

计算机科学资料

DJS—21机

标准程序汇编

中国科学院数学研究所计算站

1974.1.

第 一 分 册

线 代 数 部 分

序

随着我国社会主义建设的发展,电子计算机在我国的使用已日益普遍。近年来,由于语言程序的采用,节约了大量编制程序的人力,从而为更加广泛地使用电子计算机开辟了新的前景。

为了普及语言程序,推进程序自动化,减少编制程序时的重复劳动,我们收集了国外近年来发表的常用 *ALGOL—60* 标准程序以及国内一些兄弟单位编制的程序,并且结合我们自己的计算实践汇编成本书。

本书共分五个分册。第一分册为线性代数部分(包括矩阵求逆、求行列式的值、线性方程组求解、求特征值及特征向量、求解线性规划等内容)。第二分册包括常微分方程、超越方程及多项式方程的求解。第三分册有插值、数值积分、函数逼近、特殊函数计算等内容。第四、五分册分别收集了一些有关运筹学、概率统计方面的程序。在各分册中,均举例说明如何使用这些程序。

由于我们水平有限,工作做得也不多,加之是集体编写,分头执笔所以各篇中所用的符号与叙述方式都不尽一致,错误也在所难免。希望读者给予批评与指正。并将使用中发生的问题和改进方案告诉我们。尤其希望读者能不断的向我们提供新的程序,以便编制标准程序的工作逐步完善。

最后附带说明几点:

1. 本书提供的程序是根据国产 *DJS—21* 机的算法语言编写的,各篇均可作标准过程运用于程序之中。并在我所机器上考核通过。对于其他型号的机器,需根据机器的特殊要求略加修改。

2. 由于现在 *DJS—21* 机的编译程序尚不十分完备,非正常出口 *FAIL* 在编译过程中会打出错误讯息 *F(*Z96……*当仅有这类错误时,请把选择开关 6 按下 ($K_6 = 1$),程序即可通过。

3. 我站对 *DJS—21* 机的编译程序作了一些修改与补充,例如原编译程序最多只允许有九个形参而我们的编译程序增至十个形参等等。希读者在使用时注意。

编 者

1974 年元月

第一部分

矩阵求逆、行列式求值、线性方程组求解

目 录

矩阵求逆、行列式值、线性方程组解

1. 主元素消去法求实线性方程组解 (有回代过程)	1
2. 主元素消去法求实线性方程组解 (无回代过程)	4
3. 共轭斜量法解实线性方程组	8
4. 追赶法求实三对角线性方程组解	11
5. 高斯——赛德尔迭代法解实线性方法组	13
6. 高斯——若唐法求正定矩阵的逆	15
7. 实矩阵的求逆、行列式值、线性方程组的解	19
8. 按行的主元素消去法求实矩阵的逆和行列式值	24
9. 实对称正定带型矩阵的行列式值及线性方程组的解	34
10. 实对称正定矩阵的行列式值, 求逆、线代数方程组解	42
11. 例题	57

特征值、特征向量

1. 实对称矩阵的雅可比方法	59
2. 实对称矩阵的 $H_{\text{OUSEHOLDER}}$ 三对角化	64
3. 对称带型矩阵的三对角化	72
4. 对称三对角线矩阵的 QL 方法 (I)	78
5. 对称三对角线矩阵的 QL 方法 (II)	85
6. 对分法求对称三对角矩阵的特征值	91
7. 关于 $AX = \lambda BX$ 一类特征值的问题的解	95
8. 用相似变换将矩阵化为 $H_{\text{ESSENBERG}}$ 型 (I)	101
9. 用相似变换将矩阵化为 $H_{\text{ESSENBERG}}$ 型 (II)	104
10. 实 $H_{\text{ESSENBERG}}$ 矩阵的 QR 方法	107
11. 例题	115

矩阵运算、线性规划

1. 矩阵乘	121
2. 矩阵转置	122
3. 求矩阵元素的极大值	123
4. 线性规划的三角分解算法	127

主元素消去法求实线性方程组的解（有回代过程）

§1. 数学方法简述

用本方法可求出任意实线性代数方程组的解。

考虑方程组

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + A_{i, n+1} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

可将此方程组记为

$$A^{(0)} x^{(0)} = b^{(0)}$$

本方法是建立一系列等价的方程

$$A^{(r)} x^{(r)} = b^{(r)} \quad (r=1, 2, \dots, n-1)$$

使当 $r=n-1$ 时, $A^{(r)}$ 为上三角矩阵。

设第 r 步的主元素为 $a_{r', r''}^{(r-1)}$, 即

$$\left| a_{r', r''}^{(r-1)} \right| = \max \left| a_{ij}^{(r-1)} \right| \quad (i, j \geq r)$$

我们取

$$A^{(r)} = L^{(r)} I_{r, r'} A^{(r-1)} I_{r, r''}$$

$$b^{(r)} = L^{(r)} I_{r, r'} b^{(r-1)}$$

$$x^{(r-1)} = I_{r, r''} x^{(r)}$$

其中 $I_{r, r'}$ 和 $I_{r, r''}$ 为置换阵, $I_{r, r'}$ 左乘的作用是将主元素 $a_{r', r''}^{(r-1)}$ 所在的 r' 行与第 r 行交换, $I_{r, r''}$ 右乘的作用是将主元素 $a_{r', r''}^{(r-1)}$ 所在的第 r'' 列与第 r 列交换, 即将主元素 $a_{r', r''}^{(r-1)}$ 换到 (r, r) 的位置。 $L^{(r)}$ 是矩阵

$$L^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{a_{rr}^{(r-1)}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

其中

$$l_{ir}^{(r)} = - \frac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} \quad (i > r)$$

$L^{(r)}$ 的作用是将矩阵（交换行列后的）下三角部分（不包括对角线）的第 r 列的元素化

为 0，第 r 个对角线元素化为 1。以 $n=6$ 的情形为例，当 $r=2$ 时有

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

当此过程进行到 $r=n-1$ 时，即得对角线元素为 1 的上三角阵，此时易求出方程组的解。

§2. GAUSS 过程

2.1 形式参数表

输入参数:

N 矩阵 A 的阶

A 二维数组 $A[1:N, 1:N+1]$ ，按行存入矩阵 A 的元素，其中第 $N+1$ 列的方程的自由项

EPS 是一数，通常取机器精度，即机器能表示的最小数使 $1+EPS > 1$ 者。
(对 121 机可取 $EPS=2^{-62}$)

输出参数:

X 一维数组 $X[1:N]$ ，即方程组的解

$AFIL$ 是一标号，作为过程错出口参数，用于主元素小于 EPS 而使过程无法继续进行

2.2 程 序

```
'PRQC' GAUSS(A, N, EPS, X, FAIL);
  'VALUE' N, EPS;
  'INTEG' N; 'REAL' EPS; 'ARRAY' A, X; 'LABEL' FAIL;
'BEGIN' 'INTEG' H, I, II, J, K; 'REAL' P, W;
  'ARRAY' Y[1:N]; 'INTEG' 'ARRAY' Z[1:N];
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' Z[I]:=I;
  'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' P:=0;
  'FOR' II:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  'IF' ABS(A[II, J]) 'GR' ABS(P) 'THEN'
  'BEGIN' H:=II; K:=J;
```

```

      P := A[II, J]
'END';
'IF' ABS(P) 'LS' EPS 'THEN' 'GOTO' FAIL;
P := 1/P;
'IF' H 'NQ' I 'THEN'
'FOR' J := I 'STEP' 1 'UNTIL' N+1 'DO'
'BEGIN' W := A[H, J]; A[H, J] := A[I, J];
      A[I, J] := W
'END';
'IF' K 'NQ' I 'THEN'
'BEGIN' 'FOR' II := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      'BEGIN' W := A[II, K]; A[II, K] := A[II, I];
            A[II, I] := W
      'END';
      J := Z[I]; Z[I] := Z[K]; Z[K] := J
'END';
'FOR' J := I+1 'STEP' 1 'UNTIL' N+1 'DO'
'BEGIN' A[I, J] := A[I, J] × P;
      'FOR' K := I+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
            A[K, J] := A[K, J] - A[I, J] × A[K, I]
      'END'
'END';
'FOR' I := N 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
'BEGIN' W := A[I, N+1];
      'FOR' J := I+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
            W := W + A[I, J] × Y[J];
      X[Z[I]] := Y[I] := -W
'END'
'END';

```

§3. 数值结果

例 求以下方程组的解:

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + x_3 - 3 &= 0 \\
 x_1 + 3x_3 - 10 &= 0 \\
 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 12 &= 0
 \end{aligned}$$

此方程组的精确解为

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

用本程序求得

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2.9999999$$

无回代过程的主元素消去法解线性方程组（按行存放）

§1. 数学方程简述

设求解的方程组为：

$$AX=B$$

其中 A 为 n 阶实矩阵， B 为 n 维列向量。

计算方法是：在整个系数矩阵 A 上找最大模元素作为主元素，然后采用高斯消去法求解。

功能：求解 n 阶实系数线性代数方程组。

§2. GJ 过程

2.1 参数表：

输入参数

N 矩阵的阶数。

EPS 最大主元素所不能小于的数值。

A 系数矩阵，按行存放其元素。

B 方程右端项。

输出参数

B 数组 $B[1:N]$ ，存放方程组的解。

$FAIL$ 为过程错出口参数。当某主元素不超过 EPS 时，便给出 $FAIL$ 信息。

2.2 程序

```
'PROC' GJ(N, EPS, A, B, FAIL);  
  'VALUE' N, EPS; 'INTEG' N; 'REAL' EPS;  
  'ARRAY' A, B; 'LABEL' FAIL;  
'BEGIN' 'INTEG' I, J, K, P, I0, J0; 'REAL' C, D;  
  'ARRAY' IK, JK[1:N];  
  'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO'  
  'BEGIN' C:=0;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N'DO'  
    'BEGIN' 'FOR' P:=1 'STEP' 1 'UNTIL' K-1'DO'  
      'IF' I=IK[P] 'THEN' 'GOTO' I2;
```

```

'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'IF' ABS(A[I, J]) 'LQ' ABS(C)
'THEN' 'GOTO' L1;
C:=A[I, J]; I0:=I; J0:=J;
L1: 'END';
L2: 'END';
'IF' ABS(C) 'LQ' EPS 'THEN' 'GOTO' FAIL;
IK[K]:=I0; JK[K]:=J0;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'FOR' P:=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'
'IF' J=JK[P] 'THEN' 'GOTO' L4;
'IF' A[I0, J]=0 'THEN' 'GOTO' L4;
D:=A[I0, J]:=A[I0, J]/C;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'IF' I=I0 'THEN' 'GOTO' L3;
A[I, J]:=A[I, J]-A[I, J0]*D;
L3: 'END';
L4: 'END';
D:=B[I0]:=B[I0]/C;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' 'IF' I=I0 'THEN' 'GOTO' L5;
B[I]:=B[I]-A[I, J0]*D;
L5: 'END';
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
A[I, J0]:=0
'END';
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
A[1, JK[K]]:=B[IK[K]];
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
B[K]:=A[1, K]
'END';

```

§3 数值结果

例题

$$AX=B$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{计算结果 } X = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.9 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

无回代过程的主元素消去法解线性方程组(按列存放)

§1. 数学方法简述

参看无回代(GJ)过程的主元素消去法部份。

§2. GJ 过程

2.1 参数表:

输入参数

N 矩阵的阶数。

A 数组 $A[1:N+1, 1:N]$, 表示系数矩阵, 方程系数按列存放, 第 $N+1$ 行存放方程右端自由项。

EPS 最大主元素所不能小于的数值。

输出参数

A 数组 A 的第1行, 存放在方程组的解

$FAIL$ 为过程销出口参数。当某主元素不超过 EPS 时, 便给出 $FAIL$ 信息:

2.2 程序

```
'PROC' GL (N, A, EPS, FAIL);  
  'VALUE' N, EPS; 'INTEG' N; 'REAL' EPS; 'ARRAY' A;  
  'LABEL' FAIL;  
'BEGIN' 'INTEG' I, J, K, L, I0, J0; 'REAL' C, D;  
  'ARRAY' IK, JK[1:N];  
  'FOR' K:1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
  'BEGIN' C:=0;  
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
    'BEGIN' 'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' K-1 'DO'  
      'IF' I=IK[L] 'THEN' 'GOTO' L2;  
      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'  
        'BEGIN' 'IF' ABS(A[J, I]) 'LQ' ABS(C)
```

```

    'THEN' 'GOTO' L1;
    C := A[J, I]; I0 = I; J0 := J;
    L1: 'END';
L2: 'END';
    'IF' ABS (C) 'LQ' EPS 'THEN' 'GOTO' FAIL;
    IK[K] := I0; JK[K] := J0;
    'FOR' J := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N+1 'DO'
    'BEGIN' 'FOR' L := 1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO'
        'IF' J = JK[L] 'THEN' 'GOTO' L4;
        'IF' A[J, I0] = 0 'THEN' 'GOTO' L4;
        D := A[J, I0] := A[J, I0]/C;
        'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
            'BEGIN' 'IF' I = I0 'THEN' 'GOTO' L3;
                A[J, I] := A[J, I] - A[J0, I] × D;
            L3: 'END';
        L4: 'END';
        'FOR' I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' A[J0, I] := 0
    END';
    'FOR' K := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
        A[1, JK[K]] := A[N+1, IK[K]]
    'END';

```

共轭斜量法解线性方程组

§1. 数学方法简述

设求解的方程组为:

$$AX=B$$

其中 A 为 n 阶实矩阵, B 为 n 维列向量。

计算步骤如下:

1. 适当选取粗略近似解: $X_0 = (X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0})$ 。
2. 计算初次残差向量:

$$R_0 = B - AX_0$$

和向量

$$P_0 = A^T R_0 \quad (A^T \text{ 为 } A \text{ 的转置矩阵})$$

3. 对 $i=0, 1, \dots, n-1$, 重复计算以下公式:

$$\alpha_i = \frac{(AP_i, R_i)}{(AP_i, AP_i)} = \frac{(P_i, A^T R_i)}{(AP_i, AP_i)} = \frac{(A^T R_i, A^T R_i)}{(AP_i, AP_i)}$$

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i P_i$$

$$R_{i+1} = R_i - \alpha_i AP_i$$

$$\beta_{i+1} = \frac{(A^T R_{i+1}, A^T R_{i+1})}{(A^T R_i, A^T R_i)}$$

$$P_{i+1} = A^T R_{i+1} + \beta_{i+1} P_i \quad (X, Y) \text{ 表示内积。}$$

直至 $i=n-1$ 或直到残差值足够小为止。

功能: 对于任意实系数线性代数方程组, 通过几次迭代可得出解或近似解。

§2. CG 过程

2.1 参数表

输入参数:

- N 矩阵的阶数。
 A 系数矩阵, 按行存放其元素。
 R 存放方程右端向量 B 的元素。
 X 数组 $[1:n]$, 存放初解向量 X_0 。

输出参数:

- X 数组 $[1:n]$, 存放方程组的解。

$FAIL$ 为过程错出口参数。用于当某个 $P_i=0$, 使本方法无法继续, 便给出 $FAIL$ 信息。

2.2 程序

```
\PROC'CG (N, A, R, X, FAIL);
  \VALUE'N; \INTEG'N; \ARRAY'A, R, X; \LABEL'FAIL;
\BEGIN' \INTEG'IT; \REAL'AP, AQ, BT; \ARRAY'P, TP[1:N];
  \REAL' \PROC' DOT (U, V); \ARRAY'U, V;
  \BEGIN' \INTEG'I; \REAL'S;
    S:=0;
    \FOR'I:=1\STEP'1 \UNTIL'N\DO'
      S:=S+U[I]×V[I];
      DOT:=S
  \END';
\PROC'CM (F, C, G, H);
\VALUE'C; \REAL'C; \ARRAY'F, G, H;
  \BEGIN' \INTEG'I;
    \FOR' I:=1 \STEP'1 \UNTIL' N \DO'
      H[I]:=F[I]+C×G[I]
  \END';
\PROC'MF (TRA, DAT, RES);
\VALUE'TRA; \BOOLE'TRA; \ARRAY'DAT, RES;
\BEGIN' \INTEG'I, J; \REAL'S; \ARRAY'AA[1:N, 1:N];
  \FOR'I:=1\STEP'1 \UNTIL'N\DO'
    \FOR'J:=1\STEP'1 \UNTIL'N\DO'
      AA[I, J]:=\IF' TRA \THEN' A[J, I]
        \ELSE' A[I, J];
    \FOR' I:=1: \STEP'1 \UNTIL' N \DO'
      \BEGIN' S:=0;
        \FOR'J:=1 \STEP'1 \UNTIL' N \DO'
          S:=AA[I, J]×DAT[J]+S; RES[I]:=S
      \END'
  \END';
\FOR'IT:=0 \STEP'1 \UNTIL'N-1 \DO'
\BEGIN' \IF'IT=0\THEN'
  \BEGIN' MF (FALSE, X, TP);
    CM (R, -1, TP, R);
    MF (TRUE, R, P);
    AQ:=-DOT (P, P)
  \END' \ELSE'
  \BEGIN' MF (TRUE, R, TP);
```

$BT := DOT (TP, TP) / AQ;$

$CM (TP, BT, P, P);$

$AQ := BT \times AQ$

'END';

'IF' $AQ=0$ 'THEN' 'GOTO' L ;

$MF (FALSE, P, TP); AP := DOT (TP, TP);$

'IF' $AP=0$ 'THEN' 'GOTO' 'FAIL';

$AP := DOT (R, TP) / AP; CM (X, AP, P, X);$

$CM (R, -AP, TP, R)$

'END';

L ; 'END';

2.3 说明

$P, TP[1:N]$ 表示二套需用的工作单元。

MF 表示矩阵与向量乘积的一个过程标识符。

L 表示计算结果。

§3. 数值结果

例题

$$AX = B$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3.4 & 2.5 & 0.3 \\ 0.2 & -3.5 & 0 & 0.2 \\ -2 & 0.03 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12.1 \\ -1.55 \\ -1.985 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取迭代初解为 $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1$ 得出精确解为

$$X = \begin{pmatrix} 4.9 \\ 0.49 \\ 8.0 \\ -3.9 \end{pmatrix}$$

用追赶法求实三对角线性代数方程组的解

§1. 数学方法简述

用本方法可求实三对角线性代数方程组的解。

考虑以下线性方程组：

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_N & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix}$$

计算公式：

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{C_1}{B_1}, & Z_1 &= \frac{F_1}{B_1}, \\ r_K &= \frac{C_K}{B_K - A_K r_{K-1}}, & Z_K &= \frac{F_K - A_K Z_{K-1}}{B_K - A_K r_{K-1}}, \\ & (K=2, 3, \dots, N-1) \\ x_N &= \frac{F_N - A_N Z_{N-1}}{B_N - A_N r_{N-1}}, \\ x_K &= Z_K - r_K x_{K+1} & (K=N-1, \dots, 1) \end{aligned}$$

§2. TRD 过程

2.1 形式参数表

输入参数：

- N 系数矩阵的阶
- A 一维数组 $A[2:N]$ ，存入系数矩阵的元素 $A_2, \dots, A_N$
- B 一维数组 $B[1:N]$ ，存入系数矩阵的元素 $B_1, \dots, B_N$
- C 一维数组 $C[1:N-1]$ ，存入系数矩阵的元素 $C_1, \dots, C_{N-1}$
- F 一维数组 $F[1:N]$ ，存入方程组的自由项 $F_1, \dots, F_N$

输出参数：

- X 一维数组 $X[1:N]$ ，存入方程组的解 $X_1, \dots, X_N$

2.2 程序

```
'PROC' TRD (N, A, B, C, F, X);
```

```

'VALUE' N;
'INTEG' N; 'ARRAY' A, B, C, F, X;
'BEGIN' 'ARRAY' CE[1:N]; 'REAL' D; 'INTEG' K;
  CE[1]:=C[1]/B[1];
  X[1]:=F[1]/B[1];
  'FOR' K:=2 'STEP' 1 'UNTIL' N-1 'DO'
    'BEGIN'
      D:=B[K]-A[K]×CE[K-1];
      CE[K]:=C[K]/D;
      X[K]:=(F[K]-A[K]×X[K-1])/D
    'END';
  X[N]:=(F[N]-A[N]×X[N-1])/(B[N]-A[N]×CE[N-1]);
  'FOR' K:=N-1 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
    X[K]:=X[K]-CE[K]×X[K+1]
  'END';

```

§3. 数值结果

例：解方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

由本程序求得：

$$x_1=0.5, \quad x_2=1, \quad x_3=0.75$$