科學圖書大庫

複變數函數論

（增訂本）

編著者　賴漢卿

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

複變數函數論

（增訂本）

編著者　賴　漢　卿

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

序　言

本書是著者自1969年迄今四年間，在國立清華大學數學系的複變數函數論講義之內容整理而成，其目的是給理工科系學生灌輸一般所必須的複變函數論之基本知識。複變數函數的理論不外乎是數學分析的一分科，內容可以說是微分積分學，以及其延伸的一種學問。

科學欲在國內生根，則以本國文字來寫各科學的書籍，是極其重要的工作，俾學者以自己日常的語言，能夠容易感受與吸收其所要的知識，這也就是著者着手寫本書的動機，更期望本書對修讀複變數函數的同學們有所裨益。

本書內容的分量是適合每週三節授一年的課程，或略去部份煩雜的演算，每週四節教授一學期的課程。依著者的經驗講授本講義，在第三章之前有些內容是學生們在初等微積分或高等微積分中已學過，所以對於此部分內容大概都能充分理解，講授時可省略一部分時間。

為要有效地學習數學，進而使所學能發揮作用，則理解其理論與解說外，隨著各章或各節之後，都列有練習題，其分量恰好為同學們複習所習的內容，同學們宜逐題做解。

本書除了複變數函數論的理論外，若能使讀者諸君，對於數學全般性能有所理解，則是著者最為高興的了，尤其對於理工科學生諸君，若能從本講義有系統地，很快地吸收自己所需要的材料與知識，並獲得所要的益處，那就是著者最感欣慰的一件事。

當這本講義出現時，很受清華大學數學系學生們的愛戴與歡迎，也甚受清華同事們的鼓勵，並提供許多有益於本書的助言，著者在此特申謝意。尤其是本系徐正梅先生，一一將拙稿過目抄寫，並提供許多寶貴的意見，在此特表感謝。

本書倉卒脫稿，難免漏誤，尚希專家學者，不吝教正。

賴漢卿謹識

中華民國六十三年一月

修訂版序言

本書去年七月出版後不到二個月，即全部售完，因之來不及更改版誤部分，乃應讀者需要卽行出第二版，著者藉此對於第一、二版之版誤，深表歉意。

這次修訂版除將版誤部分修正外，在書末了部分增添了各章節之習題解答提示，以供讀者做習題時參考，也可藉此引發學習興趣與解題信心，雖所列提示未盡完備，但著者相信讀者依所提方向，必能獲得完全的答案。

本書出版後承蒙八、九個大學採用爲課本，著者於此特表謝意，這一次習題提示由顏振輝、葉芳栢與吳博雅等同學幫了不少忙，順便於此申表謝意，本次修訂版，時間倉卒，難免仍有漏誤，尙請專家學者，不吝指正。

賴漢卿　謹識

民國六十四年九月於

清華大學數學研究所

目　錄

第一章　複數函數

第二章　複數微分

第三章　複數積分

第四章　初等函數

第五章　Möbius 變換

第六章　Laurent 展開式與無限函數例

第七章　奇異點與留數定理

第八章　留數的應用與定積分的計算

第九章　有理型函數與全函數的表現定理

第十章 保角寫像與解析延拓

第十一章 調和函數

第一章　複數函數

1.1. 複數

函數論是研究複數變數的複數値函數。我們研究這種函數主要的對象是在某種意義下可微分的函數通常叫做解析函數。爲建立這種解析函數的理論基礎，我們就先來介紹複數系。複數可以看作平面上的向量。

先從二次方程式

$$x^2+1=0 \tag{1.1}$$

的解來說，我們知它沒有實數解（根），因此我們就考慮實數系以外的數系，看是否有一種數能滿足（1.1），或更一般的來求代數方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0 \quad (a_n\neq 0) \tag{1.2}$$

的解，其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_0$ 爲任意實數。爲此我們就引進一新數稱爲"虛數單位" $i=\sqrt{-1}$，做爲（1.1）的一解，然後考慮形如

$$a+b_i \text{ 或 } a+ib \tag{1.3}$$

的數，式中 a,b 表任意實數，這種數我們稱爲**複數**。其代數運算規定作以 x 爲未知數的二項式 $a+bx$ 之運算，且滿足

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\ \cdots\cdots \tag{1.4}$$

當我們完成這個手續後（1.1）的解就是 i 與 $-i$ 。在（1.3）中如置 $b=0$，則我們所說的複數就成爲實數，所以實數系 R，實際上是複數系 $\boldsymbol{C}=\{a+b_i \mid a,b\in \boldsymbol{R}\}$ 的部分集合。

在（1.2）中 x 可取複數，則即使 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 也是複數，方程式（1.2）恒有解存在，這個結果就是所謂代數的**基本定理**，我們將在後面討論。

下面我們來說明爲什麼複數可以看作平面上的向量。也就是複數與平面上的點有一對一對應關係。

取平面的直交坐標，其橫坐標與縱坐標分別令爲 x 與 y，平面上的點 z 以實數 x 與 y 的序對（x, y）表示，則序對（x, y）有下列關係：

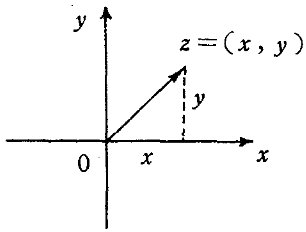
二序對 $z_1=(x_1, y_1)$ 與 $z_2=(x_2, y_2)$ **相等**之意，我們定義做 $x_1=x_2$ 與 $y_1=y_2$，並記作 $z_1=z_2$ 。又其**和**、**積**定義作

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)\equiv(x_1+x_2, y_1+y_2) \tag{1.5}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)\equiv(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.6}$$

顯然 $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$.

從（1.5）當 $z_1=(x_1, y_1)$, $z_2=(x_2, y_2)$ 已知，且滿足方程式



$$z_1+z=z_2$$

時，其解只有一個 $z=(x, y)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$，這個解稱爲 z_2 與 z_1 的**差**，並記作 z_2-z_1. 又當 $z_1=(x_1, y_1)\neq(0.0)$ 時，滿足方程式

$$z_1z=z_2$$

的解 z 也只有一個 (x, y)，那就是

$$x=\frac{x_2x_1+y_2y_1}{x_1^2+y_1^2}\quad,\qquad y=\frac{y_2x_1-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

這個解 z 稱爲 z_2 與 z_1 的**商**，並表示作 $z=\dfrac{z_2}{z_1}$。於是序對的四則運算就完全決定了。平面上的點有了上述的相等關係與四則運算後，這種點也就可看作一種數，我們就稱平面上的這些點（序對）爲**複數**，此平面稱爲**複數平面**。

再考慮序對的特別形 $(a, 0)$。顯然

$$(a, 0)\pm(b, 0)=(a\pm b, 0)$$

$$(a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$$

且於 $b\neq0$ 時，

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)}=\left(\frac{a}{b}, 0\right)$$

故對於實數 a, b 有 $a<b$ 時，定義 $(a, 0)<(b, 0)$，則實數全體與形如 $(a, 0)$ 的序對全體可視爲一體，在代數學上稱實數全體與序對 $(a, 0)$ 的全體對於**相等**，**大小**以及**四則運算**是同構的（isomorphic）。因此我們將 $(a, 0)$ 簡記作 a 。在此意義下，**複數平面**的橫坐標軸就稱爲**實軸**，與它對應的縱坐標軸就稱爲**虛軸**。爲簡單起見，序對 (0.1) 就用 i 表示，於是

$$i^2=(0.1)(0.1)=(-1, 0)=-1$$

即 i 滿足方程式（1.1），是前面所說的虛數單位，又

$$(0,y)=(0,1)(y,0)=iy$$

所以

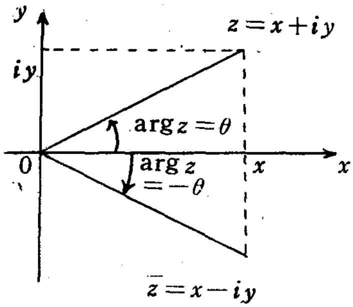
$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+iy \tag{1.7}$$

至此我們很清楚的看出複數平面上的點，即序對$z=(x,y)$可用虛數單位寫成（1.7）的形式，所以與（1.3）所稱的複數是一對一對應，此處x稱爲z的**實部**，y稱爲z的**虛部**，通常寫成$x=R_e z$, $y=I_m z$ 。對於複數$z=x+iy$，我們稱複數$x-iy$爲z的**共軛複數**，而以$\bar{z}$表示。現在我們來看看$\bar{z}$的運算；對於兩複數z_1, z_2而言有下列的關係

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \ (z_2\neq 0)\text{。}$$

複數$z=x+iy$的絕對值$|z|$用$(x^2+y^2)^{1/2}$來定，這是由原點$0=(0,0)$到點$z=(x,y)$的距離，若$z\neq 0$，則由原點向z的向量與實軸的正向所成的角稱爲複數z的**偏角**（或說幅角），用$\arg z$表示。假使忽視偏角的2π之整數倍，則每一個不爲0之複數的偏角可以唯一確定。複數0的偏角是沒定義的，以後我們寫$\arg z$表示z的偏角忽視2π的整數倍者，而$\operatorname{Arg} z=\arg z+2n\pi$（$n$爲任意整數）。顯然，



$$z=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)\equiv\gamma e^{i\theta}$$

$$(|z|=\gamma,\ \arg z=\theta) \tag{1.8}$$

上式稱爲z的**極形式**。對於不爲0的兩複數$\alpha=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$。$\beta=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$，則有

$$\alpha\beta=\gamma\rho[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)] \tag{1.9}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\rho}[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)] \tag{1.10}$$

以及 $\quad |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|, \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ 。

如果不計2π的整數倍，則

$$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta, \ \arg\frac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$$

由（1.9）得de Moivre 公式如下

$$\alpha^n=[\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\gamma^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad (1.11)$$

式中n為整數，若n為負整數則 $\alpha^n=\dfrac{1}{\alpha^{-n}}$ 。

習題1-1

1. 求$z^4=i$ 的根。
2. 對於二複數α,β，若$\alpha\beta=0$，則α,β兩者之一必為0。
3. 對於二複數α,β，試證明
$$||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha|+|\beta|$$ 。
4. 試證明 $|z|\equiv|x+iy|\geqslant(|x|+|y|)/\sqrt{2}$ ，並決定其等號成立時的條件。
5. 試證明 $|z+\omega|^2\equiv(z+\omega)\overline{(z+\omega)}$。
6. 設二複數為z與ω，則$z\overline{\omega}+\overline{z}\omega$ 為實數。
7. 試證明方程式$z^3+2z+4=0$的根不在單位圓內。
8. 設$x_n+iy_n=(1-i\sqrt{3})^n$（x_n,y_n為實數；$n=0,\pm1\cdots\cdots$）則
$$x_ny_{n-1}-x_{n-1}y_n=4^{n-1}\sqrt{3}$$
9. 試證明 $z\,(\neq0)$，$-z$，$1/\overline{z}$，$-\dfrac{1}{\overline{z}}$，0 等五點共線。
10. 試證明 $z\,(\neq0)$，$\dfrac{1}{z}$，$-\overline{z}$，$-\dfrac{1}{\overline{z}}$，1，-1 等六點共圓。

1.2. 複數數列與級數

考慮複數數列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$，或寫成 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 。若有一複數α使 $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n-\alpha|=0$，則數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在點α收斂，α稱為 $\{\alpha_n\}$ 的**極限（值）**。此極限也常寫成

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \text{ 或 } \alpha_n\to\alpha\ (n\to\infty)\text{。}$$

嚴密的定義是：「給任意正數ε時，有一適當的正整數$N=N(\varepsilon)$存在，而於$n\geqslant N$ 時，恒使 $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ 」。

極限在複數面的幾何意義可以用下面方式表示：以點α為中心，正數γ

爲半徑之圓的內部以集合 $\{z\,||z-\alpha|<\gamma\}$ 表示時，其極限的意義就是給任意正數 ε ，找一對應的正整數 N，於 $n\geqslant N$ 時，則 α_n 都在開圓板 $\{z\,||z-\alpha|<\varepsilon\}$ 內。

定理1.1　數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充要條件是 $R_e\,\alpha_n\to R_e\alpha$ 與 $I_m\,\alpha_n\to I_m\alpha$ ($n\to\infty$)。

定理1.2　數列 $\{\alpha_n\}_{n=1}$ 收斂的充要條件是給任意一正數 ε ，就有一正整數 $N=N(\varepsilon)$ 存在，當 $m,n>N$ 時，恒使

$$|\alpha_n-\alpha_m|<\varepsilon\ .$$

成立。(本定理叫做Cauchy 的收斂判別定理)。

定理1.3　(Bolzano- Weierstrass 定理) 有界的無限複數集合恒有(至少有一個) 極限點。

點 z_0 稱爲某一集合 S 的**極限點** (Limit point) 就是 z_0 的任意 ε—近傍：$\{z\,||z-z_0|<\varepsilon\}$ 至少包含 S 的兩元素 (即兩點)。

以上三個定理的證明與實數數列的情形相同，就留給讀者自行驗證。

其次我們來談談用複數爲項的級數。考慮

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \qquad (1.12)$$

令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$　當數列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂時，級數 (1.12) 稱爲收斂，此時

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的極限 S 就稱爲級數 (1.12) 的和。並記作

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$$

由定理 1.2 得下列定理。

定理1.4　級數 (1.12) 收斂的充要條件是任意給一正數 ε 時，存在一適當的正整數 $N=N(\varepsilon)$ ，若 $m>n\geqslant N$ ，則

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots\cdots+\alpha_m|<\varepsilon$$

系1.4　若級數 (1.12) 收斂，則 $\alpha_n\to 0$ ($n\to\infty$)。

對於級數 (1.12) 的各項絕對值所成的級數

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots\cdots+|\alpha_n|+\cdots\cdots,$$

若爲收斂，就稱 (1.12) 爲**絕對收斂級數**。利用不等式

$$|\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots\cdots+\alpha_{n+p}|\leq|\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+2}|+\cdots\cdots+|\alpha_{n+p}|$$

則由定理 1.4 可證明下列定理

定理 1.5　絕對收斂級數必爲收斂（其逆未必是對的）。

習題 1-2

1. 設 $\alpha_k=2^{-k}(1+i)$，試問級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 是否收斂？是否絕對收斂？

2. 設(1) $\alpha_k=\frac{1}{(1+i)^k}$，(2) $\alpha_k=i^k$，試問 $\sum_{k=1}\alpha_k$ 是否收斂？

3. 試問下列級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 是否收斂？如果是收斂則求其和。

(1) $\alpha_k=\frac{1}{(1+i)^{2k}}$，　(2) $\alpha_k=i^{2k}$，　(3) $\alpha_k=\frac{1}{k!}$

4. 求下列集合的導集合（Derive set）即其所有極限點的集合

(1) $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\}$ $(m, n=1, 2, \cdots\cdots)$　，

(2) $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\}$ $(m, n=1, 2\cdots\cdots)$ 。

1.3 廣義的複數平面與立體射影

數學家喜歡做一般的情形，而不相信有例外。就像我們在實數系裏說「任何二次方程式，必有二根」，是不正確的，而數學家就想了個辦法使上述的一般話成爲正確，那就是引進複數的理由，也就是將原來的數系擴大，使上述的命題在擴大的數系裏變成正確。又如「任意不同的二直綫相交於一點」的說法，對於歐幾里得幾何的二平行綫並不成立。但在射影機何裏，引入一理想元素爲無窮遠綫，則平行綫的例外情形就被消除。類似的理想元素在代數數論中，也被引進用來恢復分解的唯一性。像這樣的情形，在複變數函數論裏，用下列基本變換

$$w=\frac{1}{z} \tag{1.13}$$

做爲廣義複數的工具。(1.13) 定義了 1－1 變換（寫像），但有二個例外的情形；那是 $z=0$ 時無像，且於 $w=0$ 時無前像。爲了消除這兩種例外，使 (1.13) 恒是 1－1 變換，通常就在複數面上添加一理想元素，稱爲無窮

遠點∞，以構成一新的平面叫做**廣義複數面**。於是變換（1.13）乃將廣義複數面 1 − 1 映至該平面本身，而前述的兩種例外情形就不會發生了，蓋我們可將 $z=0\to w=\infty$ 而 $w=0$ 做爲 $z=\infty$ 的像。$z=\infty$ 的近傍定義做集合 $\{z \mid |z|>R\}$，經（1.13）的變換，$z=\infty$ 的近傍乃映至 0 點的近傍 $\{w \mid |w|<\frac{1}{R}\}$。

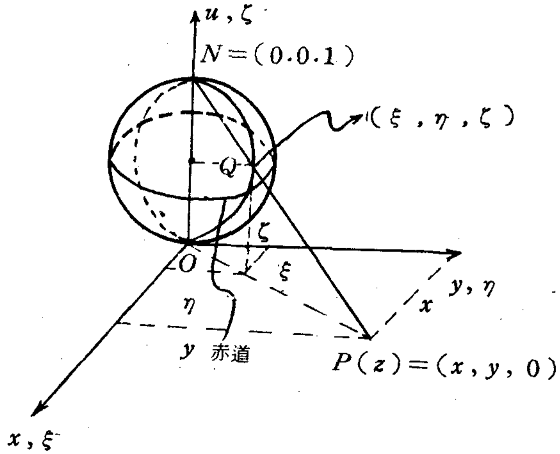
下面我們來考察複數在複數平面的幾何表現。用複數平面添加一元素∞（無窮遠點），即廣義的複數平面，使與一球面上的點一一對應，這種對應通常稱爲**立體射影**（Stereographic projection）。立體射影有兩種更替的形式：

a 以球與平面相切。　　b 考慮平面通過球心 σ

我們所用的是(a)的情形；即用直徑爲 1 的球面切於複數平面，切點令爲原點（0.0.0）稱爲**南極**，而過（0.0.0）之直徑的另一端（0.0.1）稱爲**北極**，則球心坐標爲（0.0.1/2）。在三度空間來說，就是以 xy 平面爲複數平面，並考慮坐標爲（x.y.u）之球面

$$x^2+y^2+u^2=u$$

的意思相同。此時在平面 $u=½$ 上的大圓稱爲**赤道**，在赤道的北方稱爲**北半球**，南方稱爲**南半球**。



令$Q(\xi,\eta,\zeta)$爲球面上一點，Q經立體射影（以北極N爲射影中心，N與廣義複數平面上的元素∞對應）至複數平面上的點$P(z)=(x,y,0)$，則由平面幾何的性質得

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1}$$

且　$\xi^2+\eta^2+(\frac{1}{2}-\zeta)^2=\frac{1}{4}$，　令$r^2=x^2+y^2=|z|$　得

$$\xi=\frac{x}{1+r^2}\text{，}\quad \eta=\frac{y}{1+r^2}\text{，}\quad \zeta=\frac{r^2}{1+r^2} \qquad (1.15)$$

求上式的逆變換得

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}\text{，}\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}\text{，}\quad r^2=\frac{\zeta}{1-\zeta} \qquad (1.16)$$

註　立體射影將赤道映成複數平面的單位圓，南半球映成單位圓內部，北半球映成單位圓外部（爲什麼？）。

下面我們來看看立體射影的一些性質。

定理1.6　在立體射影下，球面上的圓映到複數面上是圓或直綫，其逆亦眞。

證明　球面上的圓是由一平面剖球面而得，該平面與所給的球面能相交的條件是平面

$Ax+By+Cu=D$ 滿足$A^2+B^2>4D(D-C)$者（爲什麼？）。

設(ξ,η,ζ)爲球面上一點，此點在已知平面上的條件是

$A\xi+B\eta+C\zeta=D$，　由（1.15）得

$$\frac{Ax}{1+r^2}+\frac{By}{1+r^2}+\frac{Cr^2}{1+r^2}=D$$

或　$u=0$，$(C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$　（1.17）

上式若$C\neq D$則表示xy平面上的一圓，若$C=D$則表示複數平面上的一直綫，此時在原球面上的圓是通過北極（0.0.1）點。

相反地，若$A^2+B^2>4D(D-C)$，考慮（1.17）它是直綫或圓依C與D相等與否而定，由（1.16）的坐標變換知(ξ,η,ζ)在球面上滿足條件。

$$p:A\xi+B\eta+C\zeta=D$$

換句話說(ξ,η,ζ)是平面p與球面的交點，也就是球面上的一圓。

定理1.7　立體射影是一種保角的變換。