭空间，显然我们有$L_2^*(\Delta)=L_2(\Delta)\subset C^*(\Delta)$，故若设$\varphi^*\in L_2(\Delta)$对于每一$\varphi\in L_2(\Delta)$满足

$$\varphi^*[(I-H_\rho)\varphi]=0$$

则必然对任一$\psi\in C(\Delta)\subset L_2(\Delta)$同样有

$$\varphi^*[(I-H_\rho)\psi]=0$$

这表明，如果φ^*是方程$(I-H^*_{\rho L_2})\varphi^*=0$在$L_2^*(\Delta)$中的解，则它必然也是$(I-H^*_{\rho C})\varphi^*=0$在$C^*(\Delta)$中的解，因而有

$$\beta_C=\dim E_C^*\geqslant\beta_{L_2}=\dim E^*_{L_2} \tag{15}$$

其中E_C^*和$E^*_{L_2}$分别表示方程$((I-H^*_{\rho C})\varphi=0$和$(I-H^*_{\rho L_2})\varphi=0$的解在$C^*(\Delta)$和$L_2^*(\Delta)$中所构成的子空间。

由于在引理1中我们已证H_ρ为$C(\Delta)$上的列紧算子，故由*Riesz—Schauder*理论（见〔4〕*Chap*.11，§3）知$\alpha_C=\beta_C$；另一方面，由定理2条件（11）易证H_ρ在$L_2(\Delta)$上也是列紧的（见〔4〕*P*.487），因此根据*Riesz—Schauder*理论同样应有$\alpha_{L2}=\beta_{L2}$。比较(14)和(15)即得$\alpha_{L2}=\alpha_C$，故有$E_C=E_{L2}$，引理于是得证。

引理3：在定理2的条件下，$H(x,y)$的任一属于$L_2[a,b]$的特征函数必属于$C[a,b]$。

证：由于$H(x,y)$之任一特征函数必为$H_\rho(x,y)$的特征函数，由引理2即得证。

定理2的证明：由引理3可知$H(x,y)$的所有特征函数均为连续函数。由于在引理2的证明中我们实际上已证，在条件（11）下，$H_\rho(x,y)$所对应的积分算子H_ρ为$L_2(\Delta)$上的列紧算子，根据〔4〕*P*.317定理13，这时H本身亦为$L_2(\Delta)$上的列紧算子，由此应用定理1即可得证。

推论1：若正规核$K(x,y)$满足定理2的条件（但非正定*Hermite*核），且$K(x,y)$的特征值除有限个外，其余全部为非负的特征值，则$K(x,y)$在$\Delta\times\Delta$上可展开为

$$K(x_1y)\overset{p.p.}{=\!=}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x)\,\overline{\varphi_i(y)} \tag{16}$$

上式右端为$\Delta\times\Delta$上一致收敛的级数，$\{\lambda_i\}_1^\infty$和$\{\varphi_i(x)\}_1^\infty$分别为$K(x,y)$的特征值和正交规格化的特征函数序列。

证：考察积分核$H(x,y)$

$$H(x,y)=Kx,y)-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\varphi_i(x)\,\overline{\varphi_i(y)}$$

这里$\{\lambda_i\}_{i=1}^{l}$为$K(x,y)$的所有负的特征值，$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{l}$为其相应的特征函数。由于$H(x,y)$的所有特征值均为非负数，因此完全仿照定理1和定理2的证明可证$H(x,y)$存在着特征展开（4），由此移项即知展开（16）成立。推论证毕。

最后，我们指出，〔4〕中*Chap*.14，§9定理3，定理4，*Chap*.16，§4定理2以及*Chap*.17，§3定理1等一系列有关核展开的定理，只要将其中关于$H(x,y)$平均连续的条件改为我们这里的条件（11），其结果仍然成立，由于证明完全相同，我们这里就不再一一列出。

参 考 文 献

〔1〕 *F*.*G*.*Tricomi*, *Integval equations*, *London*, (1957), (俄文译本：Ф.Трикоми, Интегральные уравнения, Москва, (1960))。

〔2〕 *J*.*Mercer*, *Functions of posive and negative type and their connection with the theong of integral equations*, *Transactions London phil*.*Soc*.(*A*)209 (1909), 415—446。

〔3〕 南京大学数学系计算专业，线性代数，科学出版社，(1978)。

〔4〕 *A*.*C*.*Zaanen*, *Lineaz analysis*, *amsterdam*, (1956)·

〔5〕 张世勋，查仑与梅赛尔定理的研究，四川大学学报（自然科学版）№1 (1958), 85—92.

〔6〕 В.И.斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一分册第一章§§15—16。

内燃机车曲线通过的空间理论

冯 登 泰

20年前，C.M.库曾科教授提出曲线通过的空间理论。作者考虑到轮轨均有一定程度磨损，研究出计算轮轨接触滑动量和作用力的关系式：

$$2a = 1.55\sqrt[4]{P},$$

$$T_x = 1052\sqrt{P}\,\delta_x,$$

$$T_y = 1052\sqrt{P}\,\delta_y,$$

其中，$2a$——接触印迹的椭圆长轴（mm），P为铅垂压力（公斤），T_x——纵向切向力（公斤），T_y——横向切向力(公斤)，δ_x、δ_y——纵向和横向的滑动量(mm)。(《见机车电传动》1980第6期和1981第1期）作者以此为基础，发展了库曾科教授的理论。20年前，作者不曾发表此文于国外。今当我国四化新时期，特主动将此理论公诸于国内。

§1 转向架的轮对在铁道曲线上的位置

用空间法计算机车的曲线通过，首先应当求出车轮和钢轨的接触点的位置，从这些实际的几何关系出发，我们可能求出作用于车轮支点上的力之数值及方向，以此种态度对待问题，是空间法之所以不同于其他方法的地方。因为在其他方法中，总是假设，车轮和钢轨的接触点在轨顶水平面内，不考虑轮箍和轨顶的剖面轮廓，也不考虑该轮对的抵靠角，这种假定，不符合实际。

由于车轮和钢轨材料具有弹性，在载荷作用下的车轮支点，不是一点，而是一个相当不小的面（$A=\pi ab$，$a=0\sim10$ 毫米；$b=0\sim10$ 毫米，）。本论文在决定切向力时，考虑了面接触现象在内。但是，在研究轮对在曲线上的几何学时，应当暂时把它们的接触看成点接触，似乎接触发生在支点印迹椭圆的中心。因此，我们要求出支承面中心点的座标。

轮箍和轨顶的尺寸，同铁道曲线半径比较起来，前者是很小的。因此，可以忽略轨道的曲率，而把钢轨看成直线。这在本章中，对各公式，不致引起甚么实质性的误差。

在机车曲线通过的计算中，常常不考虑外轨超过这一条件。这一点，使计算偏于安全。现在我们也暂不考虑它。

在营运中的铁道上，轨顶和车轮的磨损程度极不相同。为了便于说明这种现象的复杂多样性，将轮和轨的磨损程度都划分成三等：新剖面的；中间性磨损的；极限磨损的。因此，我们有 $3\times3=9$ 种轮和轨的接触情况。

工厂计算和一般研究，都只对第1种情况（新轮新轨）进行。其余8种情况未经研究过。

本论文限于时间，不能对8种磨损组合情况都研究。我们的主要目的，在于探讨轮箍磨损对于曲线通过的影响，因此我们只限于研究极限磨损的轮箍和中间性磨损的轨顶的情况。

转向架的轮对在曲线上的位置，共有三种，每种之中又可以有各种对于钢轨的抵靠角 $|\delta| \geqslant 0°$。这三种位置如可分述如下：轮对以其外轮抵靠外轨；轮对也不抵靠外轨，也不抵靠内轨，处于二轨线之间，突缘和内外轨顶之间均有间隙，称为“自由位置”；轮对以其内轮抵靠内轨。

我们首先研究第一种位置的况；其余两种情况，可以利用第一种情况的分析结果，加以改变而使用之。

§2 磨损轮箍与磨损轨顶的工作表面分析式

a）圆断面圆环表面（旋转生成之面）的分析方程

如图—18所示，有一圆断面圆环，其表面是用一半径为R的圆，使其平面通过轴线OZ，使其圆心在以ξ_2为半径OZ为轴线的圆周上，进行旋转而生成的，座标面oxy平行于圆环的平面，设已知圆环的内直径为R_0，横断面的半径为R。圆环的中心断面和座标面oxy的距离为ξ_1，环中心圆的半径由下式决定：

$$\xi_2 = R_0 + R_1$$

或者

$$R_0 = \xi_2 - R_0 \tag{98}$$

如果圆环面有两个点I和I'，它们位于同座标面oxy平行的平面内，如图—18所示，则可得到以下的几何关系：

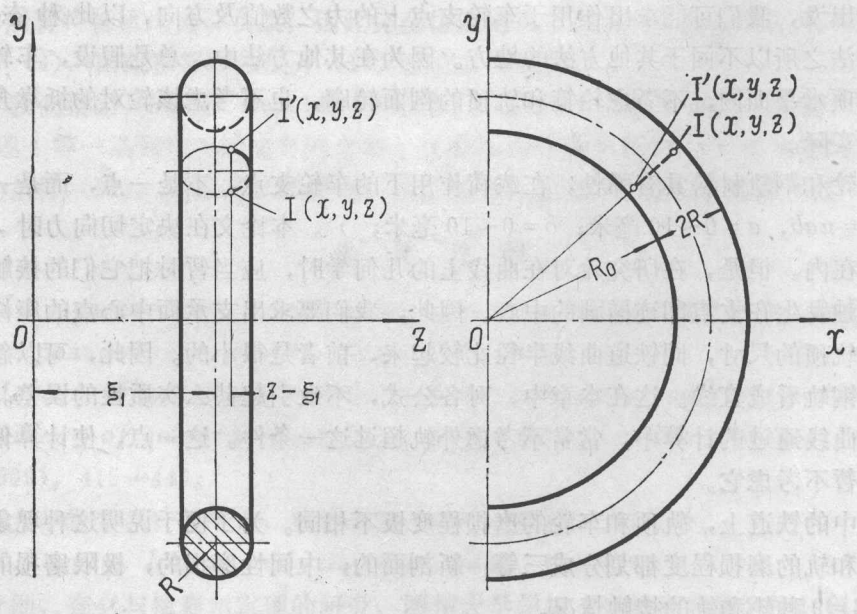


图18 圆断面圆环示意图

对于点I：$R_0+R=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{R^2-(Z-\xi_1)^2}$；　　(99)

对于点I'：$R_c+R=\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{R^2-(Z-\xi_1)^2}$，　　(100)

由此得到描写圆环面的方程为

$$[\sqrt{x^2+y^2}-(R_0+R)]^2=R^2-(Z-\xi_1)^2,\qquad(101)$$

b）轮对的轮箍磨损面的方程

轮箍磨损了的轮对，表示如图—19。这种磨损情况，是典型的，最有代表性的。

左轮的工作踏面1.2：利用普通方程（99），可以写出它的方程（图—19）。

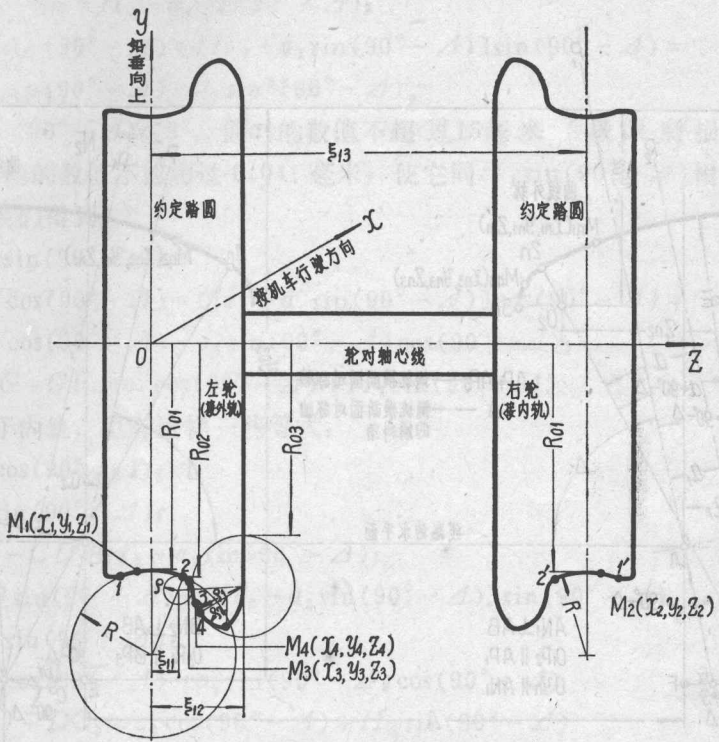


图19 带后损轮箍的轮对

$$-[\sqrt{x_1^2+y_1^2}-(R_{01}+R)]=\sqrt{R^2-(Z-\xi_1)^2},\qquad(102)$$

其中以x_1，y_1，Z_1表示此旋转生成面上的点M_1的座标。

右轮的工作踏面1′—2′：以$\xi_1=\xi_{13}$和$R_0=R_{01}$代入方程（99），并改换座标，则可得到这一工作面的方程为

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2}=(R_0+R)-\sqrt{R^2-(Z_2-\xi_{13}}},\qquad(103)$$

其中以x_2，y_2，Z_2表示该表面上一点M_2的座标。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

左轮的工作表面2—3（即突缘的凹圆角部份）：以$R=R_{02}$，$\xi_1=\xi_{11}$和$R=s$代入公式（99），并改换座标。我们得到该表面的方程如下，

$$R_{02}+\rho=\sqrt{x_2^2+y_3^2}+\sqrt{\rho^2-(Z_3-\xi_{11})^2}, \tag{104}$$

其中以x_3，y_3，Z_3表示该表面上一点M_3的座标。

左轮突缘部份的工作表面3—4：我们以$R_0=R_{03}$，$\xi_1=\xi_{12}$和$R=\rho_1$代入普遍方程（100），并相应地将座标改为点M_4（x_4，y_4，Z_4）的座标。由此得到：

$$\sqrt{x_4^2+y_4^2}-(R_{23}+\rho_1)=\sqrt{\rho_1^2-(Z_4-\xi_{12})^2}, \tag{105}$$

c）铁道曲线上中间性磨损的轨顶工作面的方程

图—20表示铁道曲线横断面示意图，其中未考虑外轨超高，如通常曲线通过计算一样。

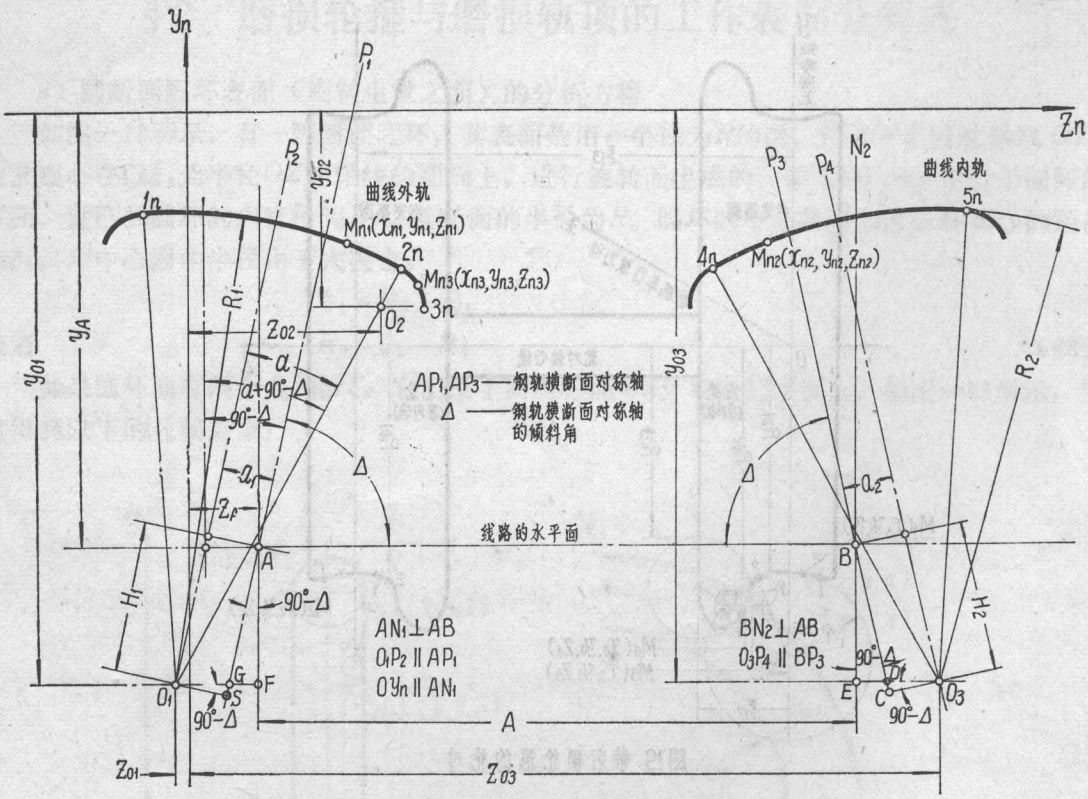


图20 铁道曲线横断面示意图

我们取座标系统$ox_n y_n Z_n$以表示线路的横断面，使原点0与轮对座标系统$oxyZ$的原点相重合，使轴oy_n与oy相重合，座标面$ox_n Z_n$与oxZ相重合。

工作面I_n-Z_n是半径为R_1，中心为o_1的圆柱面的一部份，如果该面上一点M_{n1}的座标为x_{n1}，y_{n1}，Z_{n1}，则可写出这一圆柱面的方程为（图—20）。

$$(y_{n1}-y_{01})^2+(Z_{n1}-Z_{01})^2=R_1^2 \tag{106}$$

外轨圆角的工作面2_n-3_n由下面的方程表示：

$$(y_{n3}-y_{02})^2+(Z_{n3}-Z_{02})^2=r^2 \tag{107}$$

根据图—20，我们有以下关系式：

$$\left.\begin{aligned} y_{02} &= y_{01} + (R_1 - r)\cos(\alpha + 90^\circ - \Delta); \\ Z_{02} &= (R_1 - r)\sin(\alpha + 90^\circ - \Delta) + Z_{01} \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

将等式（108）代入（107），则可得到：

$$[y_{n3} - y_{01} - (R - r)\cos(\alpha + 90^\circ - \Delta)]^2 + [Z_{n3} - (R_1 - r)\sin(\alpha + 90^\circ - \Delta) - Z_{01}]^2 = r^2 \tag{109}$$

内轨顶的工作面$4_n - 5_n$可用下面的方程表示：

$$(y_{n2} - y_{03})^2 + (Z_{n2} - Z_{03})^2 = R_2^2 \tag{110}$$

按照图—20，对于外轨，还有以下的三角关系：

$$O_1G_1 = a_1\cos(90^\circ - \Delta);$$

$$GS = a_1\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$AG = H_1 - GS = H_1 - a_1\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$GF = AG\sin(90^\circ - \Delta) = [H_1 - a_1\sin(90^\circ - \Delta)]\sin(90^\circ - \Delta) = H_1\sin(90^\circ - \Delta) - a_1\sin^2(90^\circ - \Delta)。$$

我们已知，$(90^\circ - \Delta) \leqslant 3^\circ$，而$a_1$的数值不超过15毫米（极限磨损的钢轨）；所以$a_1\sin^2(90^\circ - \Delta)$的数值不能超过0.041毫米；使它同$H_1\sin(90^\circ - \Delta)$相比，则可将它忽略掉。结果，我们得到：

$$GF \approx H_1\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$AF = AG\cos(90^\circ - \Delta) = [H_1 - a_1\sin(90^\circ - \Delta)]\cos(90^\circ - \Delta) = H_1\cos(90^\circ - \Delta) - a_1\sin(90^\circ - \Delta)\cos(90^\circ - \Delta); \tag{111}$$

$$O_1F = O_1G + GF \approx a_1\cos(90^\circ - \Delta) + H_1\sin(90^\circ - \Delta) \tag{112}$$

同样，对于内轨，也有这样一些等式：

$$DO_3 = a_2\cos(90^\circ - \Delta);$$

$$CD = a_2\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$BD = H_2 - CD = H_2 - a_2\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$ED = BD\sin(90^\circ - \Delta) = [H_2 - a_2\sin(90^\circ - \Delta)]\sin(90^\circ - \Delta) \approx H_2\sin(90^\circ - \Delta);$$

$$BE = H_2\cos(90^\circ - \Delta) - a_2\sin(90^\circ - \Delta)\cos(90^\circ - \Delta) \tag{113}$$

$$EO_3 = ED + DO_3 \approx a_2\cos(90^\circ - \Delta) + H_2\sin(90^\circ - \Delta) \tag{114}$$

钢轨在轨枕上的底点A和B之间的距离A（图—20），决定于以下的等式：

$$A = S_0 + u + 2r_{CT} + 2(R_{CT} - r_{CT})\cos(\Delta - \alpha_{CT}), \tag{115}$$

其中S_0——轨宽；u——曲线上的轨道加宽量；R_{CT}，r_{CT}，α_{CT}——新钢轨的尺寸，即轨顶面和侧缘圆角的半径，以及以R_{CT}为半径的圆弧部份的夹角。

方程（110）中的座标y_{03}和Z_{03}由下面的关系式决定：

$$y_{03} = y_{01} + AF - BE;$$

$$Z_{03} = OF_1 + A + EO_3 + Z_{01};$$

将它们代入（110），我们得到：

$$(y_{n2} - y_{01} - AF + BE)^2 + (Z_{n2} - Z_{01} - A - O_1F - EO_3)^2 = R_2^2, \tag{116}$$

其中常数AF，BE，O_1F_1，EO_3和A决定于等式（111），（112），（113），（114）和（115）。

现在我们需要把座标系统$ox_n y_n Z_n$变成座标系统 $oxyZ$，为此目的，我们利用这些座标系统之间如图—21所表示的相互关系：轴oy和oy_{11}重合，o是共同的原点，轴 ox_n 位于同一平面内，彼此之间的夹角等于轮对抵靠外轨的角度δ。同样，轴oZ和 oZ_n 之间也有这样的关系（图—21）。由解析几何中，我们知道，座标变换的公式是这样的：

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x\cos(\widehat{x_n,x}) + y\cos(\widehat{x_n,y}) + Z\cos(\widehat{x_n,Z});\\ y_n &= x\cos(\widehat{y_n,x}) + y\cos(\widehat{y_n,y}) + Z\cos(\widehat{y_n,Z});\\ Z_n &= x\cos(\widehat{Z_n,x}) + y\cos(\widehat{y_n,y}) + Z\cos(\widehat{Z_n,Z})。\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

夹角的数值，列于下表

夹角的数值　　表1

	X	Y	Z
Xn	δ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}+\delta$
Yn	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Zn	$\frac{\pi}{2}+\delta$	$\frac{3\pi}{2}$	δ

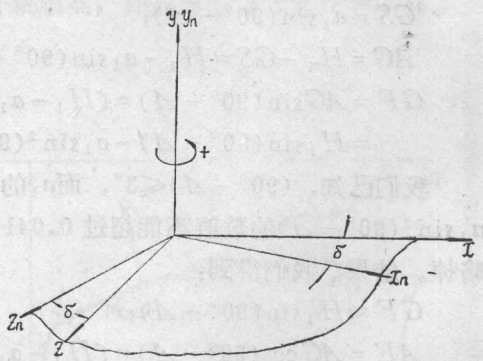


图21 座标系统的关系

将表—1中的角度数值代入变换公式(117)，则可得到：

$$\left.\begin{aligned} x_n &= x\cos\delta + Z\sin\delta;\\ y_n &= y;\\ Z_n &= -x\sin\delta + Z\cos\delta。\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

在方程（106），（109）和（116）中，座标 x_{n1}，y_{n1}；Z_{n1}；x_{n2}，y_{n2}，Z_{n2}；x_{n3}，y_{n3}，Z_{n3}是变数；对于它们，都有公式（118），代入以后，它们分别变成如下的形式：

对于工作表面$l_n - 2_n$：

$$(y_1 - y_{011})^2 + (-x_1\sin\delta + Z_1\cos\delta - Z_{01})^2 = R^2; \tag{119}$$

对于工作表面$2_n - 3_n$：

$$[y_3 - y_{011} - (R-r)\sin(\Delta-2)]^2 + [-x_3\sin\delta + Z_3\cos\delta - Z_{01} - (R-r)\cos(\Delta-2)]^2 = r^2; \tag{120}$$

对于工作表面（$4_n - 5_n$）：

$$(y_2 - y_{011} - AF + BE)^2 + (-x_2\sin\delta + Z_2\cos\delta - Z_{01} - O_1F - EO_3)^2 = R_2^2 \tag{121}$$

§3 轮对抵靠外轨时，接触点座标的计算公式

当轮对抵靠外轨时，轮箍和轨顶的接触点可能发生于下列两种可能情况之一：

情况Ⅰ
- 点$M_1(x_1, y_1, Z_1)$和点$M_{1n}(x_{1n}, y_{1n}, Z_{1n})$相接触；
- 点$M_2(x_2, y_2, Z_n)$和点$M_{2n}(x_{2n}, y_{2n}, Z_{2n})$相接触；
- 点$M_3(x_3, y_3, Z_3)$和点$M_{3n}(x_{3n}, y_{3n}, Z_{3n})$相接触；

情况Ⅱ
- 点M_1和点M_{1_n}相接触；
- 点M_2和点M_{2_n}相接触；
- 点$M_4(x_4,y_4,Z_4)$和点M_{3_n}相接触。

我们先讨论两曲面相吻切的条件。设$F_k(x,\ y,\ Z)$为车轮的工作面方程；$F_n(x,y,Z)$为钢轨工作面的方程。如果这两个曲面相切于点$M_i(x_i,y_i,Z_i)$，则过此点的对于该两曲面的切平面，应当相互重合。根据这一条件，便可求出接触点$M_i(x_i,y_i,Z_i)$的座标。为此目的，我们写出曲面F_k上的点M_i的切平面方程（见高等数学教程）：

$$[(F_k)'_x(x_i,y_i,Z_i)]\cdot(x-x_i)+[(F_i)'_y(x_i,y_i,Z_i)](y-y_i)+$$
$$+[(F_k)'_Z(x_i,y_i,Z_i)](Z-Z_i)=0 \tag{122}$$

或者写成另一种形状：$[(F_k)'_x$为F_k对于x的偏导数，余相同$]$

$$[(F_k)'_x(x_i,y_i,Z_i)]\cdot x+[(F_k)'_y(x_i,y_i,Z_i)]\cdot y+[(F_k)'_Z(x_i,y_i,Z_i)]\cdot Z-$$
$$-\{[(F_k)'_x(x_i,y_i,Z_i)]\cdot x_i+[(F_k)'_y(x_i,y_i,Z)]\cdot y_i+$$
$$[(F_k)'_y(x_i,y_i,Z_i)]\cdot Z_i\}=0 \tag{123}$$

同样，曲面F_n上的点M_i的切平面方程可写成：

$$[(F_n)'_x(x_i,y_i,Z_i)]\cdot x+[(F_n)'_y(x_i,y_i,Z_i)]\cdot y+[(F_n)'_Z(x_i,y_i,Z_i)]\cdot Z-$$
$$-\{[(F_n)'_x(x_i,y_i,Z_i)]\cdot x_i+[(F_n)'_y(x_i,y_i,Z_i)]\cdot y_i+$$
$$[(F_k)'_Z(x_i,y_i,Z_i)]\cdot Z_i\}=0 \tag{124}$$

这两个切平面如果相互重合，则方程（123）和（124）中的变数x,y,Z前面的系数应当成正比例；这一条件，可以写成如下的连比式：

$$\left[\frac{(F_k)'_x}{(F_n)'_x}\right]_{x_i,y_i,Z_i}=\left[\frac{(F_k)'_y}{(F_n)'_y}\right]_{x_i,y_i,Z_i}=\left[\frac{(F_k)'_Z}{(F_n)'_Z}\right]_{x_i,y_i,Z_i}=$$
$$=\left[\frac{(F_k)'_x\cdot x_i+(F_k)'_y\cdot y_i+(F_k)'_Z\cdot Z_i}{(F_n)'_x\cdot x_i+(F_n)'_y\cdot y_i+(F_n)'_Z\cdot Z_i}\right]_{x_i,y_i,Z_i} \tag{125}$$

由此便可得到三个方程：

$$(F_k)'_x\cdot(F_n)'_y-(F_k)'_y\cdot(F_n)'_x=0,\quad(\text{对于}x_i,y_i,Z_k); \tag{126}$$
$$(F_k)'_y\cdot(F_n)'_Z-(F_k)'_Z\cdot(F_n)'_y=0,\quad(\text{对于}x_i,y_i,Z_i); \tag{127}$$
$$(F_k)'_y\cdot[(F_n)'_Z\cdot x_i+(F_n)'_y\cdot y_i+(F_n)'_Z\cdot Z_i]-[(F_k)'_x\cdot x_1+(F'_k)'_y\cdot y_i+$$
$$(F_k)'_Z\cdot Z_i]\cdot(F_k)'_y=0,\quad(\text{对于}x_i,y_i,Z_i) \tag{128}$$

a）点M_1的方程

点M_1是轮箍面1—2和轨顶面1_n—2_n的接触点，1—2的方程为（102），用F_{k1}表示它：

$$F_{k1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{R^2-Z_1^2}-(R_{01}+R)=0 \tag{129}$$

为了书写方便，我们采用代号：

$$R_{01}+R=b_1; \tag{130}$$

代入方程（129），得到

$$F_{k1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{R^2-Z_1^2}-b_1=0 \tag{131}$$

1_n—2_n的方程为（119），我们用F_{n1}表示它：

$$F_{n1}=(y_1-y_{011})^2+(-x\sin\delta+Z_1\cos\delta-Z_{01})^2-R_1^2=0 \tag{132}$$

它们的偏导数为：

$$\frac{\partial F_{k1}}{\partial x_1}=\frac{x^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k1}}{\partial y_1}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k1}}{\partial Z_1}=\frac{Z_1}{\sqrt{R^2-Z_1^2}};$$

$$\frac{\partial F_{n1}}{\partial x_1}=2\left[(\sin^2\delta)x_1-\frac{1}{2}(\sin2\delta)Z_1+Z_{01}\sin\delta\right];$$

$$\frac{\partial F_{n1}}{\partial y_1}=2(y_1-y_{011});$$

$$\frac{\partial F_{n1}}{\partial Z_1}=2\left[-\frac{1}{2}(\sin2\delta)\ x_1+(\cos^2\delta)Z_1-Z_{01}\cos\delta\right]$$

利用方程（126）和（127），代入这些偏导数式，则可求得决定 M_1 的座标的方程：

$$(1-\sin^2\delta)x_1y_1+\frac{1}{2}(\sin2\delta)y_1Z_1-y_{011}x-Z_{01}y_1\sin\delta=0; \tag{133}$$

$$\sqrt{R^2-Z_1^2}\cdot\left[-\frac{1}{2}(\sin2\delta)x_1+(\cos^2\delta)Z_1-Z_{01}\cos\delta\right]y_1$$

$$+\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot(y_1-y_{011})Z_1=0 \tag{134}$$

b）点M_2的方程：

点M_2是右轮踏面1′—2′和右轨顶工作面4_n—5_n的接触点，1′—2′的方程，为方程(103)，兹用F_{k2}表示它：

$$F_{k2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{R^2-(Z_2-\xi_{13})^2}-(R_{01}+R)=0 \tag{135}$$

采用代号

$$b_1=R_{01}+R,$$

代入方程（135），则有：

$$F_{k2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{R^2-(Z_2-\xi_{13})^2}-b_1=0 \tag{136}$$

4_n—5_n的方程为（113），我们用F_{n2}表示它：

$$F_{n2}=(y_2-y_{011}-b_2)^2+(-x_2\sin\delta+Z_2\cos\delta-Z_{01}-b_3)^2-R_2^2=0; \tag{137}$$

其中

$$b_2=AF-BE=(H_1-H_2)\cos(90^\circ-\Delta)-(a_1-a_2)\sin(90^\circ-\Delta)\cos(90^\circ-\Delta)$$

$$=(H_1-H_2)\sin\Delta-\frac{1}{2}(Q_1Q_2)\sin2\Delta; \tag{138}$$

$$b_3=A+O_1F+EO_3=S_0+u+2r_{CT}+2(R_{CT}-r_{CT})\cos(\Delta-2_{CT})$$

$$+(a_1+a_2)\sin\Delta+(H_1+H_2)\cos\Delta \tag{139}$$

它们的偏导数为：

$$\frac{\partial F_{k2}}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k2}}{\partial y_2}=\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k2}}{\partial Z_2}=-\frac{Z_2-\xi_{13}}{\sqrt{R^2-(Z_2-\xi_{13})^2}};$$

$$\frac{\partial F_{n2}}{\partial x}=2(-x_2\sin\delta+Z_2\cos\delta-Z_{01}-b_3)(-\sin\delta);$$

$$\frac{\partial F_{n2}}{\partial y_2}=2(y_2-y_{011}-b_2);$$

$$\frac{\partial F_{n2}}{\partial Z_2}=2(-x_2\sin\delta+Z_2\cos\delta-Z_{01}-b_3)\cos\delta$$

利用方程（126）和（127），将这些导数式代入，则可得到决定点M_2的座标的方程：

$$(y_2-y_{011}-b_2)x_2=(-x_2\sin\delta+Z_2\cos\delta-Z_{01}-b_3)(-\sin\delta)y_2; \tag{140}$$

$$\sqrt{R^2-(Z_2-\xi_{13})^2}\cdot(-x_2\sin\delta+Z_2\cos\delta-Z_{01}-b_3)(\cos\delta)y_2+$$

$$\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdot(y_2-y_{011}-b_2)(Z_2-\xi_{13})=0 \tag{141}$$

c）点M_3的方程

点M_3是外轨内侧圆角工作面2_n—3_n和左轮突缘的凹圆角工作面2—3的接触点。2—3的方程为（104），我们用F_{k3}表示它：

$$F_{k3}=\sqrt{x_3^2+y_3^2}+\sqrt{\rho^2-(Z_3-\xi_{11})^2}-(R_{02}+\rho)=0; \tag{142}$$

采用代号

$$b_4=R_{02}+\rho, \tag{143}$$

代入（142），则有：

$$F_{k3}=\sqrt{x_3^2+y_3^2}+\sqrt{\rho^2-(Z_3-\xi_{11})^2}-b_4=0 \tag{144}$$

2_n—3_n的方程为（120），我们用F_{n3}表示它：

$$F_{n3}=(y_3-y_{011}-b_5)^2+(-x_3\sin\delta+Z_3\cos\delta-Z_{01}-b_6)^2-r^2=0; \tag{145}$$

其中

$$b_5=(R_1-r)\sin(\Delta-\alpha); \tag{146}$$

$$b_6=(R_1-r)\cos(\Delta-\alpha)。 \tag{147}$$

它们的偏导数为：

$$\frac{\partial F_{k3}}{\partial x_3}=\frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k3}}{\partial y_3}=\frac{y_3}{\sqrt{x_3^2+y_3^2}};$$

$$\frac{\partial F_{k3}}{\partial Z_3}=\frac{-(Z_3-\xi_{11})}{\sqrt{\rho^2-(Z_3-\xi_{11})^2}};$$

$$\frac{\partial F_{n3}}{\partial x_3}=2(-x_3\sin\delta+Z_3\cos\delta-Z_{01}-b_6)\cdot(-\sin\delta);$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com