

高等学校教材

高  
等

# 高等数学

(第二版)

下 册

同济大学数学教研室主编



高等教育出版社

高等学校教材

# 高等数学

(第二版)

下册

同济大学数

\*2h0E700E\*



高等教育出版社

522956

9-1 · 2,3(1,2) · 4(2,4)

3(22-7) 8

5(4)

本书第二版是由同济大学数学教研室,参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《高等数学教学大纲》修订而成的。下册内容中,凡大纲上加星号及双星号部分如原教本未编入的,一律补充进去;大纲上未载部分,如二重积分换元法增写了雅可比公式,增写了含参变量的积分等等。修订者对原教本的部分内容还作了适当的修改,习题也更换和更新了不少。本书第一版中的线性代数、概率论两章,参照《工程数学教学大纲》修订后,各用《工程数学——线性代数》、《工程数学——概率论》等名义出版单行本。

本书下册修订稿仍由陆子芬教授任主审,高等学校工科数学教材编审委员会委托陆庆乐编委任复审。

本书分上、下册出版。下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程,书末还附有习题答案。

本书说理浅显,叙述详细,例题较多,便于教学,可作为高等工业院校教材,也可作为工程技术人员的自学用书。

责任编辑 丁鹤龄

同济 大学 数学 教学 大纲

高等学校教材  
高等数学  
(第二版)  
下册

同济大学数学教研室 主编

\*

高等教育出版社出版  
新华书店北京发行所发行  
北京第二新华印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 13.125 字数 316,000  
1978年10月第1版  
1982年5月第2版 1984年11月第6次印刷  
印数 524,631—724,630

书号 13010·0821 定价 2.65 元

320922

# 目 录

<b>第八章 多元函数微分法及其应用</b> .....	1
<b>第一节 多元函数的基本概念</b> .....	1
一、多元函数概念(1) 二、二元函数的极限(5) 三、二元函数的连续性(8) 习题 8-1(11)	
<b>第二节 偏导数</b> .....	12
一、偏导数的定义及其算法(12) 二、高阶偏导数(16) 习题 8-2(19)	
<b>第三节 全微分及其应用</b> .....	20
一、全微分的定义(20) *二、全微分在近似计算中的应用(24) 习题 8-3(27)	
<b>第四节 多元复合函数的求导法则</b> .....	28
习题 8-4(33)	
<b>第五节 隐函数的求导公式</b> .....	34
一、一个方程的情形(34) *二、方程组的情形(37) 习题 8-5(40)	
<b>第六节 偏导数的几何应用</b> .....	41
一、空间曲线的切线与法平面(41) 二、曲面的切平面与法线(45) 习题 8-6(48)	
<b>第七节 方向导数与梯度</b> .....	49
一、方向导数(49) *二、梯度(51) 习题 8-7(56)	
<b>第八节 多元函数的极值及其求法</b> .....	56
一、多元函数的极值及最大值、最小值(56) 二、条件极值 拉格朗日乘数法(62) 习题 8-8(65)	
<b>第九节 二元函数的泰勒公式</b> .....	66
一、二元函数的泰勒公式(66) *二、极值充分条件的证明(71) 习题 8-9(73)	
* <b>第十节 最小二乘法</b> .....	73
习题 8-10(80)	
<b>第九章 重积分</b> .....	81
<b>第一节 二重积分的概念与性质</b> .....	81

一、二重积分的概念(81)	二、二重积分的性质(85)	习题 9-1(87)
第二节 二重积分的计算法	.....88	
一、利用直角坐标计算二重积分(88)	习题 9-2(1)(96)	二、利用极坐标计算二重积分(98)
	习题 9-2(2)(104)	*三、二重积分的换元法(106)
	*习题 9-2(3)(111)	
第三节 二重积分的应用	.....112	
一、曲面的面积(113)	二、平面薄片的重心(116)	三、平面薄片的转动惯量(118)
	习题 9-3(119)	
第四节 三重积分的概念及其计算法	.....120	
	习题 9-4(124)	
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	.....125	
一、利用柱面坐标计算三重积分(125)	二、利用球面坐标计算三重积分(127)	习题 9-5(132)
*第六节 含参变量的积分	.....133	
	*习题 9-6(140)	
第十章 曲线积分与曲面积分	.....141	
第一节 曲线积分的概念与性质	.....141	
一、对弧长的曲线积分的概念(141)	二、对坐标的曲线积分的概念(143)	三、曲线积分的性质(146)
	习题 10-1(147)	
第二节 曲线积分的计算法	.....148	
一、对弧长的曲线积分的计算法(148)	二、对坐标的曲线积分的计算法(152)	三、两类曲线积分之间的联系(157)
	习题 10-2(159)	
第三节 格林公式及其应用	.....161	
一、格林公式(161)	二、平面上曲线积分与路径无关的条件(164)	三、二元函数的全微分求积(167)
	习题 10-3(171)	
第四节 曲面积分的概念与性质	.....173	
一、对面积的曲面积分(173)	二、对坐标的曲面积分(174)	三、曲面积分的性质(179)
	习题 10-4(179)	
第五节 曲面积分的计算法	.....180	
一、对面积的曲面积分的计算法(180)	二、对坐标的曲面积分的计算法(184)	三、两类曲面积分之间的联系(186)
	习题 10-5(187)	
*第六节 高斯公式 通量与散度	.....189	
一、高斯公式(189)	二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件(193)	三、通量与散度(194)
	*习题 10-6(197)	

*第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度 .....	198
一、斯托克斯公式(198) 二、空间曲线积分与路径无关的条件(202)	
三、环流量与旋度(203) *习题 10-7(206)	
<b>第十一章 无穷级数 .....</b>	<b>207</b>
第一节 常数项级数的概念和性质 .....	207
一、常数项级数的概念(207) 二、无穷级数的基本性质(210) 三、级数收敛的必要条件(213) *四、柯西审敛原理(214) 习题 11-1(215)	
第二节 常数项级数的审敛法 .....	217
一、正项级数及其审敛法(217) 二、交错级数及其审敛法(224)	
三、绝对收敛与条件收敛(225) 习题 11-2(231)	
*第三节 广义积分的审敛法 $\Gamma$ -函数 .....	232
一、广义积分的审敛法(232) 二、 $\Gamma$ -函数(238) *习题 11-3(240)	
第四节 幂级数 .....	241
一、函数项级数的一般概念(241) 二、幂级数及其收敛性(242)	
三、幂级数的运算(247) 习题 11-4(250)	
第五节 函数展开成幂级数 .....	251
一、泰勒级数(251) 二、函数展开成幂级数(253) 习题 11-5(260)	
第六节 函数的幂级数展开式的应用 .....	260
一、近似计算(260) 二、欧拉公式(265) 习题 11-6(267)	
*第七节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质 ..	268
一、函数项级数的一致收敛性(268) 二、一致收敛级数的基本性质(272)	
*习题 11-7(277)	
第八节 傅立叶级数 .....	278
一、三角级数 三角函数系的正交性(278) 二、函数展开成傅立叶级数(281) 习题 11-8(289)	
第九节 正弦级数和余弦级数 .....	239
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数(289) 二、函数展开成正弦级数或余弦级数(294) 习题 11-9(296)	
第十节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数 .....	296
习题 11-10(300)	
*第十一节 傅立叶级数的复数形式 .....	300
*习题 11-11(303)	
<b>第十二章 微分方程 .....</b>	<b>305</b>

881	第一节 微分方程的基本概念 .....	305
	习题 12-1(310) .....	
	第二节 可分离变量的微分方程 .....	311
708	习题 12-2(318) .....	
702	第三节 齐次方程 .....	319
	一、齐次方程(319) *二、可化为齐次的方程(323) 习题 12-3(325)	
819	第四节 一阶线性微分方程 .....	326
712	一、线性方程(326) 二、贝努利方程(330) 习题 12-4(331)	
	第五节 全微分方程 .....	332
	习题 12-5(335)	
262	*第六节 欧拉-柯西近似法 .....	336
	*习题 12-6(339)	
118	第七节 可降阶的高阶微分方程 .....	340
	一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(340) 二、 $y''=f(x, y)$ 型的微分方程(342) 三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程(346) 习题 12-7(349)	
172	第八节 高阶线性微分方程及其解的结构 .....	350
	一、二阶线性微分方程举例(350) 二、线性微分方程的解的结构(353) 习题 12-8(356)	
076	第九节 二阶常系数齐次线性微分方程 .....	357
	习题 12-9(367)	
818	第十节 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	368
	一、 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型(369) 二、 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$ 型(372) 习题 12-10(376)	
672	*第十一节 欧拉方程 .....	377
	*习题 12-11(379)	
072	*第十二节 微分方程的幂级数解法举例 .....	379
	*习题 12-12(384)	
	*第十三节 常系数线性微分方程组解法举例 .....	384
352	*习题 12-13(387)	

## 第八章 多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的都是只有一个自变量的函数，这种函数叫做一元函数。但通常我们所研究的问题往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形。这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题。本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用。讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推。

### 第一节 多元函数的基本概念

#### 一、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

**例1** 圆柱体的体积  $V$  和它的底半径  $r$ 、高  $h$  之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里， $V$  是随着  $r$ 、 $h$  的变化而变化的，当  $r$ 、 $h$  在一定范围 ( $r > 0$ ， $h > 0$ ) 内取定一对值时， $V$  的对应值就随之确定。

**例2** 一定量的理想气体的压强  $p$ 、体积  $V$  和绝对温度  $T$  之间具有关系

$$p = \frac{RT}{V},$$

其中  $R$  为常数。这里， $p$  是随着  $V$ 、 $T$  的变化而变化的，当  $V$ 、 $T$  在一定范围 ( $V > 0$ ， $T > 0^\circ\text{K}$ ) 内取定一对值时， $p$  的对应值就随之确定。

例3 设  $R$  是电阻  $R_1$ 、 $R_2$  并联后的总电阻，根据电学知道，它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

这里， $R$  是随着  $R_1$ 、 $R_2$  的变化而变化的，当  $R_1$ 、 $R_2$  在一定范围 ( $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ ) 内取定一对值时， $R$  的对应值就随之确定。

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有一个共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义。

定义1 设有变量  $x$ 、 $y$  和  $z$ 。如果当变量  $x$ 、 $y$  在一定范围内任意取定一对值时，量  $z$  按照一定的法则，总有确定的数值和它们对应，则  $z$  叫做  $x$ 、 $y$  的二元函数，记作

$$z = f(x, y) \quad \text{或} \quad z = z(x, y),$$

其中变量  $x$ 、 $y$  叫做自变量，而  $z$  也叫做因变量。自变量  $x$ 、 $y$  的变化范围叫做函数的定义域。

类似地可以定义三元函数  $u = f(x, y, z)$  以及三元以上的函数。

例如，长方体体积  $V$  是它的长  $a$ 、宽  $b$  和高  $c$  的函数

$$V = abc;$$

电流通过电阻时所作的功  $P$  是电阻  $R$ 、电流  $I$  和时间  $t$  的函数

$$P = I^2 R t;$$

等等。

二元以及二元以上的函数统称为多元函数。

如同我们用  $x$  轴上的点来表示数值  $x$  一样，我们可用  $xOy$  平面上的点  $P(x, y)$  来表示一对有序数组  $x, y$ 。于是函数  $z = f(x, y)$  也可简记为  $z = f(P)$ ，而称  $z$  为点  $P$  的函数。类似地，可用空间内的一点  $P(x, y, z)$  来表示有序数组  $x, y, z$ 。函数  $u = f(x, y, z)$  也就可简记为  $u = f(P)$ ，等等。

关于函数的定义域,与一元函数相类似,我们作如下约定:在一般地讨论用算式表达的二元函数  $z=f(x, y)$  时,就以使这个算式有确定值的自变量  $x, y$  的变化范围所确定的点集(具有某种性质的点的全体)为这个函数的定义域.例如,函数  $z=\ln(x+y)$  的定义域为适合  $x+y>0$  的点的全体,它是一个平面点集,其中的点  $(x, y)$  具有性质:  $x+y>0$ , 我们把它简记为  $\{(x, y) | x+y>0\}$  (图 8-1). 又如,函数  $z=\arcsin(x^2+y^2)$  的定义域为适合  $x^2+y^2\leq 1$  的点的全体,即平面点集  $\{(x, y) | x^2+y^2\leq 1\}$  (图 8-2).

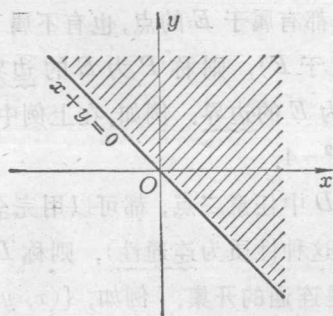


图 8-1

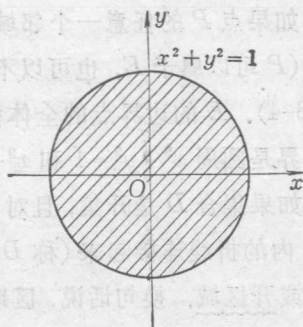


图 8-2

常见的二元函数的定义域是平面上的一个区域.为了确切地说明区域的概念,我们引入以下一些定义.

以  $P_0(x_0, y_0)$  为中心、 $\delta>0$  为半径的圆的内部的点的全体,即平面点集  $\{(x, y) | (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ , 称为点  $P_0$  的  $\delta$  邻域, 记为  $N(P_0, \delta)$ .

设  $E$  为平面上的一个点集,如果点  $P$  属于  $E$ , 且存在某个邻域,使这邻域中的点都属于  $E$ , 则称  $P$  为集合  $E$  的内点(图 8-3).

如果集合  $E$  的点都是  $E$  的内点, 则称  $E$  为开集. 例如, 集合  $E_1=\{(x, y) | 1<x^2+y^2<4\}$  中每个点都是  $E_1$  的内点, 故  $E_1$  为开集.



图 8-3

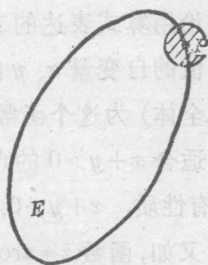


图 8-4

如果点  $P$  的任意一个邻域中都有属于  $E$  的点, 也有不属于  $E$  的点 ( $P$  可以属于  $E$ , 也可以不属于  $E$ ), 则称  $P$  为  $E$  的边界点 (图 8-4).  $E$  的边界点的全体称为  $E$  的边界. 例如, 在上例中  $E_1$  的边界是圆周  $x^2 + y^2 = 1$  和  $x^2 + y^2 = 4$ .

如果集合  $D$  是开集, 且对于  $D$  中任意二点, 都可以用完全落在  $D$  内的折线连接起来 (称  $D$  的这种性质为连通性), 则称  $D$  为区域或开区域. 换句话说, 区域是连通的开集. 例如,  $\{(x, y) | x + y > 0\}$ ,  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  都是区域.

区域连同它的边界一起, 称为闭区域. 例如,  $\{(x, y) | x + y \geq 0\}$ ,  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  都是闭区域.

以后在不需要区分开区域和闭区域时, 我们统称它们为区域, 并用字母  $D$  表示.

如果点集  $E$  可以被包含在一个以原点为中心的圆内, 则称  $E$  为有界点集, 否则称为无界点集. 例如,  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  是有界闭区域,  $\{(x, y) | x + y > 0\}$  是无界开区域.

上述关于平面点集的内点、邻域、开集、区域、闭区域等概念可以完全类似地推广到空间点集的情形.

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数  $y = f(x)$  的图形, 一般说来, 它是平面上的一条曲线. 对于二元函数  $z = f(x, y)$ ,

我们可以利用空间直角坐标系来表示它的图形. 设函数  $z=f(x, y)$  的定义域为  $xOy$  坐标面上某一区域  $D$ , 对于  $D$  中的每一点  $P(x, y)$ , 在空间可以作出一点  $M(x, y, f(x, y))$  与它对应. 当点  $P(x, y)$  在  $D$  中变动时, 点  $M(x, y, f(x, y))$  就在空间相应地变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面 (图 8-5). 这个曲面就称为二元函数  $z=f(x, y)$  的图形. 因此, 二元函数可用一个曲面作为它的几何表示.

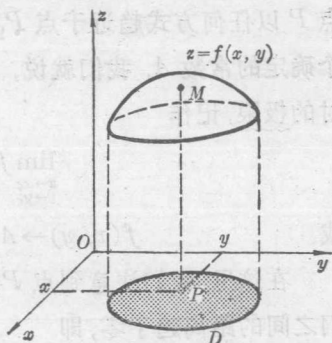


图 8-5

例如, 由空间解析几何知道, 线性函数

$$z = ax + by + c$$

的图形是一个平面; 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

所确定的函数  $z=f(x, y)$  的图形是球心在原点、半径为  $a$  的球面. 它的定义域是圆形闭区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ . 在  $D$  的内部任一点  $(x, y)$  处, 这函数有两个对应值, 一个为  $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 另一个为  $-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . 因此, 这是多值函数. 取正值的一个表示上半球面, 取负值的一个表示下半球面. 以后除了对二元函数  $z=f(x, y)$  另作声明外, 总假定它是单值的; 如果遇到多值函数, 我们可以把它拆成几个单值函数后再分别加以讨论.

## 二、二元函数的极限

现在来讨论二元函数  $z=f(x, y)$  当自变量  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ , 即点  $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$  时的极限定义.

设函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义(点

$P_0$  可以除外),  $P(x, y)$  是该邻域内异于  $P_0$  的任意一点. 如果当点  $P$  以任何方式趋近于点  $P_0$  时, 函数的对应值  $f(x, y)$  趋近于一个确定的常数  $A$ , 我们就说,  $A$  是函数  $z=f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

或  $f(x, y) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0).$

在这里, 我们注意到点  $P(x, y)$  趋近于点  $P_0(x_0, y_0)$ , 就是它们之间的距离趋于零, 即

$$\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \rightarrow 0.$$

因此上述极限记号也可记作

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0).$$

类似于一元函数极限的“ $\varepsilon$ - $\delta$ ”定义, 上述极限也可用“ $\varepsilon$ - $\delta$ ”的方式定义如下.

**定义 2** 设函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义(点  $P_0$  可以除外), 如果对于每一个任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在一个正数  $\delta$ , 使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点  $P(x, y)$ , 都有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称  $A$  为函数  $z=f(x, y)$  当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时的极限<sup>①</sup>.

利用点的邻域概念, 上述极限定义也可描述为: 对于点  $A$  的任何邻域  $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ , 总存在点  $P_0$  的  $\delta$  邻域  $N(P_0, \delta)$ , 使这个邻域内不与  $P_0$  重合的任意一点  $P$  的函数值  $f(P)=f(x, y)$ ,

<sup>①</sup> 如果函数  $z=f(x, y)$  在  $P_0$  的任一邻域中除  $P_0$  外, 尚有不属于函数的定义域  $D$  的点, 但又总有异于  $P_0$  的属于  $D$  的点, 则只要对  $D$  内适合不等式  $0 < |PP_0| < \delta$  的点  $P$ , 有不等式(1)成立, 便称函数  $f(P)$  当  $P \rightarrow P_0$  时的极限为  $A$ . 在后面讨论函数的连续性及函数的偏导数等问题时, 对上述这类点的情形, 也作类似的规定, 不再说明.

都落在  $A$  的  $\varepsilon$  邻域内. 从几何上来说, 就是在  $P_0$  的  $\delta$  邻域内 ( $P_0$  可以除外), 函数  $z=f(x, y)$  的图形将位于两个平行平面  $z=A-\varepsilon$  和  $z=A+\varepsilon$  之间.

$\forall \varepsilon, \exists \delta, 0 < \delta < \varepsilon$

利用点函数的概念, 上述极限定义可用与一元函数的极限完全相同的形式来描述: 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在一个正数  $\delta$ , 使当  $0 < |PP_0| < \delta$  时, 都有  $|f(P) - A| < \varepsilon$  成立. 这一形式的极限定义, 对二元以上的函数也完全适用.

为了区别于一元函数的极限, 我们把上述二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 设  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ),

求证  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ .

证 因为

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| = |x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

可见, 对任给  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ , 则当  $0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$  时, 总有

$$N(P_0, \delta) \quad \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

成立, 所以  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ .

我们必须注意, 所谓二重极限存在, 是指  $P(x, y)$  以任何方式趋近于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 函数都无限接近于  $A$ . 因此, 如果  $P(x, y)$  以某一特殊方式, 例如沿着一条定直线或定曲线趋近于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 即使函数无限接近于某一确定值, 我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来, 如果当  $P(x, y)$  以不同方式趋近于  $P_0(x_0, y_0)$  时, 函数趋近于不同的值, 那末就可以断定这函数的极限不存在. 下面用例子来说明这种情形.

### 考察函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

显然, 当点  $P(x, y)$  沿  $x$  轴趋近于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0;$$

又当点  $P(x, y)$  沿  $y$  轴趋近于点  $(0, 0)$  时,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

虽然点  $P(x, y)$  以上述两种特殊方式(沿  $x$  轴或沿  $y$  轴)趋近于原点时函数的极限存在并且相等, 但是极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  并不存在.

这是因为当点  $P(x, y)$  沿着直线  $y=kx$  趋近于点  $(0, 0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着  $k$  的不同而改变的.

### 三、二元函数的连续性

明白了极限的概念, 就不难讨论二元函数的连续性问题. 设函数  $z=f(x, y)$  在区域  $D$  内有定义,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的一个内点,  $P(x, y)$  是在  $D$  内而且是  $P_0$  的一个邻域内的任意点, 我们给出二元函数在点  $P_0$  为连续的定义如下:

**定义 3** 如果当  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  时, 函数的极限存在, 且等于它在点  $P_0(x_0, y_0)$  处的函数值, 即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

那末就称函数  $z=f(x, y)$  在点  $P_0$  处连续.

换句话说, 如果当点  $P(x, y)$  与点  $P_0(x_0, y_0)$  的距离趋于零时, 差值  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  也趋于零, 那末二元函数在点  $P_0$  是

$$P_0(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

连续的。

采用“ $\epsilon$ - $\delta$ ”的方式以及利用点的邻域概念来描述函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0$  处连续的定义, 读者可自行给出。

如果二元函数在区域  $D$  内各点都连续, 那末就称函数在  $D$  内连续。二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面。例如连续函数

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 \leq 1)$$

的图形是球心在原点、半径等于 1 的上半球面。

函数的不连续点称为间断点。上面已经讨论过的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时的极限不存在, 所以点  $(0, 0)$  是函数的一个间断点。二元函数的间断点可以形成一条曲线, 例如函数

$$z = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

在圆周  $x^2 + y^2 = 1$  上没有定义, 所以该圆周上各点都是间断点。

类似地可给出二元以上的函数在某点是连续的定义, 在此不再赘述。

与闭区间上一元连续函数的性质相类似, 在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质。

**性质 1(最大值和最小值定理)** 在有界闭区域  $D$  上的多元连续函数, 在该区域上至少取得它的最大值和最小值各一次。这就是说, 在  $D$  上至少有一点  $P_1$  及一点  $P_2$ , 使得  $f(P_1)$  为最大值而  $f(P_2)$  为最小值。

$$f(P_2) \leq f(P) \leq f(P_1) \quad (\text{点 } P \text{ 在 } D \text{ 上}).$$

**性质 2(介值定理)** 在有界闭区域上的多元连续函数, 如果取得两个不同的函数值, 则它在该区域上取得介于这两个值之间

的任何值至少一次。特殊地，如果  $\mu$  是在函数的最小值  $m$  和最大值  $M$  之间的一个数，则在  $D$  上至少有一点  $Q$ ，使得  $f(Q) = \mu$ 。

**\*性质 3(一致连续性定理)** 在有界闭区域上的多元连续函数必定在该区域上一致连续。这就是说，若  $f(P)$  在有界闭区域  $D$  上连续，那末对于任意给定的正数  $\varepsilon$ ，总存在一个正数  $\delta$ ，使得对于区域  $D$  上的任意二点  $P_1, P_2$ ，只要当  $|P_1 P_2| < \delta$  时，都有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$$

成立。

我们指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数。

与一元的初等函数相类似，多元初等函数也是可由一个式子所表示的函数，而这个式子是由含多个自变量(如  $x, y$  等)的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的。例如，

$$\frac{x+x^2-y^2}{1+x^2}, \sin(x+y), e^{x+y} \cdot \ln(1+x^2+y^2) \text{ 等都是多元初等函数。}$$

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，我们进一步可得如下结论：

**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的。**

由多元初等函数的连续性，如要找它在一点  $P_0$  处的极限值，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

例如 
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} (x^2 - 2xy + 3y^2) = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 3,$$