第一章　实数集与函数

第一讲　实数的绝对值与实数集的确界

目的要求：

(1)理解绝对值的概念，掌握简单的绝对值不等式；

(2)深入理解有界数集的上、下确界的概念，能用确界定义证明确界的一些性质，并掌握这些性质。

先介绍几个有关绝对值的例题。

例1　设 a、b 为实数，证明：

(1)$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$；

(2)$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$。

证：由于 $|a-b|$ 表示数轴上的点 a 与 b 的距离，对二实数 a、b 必有

$$\max\{a,b\}-\min\{a,b\}=|a-b|,$$
$$\max\{a,b\}+\min\{a,b\}=a+b。$$

由上两式便可得到：

$$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$

$$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)。\ ▌$$

例2　设 a、b、c 为三个任意实数，证明：

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leq|b-c|。\qquad (A)$$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证法 1： 当 $b=c=0$ 时不等式不证自明。当 $|b|+|c|\neq 0$ 时，

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|=\frac{|a^2+b^2-(a^2+c^2)|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\leqslant\frac{|b^2-c^2|}{|b|+|c|}\leqslant|b-c|。$$

证法 2： 注意到 $\sqrt{h^2}=|h|$ 且 $|h_1|\leqslant|h_2|\Longleftrightarrow h_1^2\leqslant h_2^2$，只需证明

$$(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2})^2\leqslant(b-c)^2 \qquad (B)$$

即

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}\geqslant a^2+bc。$$

此式又等价于

$$(a^2+b^2)(a^2+c^2)\geqslant(a^2+bc)^2,$$

即

$$a^2(b^2+c^2)\geqslant 2a^2bc。\qquad (C)$$

由平均值不等式知 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，于是 (C) 式成立，从而 (A) 式成立。

下面说明 (A) 式的几何意义：

由于 $|b-c|$ 为数轴上 b、c 两点（坐标为 b、c 的两点）的距离，$\sqrt{a^2+b^2}$、$\sqrt{a^2+c^2}$ 分别是直角边长为 a、b 和 a、c 的直角三角形的斜边长，于是 (A) 式便表示图 1－1 中三角形 ABC（设 $b>c$）的三边关系：$BC\geqslant AB-AC$。（若 $b=c$，(A) 式取等号，三角形退化为直线段。）

(A) 式也可解释为：直角三角形 AOC 的直角边 OC 增至

OB 时，其增量 $|b-c|$ 不小于斜边 AC 增至 AB 后的增量。 ▌

本题证明中，证法 1 于(A)的左边同时乘除($\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}$)的技巧，对解题起了重要作用。

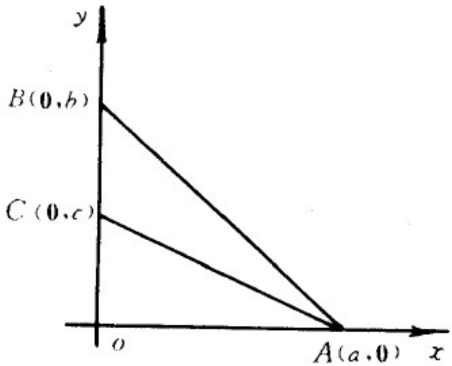

图 1—1

利用与例 2 证法 1 类似的方法，读者试证：若 $a_i, b_i \in \mathbf{R}$，($i=1,2,\cdots,n$；$\mathbf{R}$ 为全体实数构成的集合)，则

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|。$$

数集上、下确界的定义和确界存在原理是十分重要的，必须牢记。对于一个数集来说，下面的三个基本点也要掌握：

(1)上(下)确界是唯一的；

(2)若对任意 $x\in S$，有 $x\leqslant y$，则 $\inf S\leqslant \sup S\leqslant y$；若对任意 $x\in S$，有 $x\geqslant y$，则 $\sup S\geqslant \inf S\geqslant y$(其中 y 为任意一个实数，也可为 $+\infty$ 或 $-\infty$)；

(3)$\sup S=\eta\in S \Longleftrightarrow \eta=\max S$,

$\inf S=\xi\in S \Longleftrightarrow \xi=\min S$。

在今后的叙述中，常用符号“$\forall$ ”代替“任意的”或“对于任意的”，用符号“$\exists$ ”代替“存在”或“一定有”。

例 3 设 $S=\{x\mid x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}, n=1,2,3,\cdots\}$，指出 S 的上、下确界并加以验证。

解：$\forall\ x\in S$，有 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\leqslant x<\frac{1}{2}$，又由于 $x_1=\frac{1}{6}=\min S\in S$，所以 $\inf S=\frac{1}{6}$。

通过观察估计有 $\sup S=\frac{1}{2}$，下面用定义验证：

(1)$\forall\ x\in S$，有 $x<\frac{1}{2}$；

(2)$\forall\ \alpha<\frac{1}{2}$，要找 $x_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0+1}\in S$，使 $x_0>\alpha$。由 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0+1}>\alpha$ 知，需要 $\frac{1}{2n_0+1}<\frac{1}{2}-\alpha$。解此不等式可见，取 n_0 为满足 $n_0>\frac{1}{2}(\frac{2}{1-2\alpha}-1)$ 的任意一个正整数都行，即 $\exists\ x_0\in S$，使 $x_0>\alpha$。

由(1)、(2)即得证 $\sup S=\frac{1}{2}$。▌

现利用例 3 前所指出的性质(2)证明一个命题。

例 4 设 A、B 为非空有界数集，若对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$，都有 $x\leqslant y$，则 $\sup A\leqslant\inf B$。

证：由确界原理，$\sup A$ 与 $\inf B$ 存在。因为对任意取定的 $y\in B$，对任意的 $x\in A$ 有 $x\leqslant y$，即 y 是 A 的上界，所以 $\sup A\leqslant y$。由 $y\in B$ 的任意性知 $\sup A$ 为 B 的下界，所以 $\sup A\leqslant\inf B$。▌

下面继续考虑具有某种关系的数集确界所具有的性质。

例 5 设 A、B 都是非空有界数集，记 $S=A\cup B$，证明：$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$。

证：由确界原理，$\sup A$ 与 $\sup B$ 存在，不妨设 $\sup A\leqslant\sup B=\eta$。

(1) $\forall\ x\in B, x\leqslant\eta$；$\forall\ x\in A, x\leqslant\sup A\leqslant\eta$，从而 $\forall\ x\in A\cup B=S$，都有 $x\leqslant\eta$。

(2) $\forall\ \alpha<\eta, \exists\ x_0\in B\subset S$，使得 $x_0>\alpha$ 。

由定义，$\sup S=\eta=\max\{\sup A,\sup B\}$ 得证。▌

请读者试证明：$\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$，其中 $S=A\cup B$，A、B 非空有界。

例 6 设 A,B 为非空有界数集，$A\subset B$，证明：(1) $\inf A\geqslant\inf B$；(2) $\sup A\leqslant\sup B$。

证：只证(1)，(2)的证明类似。

证法 1： 由确界原理 $\inf A$ 与 $\inf B$ 存在。$\forall\ x\in B, x\geqslant\inf B$，由于 $A\subset B$，$\forall\ x\in A$ 也有 $x\in B$，于是 $\forall\ x\in A$ 也有 $x\geqslant\inf B$。可见 $\inf B$ 是 A 的一个下界，从而有 $\inf A\geqslant\inf B$。

证法 2： (反证法)由确界原理 $\inf A$ 与 $\inf B$ 存在。倘若 $\xi_1=\inf A<\xi_2=\inf B$，则由 $\xi_2>\inf A$ 知，$\exists\ x_0\in A$，使 $x_0<\xi_2$，但对任意 $x\in B$，有 $x\geqslant\xi_2$，于是 $x_0\notin B$，此与 $A\subset B$ 矛盾。故 $\xi_1\geqslant\xi_2$。

证法 3： 因 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B-A)$。由例 5 结论得：

$\sup B=\max\{\sup A,\sup(B-A)\}\geqslant\sup A$,

$\inf B=\min\{\inf A,\inf(B-A)\}\leqslant\inf A$。▌

例 7 设 S 为非空有界数集，定义 $S^-=\{x\mid -x\in S\}$。证明：(1) $\inf S^-=-\sup S$；(2) $\sup S^-=-\inf S$。

证： 只证明(1)，(2)的证明留给读者。

证法 1： 由确界原理，$\sup S$ 与 $\inf S^-$ 存在。设 $\xi=\inf S^-$，$\eta=\sup S$，则 $\forall\ x\in S^-$，有 $x\geqslant\xi$，于是 $\forall\ -x\in S, -x\leqslant-\xi$，由此有

$$\sup S=\sup\{-x \mid x\in S^-\}\leqslant -\xi,$$

即 $\xi\leqslant-\eta$。另一方面，$\forall\ -x\in S$，$-x\leqslant\eta$，于是 $\forall\ x\in S^-$，$x\geqslant-\eta$，由此有 $\xi=\inf S^-\geqslant-\eta$。比较即得 $\xi=-\eta$，即 $-\sup S=\inf S^-$。

证法 2： 当 S 有上界时，S^- 有下界，$\inf S^-=\xi$ 与 $\sup S=\eta$ 存在，由于 $\inf S^-=\xi$，有：

(i) $\forall\ y\in S$，$-y\in S^-$，$-y\geqslant\xi$，$y\leqslant-\xi$，即 $-\xi$ 为 S 的上界；

(ii) $\forall\ \alpha<-\xi$，$-\alpha>\xi$，令 $-\alpha=\beta$，存在 $-y_0\in S^-$，使 $-y_0<\beta=-\alpha$，即 $\exists\ y_0\in S$，使 $y_0>\alpha$，亦即 $-\xi$ 为 S 的最小上界，于是 $\sup S=-\xi$，即 $\xi=\inf S^-=\sup S$。▌

注： 在例 7 中，因 $-x\in S$ 时，$x\in S^-$，故 $x\in S$ 时，$-x\in S^-$，于是有 $S=\{x \mid -x\in S^-\}$，记 $S_1=S^-$，便有 $S=S_1^-$，$S_1^-=\{x \mid -x\in S_1\}$，由已证的(1)知，$\inf S_1^-=-\sup S_1$，由此即得(2)：$\sup S^-=-\inf S$。

此外，由例 4、6、7 还可以看到，使用例 3 前所述的性质(2)，常可使证明(比直接用定义)要简单些。

第二讲　函数概念、函数运算及初等函数

目的要求：

(1)深刻理解函数概念，明确确定函数的两个要素，熟悉函数的记号；

(2)深刻理解复合函数、反函数和初等函数的概念；

(3)掌握确定复合函数定义域的方法，掌握函数存在的条件。

例 1　以下各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\log_a x^2$，$g(x)=2\log_a x$；

(2)$f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$;

(3)$f(x)=1, g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(4)$f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases} h(x)=x\operatorname{sgn}x$。

解:确定函数的两个要素是定义域 D 和对应法则 f。要判定两个函数是否相同,首先可判定它们的定义域是否相同,如果不同,则这两个函数不同。如果定义域相同,在此基础上判定它们的对应法则是否相同,即相同的 x 处的函数值是否相同。

对于(1),$f(x)$与 $g(x)$是不同的,因为它们的定义域不同。$D_f=\{x|x\neq 0\}, D_g=\{x|x>0\}$。

对于(2),$f(x)$与 $g(x)$是不同的,因为它们的定义域不同。$D_f=\{x|x>1\}, D_g=\{x||x|>1\}$。

对于(3),$f(x)$与 $g(x)$是不同的,因为它们的对应法不同。当 $x_0<0$ 时,$f(x_0)=1$,但 $g(x_0)=-1$。

对于(4),$f(x)$、$g(x)$和 $h(x)$都相同。它们的定义域和对应法则(同一 x 处的函数值)都是相同的。▌

例 2 (1)设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1。\end{cases}$求 $f(1)$与 $f[f(1)]$;

(2)设 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$。

解:求分段函数 $f(x)$在 x 处的值,关键在于弄清 x 所在的范围,及在该范围内 $f(x)$的表达式,然后把 x 代入相应表达式内求值。

当 $x=1$ 时,$f(x)=x+1$,即 $f(1)=1+1=2$;

当 $\bar{x}=f(1)=2>1$ 时,$f(\bar{x})=\bar{x}^2$,即 $f[f(1)]=2^2=4$。

(2)令 $u=\dfrac{1}{x}$,则 $x=\dfrac{1}{u}$,代入 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$得:

$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+(\frac{1}{u})^2}=\frac{1}{u}+\frac{1}{|u|}\sqrt{u^2+1},$$

于是 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+1}$。▌

例 3 设$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0。\end{cases}$$

求复合函数 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$。

解:易知 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$在$(-\infty,+\infty)$上都有定义。

当 $x\leqslant 0$ 时,$g(x)=x\leqslant 0$,所以 $f[g(x)]=-x-1$;而当 $x>0$ 时,有 $g(x)=-x^2<0$,所以 $f[g(x)]=-(-x^2)-1=x^2-1$。

由此得: $f[g(x)]=\begin{cases}-x-1, x\leqslant 0,\\ x^2-1, x>0。\end{cases}$

因为当 $x<-1$ 时 $f(x)=-x-1>0$,所以 $g[f(x)]=-(-x-1)^2=-(x+1)^2$;而当$-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$f(x)=-x-1\leqslant 0$,所以 $g[f(x)]=-x-1$;当 $x>0$ 时,$f(x)=x>0$,所以 $g[f(x)]=-x^2$。由此得:

$$g[f(x)]=\begin{cases}-(x+1)^2, & x<-1\quad,\\ -x-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0。\end{cases}$$ ▌

注意: 复合函数 $f[g(x)]$的定义域是 $g(x)$的定义域的子集,而 $g[f(x)]$的定义域是 $f(x)$的定义域的子集,它们一般是不同的。

例 4 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$。

解： $$f[f(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$
用数学归纳法可证：
$$f[f[\cdots f(x)]]=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}。\blacksquare$$

例 5 设 $f(x)\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ -x+3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求其反函数。

解： 当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x^2$，反函数值是 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,1)$；当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=-x+3$，反函数值是 $f^{-1}(x)=-x+3$，$x\in[1,2]$。故所求反函数为
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ,0\leqslant x<1,\\ -x+3, & 1\leqslant x\leqslant 2。\end{cases}\blacksquare$$
请读者试自行画出 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象来。

例 6 下列函数由哪些基本初等函数（或多项式）复合而成？

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=\sec^2 e^{x^2+1}$；　　(4) $y=\log_b \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$。

解：(1) 求函数 $y=\sin^2 x$ 在 x_0 处的值，第一步是计算 $\sin x_0$，设为 u_0，即 $u_0=\sin x_0$；第二步是计算 u_0^2，即 $y=u_0^2$。故函数 $y=\sin^2 x$ 是由基本初等函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成。

(2) 函数 $y=\sin x^2$ 由基本初等函数 $y=\sin u$，$u=x^2$ 复合而成。

(3) 为求函数 $y=\sec^2 e^{x^2+1}$ 在 x_0 处的值 y_0，需求出

$\sec e^{x^2+1}$在 x_0 的值 t_0，再取平方便可得 $y_0=t_0^2$。因此，$y=\sec^2 e^{x^2+1}$由函数 $y=t^2$，$t=\sec e^{x^2+1}$复合而成。而 $t=\sec e^{x^2+1}$仍是复合函数，重复类似过程，可得函数 $t=\sec e^{x^2+1}$由函数 $t=\sec s$，$s=e^u$，$u=x^2+1$ 复合而成。由此得 $y=\sec^2 e^{x^2+1}$由函数 $y=t^2$，$t=\sec s$，$s=e^u$，$u=x^2+1$ 复合而成。

(4)函数 $y=\log_b \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x}$由函数 $y=\log_b u$，$u=\operatorname{arctg} v$，$v=\dfrac{1}{s}$，$s=1+x$ 复合而成。▌

例 7 证明：若对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$有

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),$$

且 $f(x)\neq 0$，则

(1)$[f(x)]^2=\dfrac{1}{2}[f(2x)+1]$；

(2)$[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1$.

证： (1)在 $2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$中令 $y=0$，有 $2f(x)f(0)=2f(x)$。因为 $f(x)\neq 0$，所以 $f(0)=1$。

在$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$中令 $x=y$，有

$$2[f(x)]^2=f(2x)+f(0)=f(2x)+1,$$

即$[f(x)]^2=\dfrac{1}{2}[f(2x)+1]$。

(2)在 $2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$中用 $x+y$ 代替 x，用 $x-y$ 代替 y，就得

$$2f(x+y)f(x-y)=f(2x)+f(2y)。$$

而由(1)的结论：$f(2x)=2[f(x)]^2-1$，$f(2y)=2[f(y)]^2-1$，所以得

$$\begin{aligned}2f(x+y)f(x-y)&=2[f(x)]^2-1+2[f(y)]^2-1\\&=2([f(x)]^2+[f(y)]^2)-2,\end{aligned}$$

即：$[f(x)]^2+[f(g)]^2=f(x+y)f(x-y)+1$。▌

第三讲　具有某些特性的函数

目的要求：

掌握有界函数，单调函数，奇（偶）函数，周期函数的特征及其判定方法。

例 1　用定义证明函数 $f(x)=x-a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格递增函数，其中 $0\leqslant a<1$。

证：$\forall\ x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2-x_1)-a(\sin x_2-\sin x_1)\\&=(x_2-x_1)-2a\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}。\end{aligned}$$

因 $\left|\cos\frac{x_2+x_1}{2}\right|\leqslant 1$，$\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x_2-x_1|=\frac{1}{2}(x_2-x_1)$（这里用到了 $|\sin x|\leqslant|x|$）。所以

$$\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}\leqslant\frac{1}{2}|x_2-x_1|=\frac{1}{2}(x_2-x_1),$$

于是

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&\geqslant(x_2-x_1)-2a\cdot\frac{1}{2}(x_2-x_1)\\&=(x_2-x_1)(1-a)>0。\end{aligned}$$

由定义，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加，得证。▌

例 2　设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内递增，用定义证明

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在 (a,b) 内也是递增函数。

证法 1：$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$ 有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),g(x_1)\leqslant g(x_2)。$$

因 $f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant\varphi(x_2),g(x_1)\leqslant g(x_2)\leqslant\varphi(x_2)$,所以

$$\varphi(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant\varphi(x_2)。$$

因 $\psi(x_1)\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_2),\psi(x_1)\leqslant g(x_1)\leqslant g(x_2)$,所以

$$\psi(x_1)\leqslant\min\{f(x_2),g(x_2)\}=\psi(x_2)。\blacksquare$$

本例也可以用下述方法来证明(利用第一讲例 1)。它虽然不如证法 1 简单,但它使用了数学分析中常用的一种技巧:必要时加上一个量,又减去同一个量,并利用绝对值不等式的性质进行适当放大。值得参考。

证法 2:$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,由假设 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,$g(x_1)\leqslant g(x_2)$,于是

$$\begin{aligned}
&2(\varphi(x_2)-\varphi(x_1))=2\varphi(x_2)-2\varphi(x_1)\\
&=f(x_2)+g(x_2)+|f(x_2)-g(x_2)|-(f(x_1)+g(x_1)+\\
&|f(x_1)-g(x_1)|)\\
&=f(x_2)-f(x_1)+g(x_2)-g(x_1)+|f(x_2)-g(x_2)|\\
&-|f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-g(x_2)+g(x_2)-g(x_1)|\\
&\geqslant f(x_2)-f(x_1)+g(x_2)-g(x_1)+|f(x_2)-g(x_2)|\\
&-|f(x_1)-f(x_2)|-|f(x_2)-g(x_2)|-|g(x_2)-g(x_1)|\\
&=0
\end{aligned}$$

于是 $\varphi(x_2)\geqslant\varphi(x_1)$,$\varphi(x)$在$(a,b)$内递增。

类似可证:$2(\psi(x_2)-\psi(x_1))\geqslant0$,$\psi(x)$在$(a,b)$内也是递增函数。$\blacksquare$

例 3 证明:(1)奇函数与偶函数的乘积是奇函数;

(2)两个奇函数(或两个偶函数)的乘积是偶函数。

证:设 $f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,则有

$$f(-x)=-f(x),g(-x)=g(x),$$

$$f(-x)g(-x)=(-f(x))g(x)=-(f(x)g(x)),$$

所以 $f(x)g(x)$是奇函数。

(2)的证明仍用定义易得(留给读者)。 ▌

例 4 讨论狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的周期性。

解:任取有理数 $r>0$,当 x 为有理数时,$x+r$ 也为有理数,当 x 为无理数时,$x+r$ 也为无理数,因此

$$D(x+r)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

即 $D(x+r)=D(x)$。可见任意大于零的有理数都是狄利克雷函数的周期。由于正有理数中没有最小有理数,因此它没有基本(有理数)周期。

对于任意无理数 $\alpha>0$,取 $x_0=-\alpha$,则 $D(x_0)=0$,但 $D(x_0+\alpha)=D(0)=1\neq D(x_0)$,所以任意大于零的无理数 α 都不是狄利克雷函数的周期。 ▌

例 5 设 $f(x)$,$g(x)$都是递增函数。证明:若 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$,则 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$。

证:由于 $f(x)\leqslant g(x)$对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$成立,$f(x)$为递增函数,因此 $f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$。由于 $g(x)\leqslant h(x)$对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$成立,$g(x)$为递增函数,因此 $g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)]$。故有 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$成立。 ▌

例 6 设函数 $f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上以 h 为周期的周期函数,a 为实数。证明:若 $f(x)$在$[a,a+h]$上有界,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界。

证:因函数 $f(x)$在$[a,a+h]$上有界,所以,$\exists\ M>0$,$\forall\ x\in$

$[a,a+h]$，有 $|f(x)|\leqslant M$。$\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，存在整数 n 及实数 $x_0\in[a,a+h]$，使得 $x=x_0+nh$，从而有

$$|f(x)|=|f(x_0+nh)|=|f(x_0)|\leqslant M。$$

按定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界得证。▍

注意：在本题的证明中，把任意（固定的）$x\in(-\infty,+\infty)$，表示为 $x=x_0+nh$，这是关键的一步，以后当要把周期函数在 $[a,a+h]$ 上具有的性质推广到 $(-\infty,+\infty)$ 上时，常用到这样的表示方法。

在考虑无限区间上的问题时，常希望能将其转化为在有限区间上的问题进行考虑，例 6 即是这种考虑方法的一个代表。

例 7 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为在 D 上有界的函数，将 $\inf\limits_{x\in D}f(x)$，$\sup\limits_{x\in D}f(x)$ 简记为 $\inf f(x)$，$\sup f(x)$（其余的确界也都指在 $x\in D$ 上取），证明：

$$\begin{aligned}&\inf f(x)+\inf g(x)\leqslant\inf\{f(x)+g(x)\}\\&\leqslant\inf f(x)+\sup g(x)\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}\\&\leqslant\sup f(x)+\sup g(x)。\end{aligned}$$

证：(1) $\forall\ x\in D$，$\inf f(x)+\inf g(x)\leqslant f(x)+g(x)$，即 $\inf f(x)+\inf g(x)$ 是函数 $f(x)+g(x)\quad(x\in D)$ 的一个下界。由下确界定义即可得

$$\inf f(x)+\inf g(x)\leqslant\inf\{f(x)+g(x)\};$$

(2) $\forall\ x\in D$，$\inf\{f(x)+g(x)\}\leqslant f(x)+g(x)\leqslant f(x)+\sup g(x)$，所以，$\inf\{f(x)+g(x)\}-\sup g(x)\leqslant f(x)$ 对任意 $x\in D$ 成立，从而有 $\inf\{f(x)+g(x)\}-\sup g(x)\leqslant\inf f(x)$ 即

$$\inf\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf f(x)+\sup g(x)。$$

(3) $\forall\ x\in D$，$\inf f(x)+g(x)\leqslant f(x)+g(x)\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}$，所以，$\forall\ x\in D$，$g(x)\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}-\inf f(x)$，从

而有 $\sup g(x)\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}-\inf f(x)$，即

$$\inf(x)+\sup g(x)\leqslant\sup\{f(x)+g(x)\}。$$

(4)用类似的方法可证：

$$\sup\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup f(x)+\sup g(x),$$

请读者自行完成。已证的(1)—(4)就是要证的四个不等式。▌

注意：这类问题的一般方法是：先把三个集合 $\{f(x)\}$，$\{g(x)\}$，$\{f(x)+g(x)\}$(均指 $x\in D$)中的两个放大或缩小成上，下确界，由此得第三个集合的下界或上界，从而得到上、下确界的某些不等式。若单纯用确界定义去证明这类问题，则一般是较为困难的。

附录　几个概念的否定叙述

本章中单调、有界等概念以及今后收敛、连续、可导等概念都是数学分析中重要而基本的概念。为了深入理解这些概念，不但要掌握它本身，还要掌握它的反面，即其否定概念。如无界，不单调、发散、间断、不可导等。要做到这一点，就要知道否定概念的分析定义。怎样由已知概念的定义，推导出它的否定概念的定义呢？本附录讲的重点，就是介绍一个方法，并用这一方法讨论几个概念的否定概念。

(一)否定命题

两个命题 A 与 B 如果既不能同时成立，也不能同时不成立，就称 A 与 B 互为否定命题。

如果命题 A 与 B 互为否定命题，那么 A 与 B 一定满足：一个成立，另一个必不成立；一个不成立，另一个必定成立。例如：

“$a\leqslant b$”与“$a>b$”,“$a=b$”与“$a\neq b$”分别互为否定命题。

命题“数集$\{a,b\}$中每个元素都大于1”与命题“数集$\{a,b\}$中每个元素都小于1”不互为否定命题。因为这两个命题可以同时不成立。例如对数集$\{1,2\}$,这两个命题都不成立。命题“数集$\{a,b\}$中的每个元素都大于1”与命题“数集$\{a,b\}$中至少有一个元素小于或等于1”互为否定命题,因为这两个命题只要一个成立,另一个必不成立,一个不成立,另一个必定成立。同样,命题“无穷数集X中每一个元素都大于a”与命题“无穷数集X中至少有一个元素小于或等于a”互为否定命题。

设X是一个集合,x是X的元素,记为$x\in$ X 。“$x\in X$具有性质A”与“$x_0\in$ X不具有性质A”是以后常用的述语。为方便,我们把“$x_0\in$ X不具性质A”说成是“$x_0\in$ X具有性质CA”。显然$x\in$ X具有性质A,就不能具有性质CA;如果$x\in$ X不具有性质CA,就一定具有性质A,即$C(CA)=A$。

关于否定命题,我们有下面的定理。

定理　命题“任意$x\in$ X都具有性质A”与命题“至少存在一个$x_0\in$ X ,具有性质CA”互为否定命题。

注意:“任意$x\in$ X具有性质A”,就意味着X中每一个元素都具有性质A。

证:(1)命题“任意$x\in$ X具有性质A”成立,那么X中每一个元素都不具有性质CA,所以命题“至少存在一个$x_0\in$ X ,具有性质CA”不成立。

(2)命题“任意$x\in$ X具有性质A”不成立,那么,X中至少有一个元素不具有性质A,也就是命题“至少有一个$x_0\in$ X具有性质CA”成立。▌

利用$C(CA)=A$,立即可得到下面的推论。

推论　命题“至少存在一个$x_0\in$ X ,具有性质A”与命题

"任意 $x \in X$ 都具有性质 CA"互为否定命题。

根据定理立即得到：命题"对任意 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$"与命题"至少存在一个 $x_0 \in D$，有 $|f(x_0)| > M$"互为否定命题。

（二）函数 $f(x)$ 在 D 上不严格递增的定义

函数 $f(x)$ 在 D 上严格递增的定义是："$\forall\ x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$"。

注意："函数 $f(x)$ 具有性质 A"与"$f(x)$ 不具有性质 A"即"$f(x)$ 具有性质 CA"互为否定命题。我们现在用此命题来给出"$f(x)$ 在 D 上不严格递增"的确定性陈述方式（定义）。

设 X 为序偶 (x_1, x_2) 的集合，x_1, x_2 满足：$x_1 \in D, x_2 \in D, x_1 < x_2$。此时，"$f(x)$ 在 D 上严格递增"的定义就是："$\forall\ (x_1, x_2) \in X$，有 $f(x_1) < f(x_2)$"，其否定命题就是："$\exists\ (x_1, x_2) \in X$，有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$"。于是去掉序偶的说法，就成了"$\exists\ x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$"。

读者试用上述定义证明：符号函数 $f(x) = \mathrm{sgn}x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不严格递增。

（三）函数 $f(x)$ 在 D 上无界的定义

"函数 $f(x)$ 在 D 上有界"与"函数 $f(x)$ 在 D 上无界"互为否定命题。$f(x)$ 在 D 上有界的定义是："$\exists\ M > 0, \forall\ x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$"。以 A 表示"$\forall\ x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$"，以 X 表示数集 $\{M | M > 0\}$，$f(x)$ 在 D 上有界的定义就是："至少存在一个 $M \in X$，具有性质 A"。根据定理的推论，$f(x)$ 在 D 上无界的定义就是："$\forall\ M \in X$，都具有性质 CA"，也就是"$\forall\ M > 0$，至少存在