启蒙数学文化译丛
丛书主编　汪　宇

精彩的数学错误

〔美〕阿尔弗雷德·S.波萨门蒂尔
〔德〕英格玛·莱曼　著
李永学　译

Magnificent Mistakes in Mathematics

Alfred S. Posamentier
Ingmar Lehmann

数学错误同样是数学进步的基石，蕴含着不可估量的价值。数学错误固然没有使我们达到预期的此岸，却可能会引导我们通往更为精彩的彼岸。本书视角独特，题材新颖，趣味盎然，是一部促进数学教育、理解数学本质的佳作。

华东师范大学出版社

启蒙数学文化译丛 π 丛书主编 汪 宇

Magnificent Mistakes in Mathematics

Alfred S. Posamentier　Ingmar Lehmann

精彩的数学错误

〔美〕阿尔弗雷德·S. 波萨门蒂尔 〔德〕英格玛·莱曼 著

李永学 译

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

精彩的数学错误 /（美）阿尔弗雷德·S. 波萨门蒂尔，（德）英格玛·莱曼著；李永学译. —上海：华东师范大学出版社，2019
ISBN 978-7-5675-8827-1

Ⅰ. ①精… Ⅱ. ①阿… ②英… ③李… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 026668 号

启蒙数学文化译丛系启蒙编译所旗下品牌
本书版权、文本、宣传等事宜，请联系：qmbys@qq.com

精彩的数学错误

著　　者　（美）阿尔弗雷德·S. 波萨门蒂尔　（德）英格玛·莱曼
译　　者　李永学
策划编辑　王　焰
组稿编辑　龚海燕
项目编辑　王国红
特约审读　王小双

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真　021-62572105
客服电话　021-62865537　门市（邮购）电话　021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东鸿君杰文化发展有限公司
开　　本　890×1240　32开
印　　张　11.125
字　　数　252千字
版　　次　2019年10月第一版
印　　次　2019年10月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-8827-1
定　　价　72.00元

出 版 人　王焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话021-62865537联系）

谨以此书

献给芭芭拉,感谢她对我的支持、宽容和激励。

献给我的儿孙辈:大卫、劳伦、丽莎、丹尼、马克斯、萨姆和杰克,

愿他们的前程无限广阔。

并以此纪念我亲爱的父母艾丽丝和欧内斯特,他们永远相信我。

——阿尔弗雷德·S.波萨门蒂尔

谨以此书

献给我的妻子和我一生的朋友萨宾:

没有她对我的支持与宽容,我永远无法完成本书的任务。

同时也献给我的儿辈与孙辈:

马伦、克劳迪娅、西蒙和马里亚姆。

——英格玛·莱曼

致 谢

本书作者衷心感谢奥地利卡尔·弗朗岑斯格拉茨大学数学教授贝恩德·塔勒尔博士和数学荣誉教授彼得·舍普夫博士对本书的校对及提出的宝贵意见。纽约市立大学城市学院的荣誉教授迈克尔·恩伯尔博士针对全书内容提出了宝贵的意见。我们对彼得·普尔一丝不苟的校对致以诚挚的谢意。凯瑟琳·罗伯茨－阿贝尔以其出色的能力策划了本书的出版,耶德·佐拉·希比利亚在各个阶段对本书内容进行了杰出的编辑,我们也在此向二位致以诚挚的谢意。

目　录

定理,于是得到:

$$\frac{CD}{AC}=\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}=\frac{\sin\frac{1}{2}\angle BAC}{\sin\left(\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}。$$

我们从通过角平分线设立的第一个关系,可以给出如下方程:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}。$$

我们知道 $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$。所以,$\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$,所以 $\gamma+\frac{\alpha}{2}=\beta+\frac{\alpha}{2}$。于是,我们得出 $\gamma=\beta$,或者说$\angle ACD=\angle ABC$,所以三角形 ABC 是等腰三角形。

错误隐藏在正弦函数后面,乍看上去不很清楚。

从 $\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$,可以得到

$$\gamma+\frac{\alpha}{2}=(-1)^k\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+k\pi,$$

或

$$\gamma=(-1)^k\beta+\frac{\alpha\cdot[(-1)^k-1]}{2}+k\pi,$$

其中 k 可取一切整数值。

对一个三角形可以有两个直角的错误证明

下面这个几何错误能够让一个不知道底细的人感到十分不

安。我们将使用两个相交圆，它们的大小可以相等，也可以不同。如图 4.46 所示，我们将通过圆的两个交点之一画出两个圆的直径 POA 和 $PO'B$，然后连结这两条直径的另一端 AB。

在图 4.46 中，线段 AB 连结了两条直径 AP 与 BP 的端点，它 176
与圆 O 交于 D 点，与圆 O' 交于 C 点。我们发现，$\angle ADP$ 内接于半圆 PNA，$\angle BCP$ 内接于半圆 PNB，因此它们都是直角。然后我们便处于一种两难境地：三角形 CPD 有两个直角！这是不可能的。所以，我们一定在什么地方出错了。

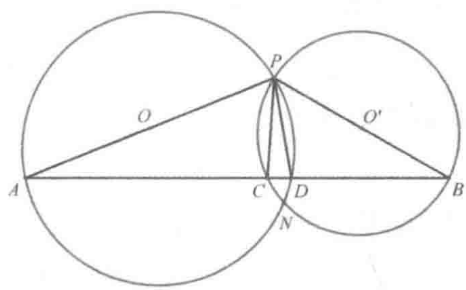

图 4.46

欧几里得的工作漏掉了中间性概念，正是这种状况让我们陷入了这一两难处境。在准确作图之后，我们就会发现，$\angle CPD$ 一定为零，因为一个三角形的内角和不可能大于 180°。这会让三角形 CPD 不存在。图 4.47 告诉我们，这种情况应该如何正确作图。

通过图 4.47，我们很容易就可以证明 $\triangle POO' \cong \triangle NOO'$，然后可知 $\angle POO' = \angle NOO'$。因为 $\angle PON = \angle A + \angle ANO$，而且 $\angle ANO = \angle NOO'$（内错角），所以 $\angle POO' = \angle A$，因此 $AN /\!/ OO'$。同理可证， 177
在圆 O' 中有 $BN /\!/ OO'$。因为 AN 和 BN 这两条线段都与 OO' 平行，

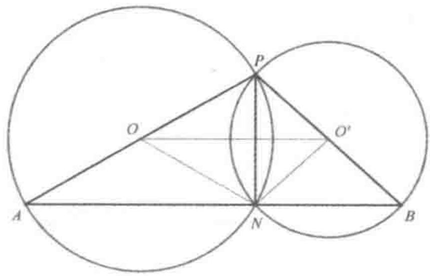

图 4.47

所以它们实际上一定是同一条线段 ANB。这就证明了图 4.47 是正确的,而图 4.46 是错误的。

对于一个普遍错误的忽视

有时候我们的推理过程会发生错误,因为忽视了不合理的假定。我们不妨以三角形的内角和为 180°的证明为例。

在图 4.48 中,我们可以看到一个三角形 ABC 和它的一边 AB 上的一点 D。如果令 x 为三角形 ACD 和三角形 DCB 各自的内角之和,则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$,且 $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$。

将两个等式相加,我们可以得到 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 4$

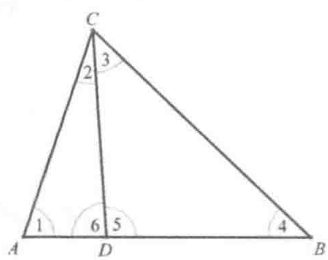

图 4.48

$+\angle 5=2x$。而$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=x$，因为这是三角形 ABC 的各个内角之和。然而，因为$\angle 5$与$\angle 6$互为补角，所以它们的和是 $180°$。由此可知 $x+180°=2x$，因此 $x=180°$。错！在这个“证明”中有一个错误。在这个“证明”开始的时候，我们假定三角形 ACD 和三角形 DCB 的内角和各自都是 x，但我们无权假定所有三角形的内角和都是一样的。这一证明的结果是正确的，但这一证明并不完整，因此是错误的！

两条不相等的线段其实是相等的 178

让我们一步步做完下面这一“证明”，看看你能否找出错误所在。我们将提供一个线索：与前面的几何错误不同，这次的错误与图形无关。首先，如图 4.49 所示，已知任意三角形 ABC，线段 DE 平行于边 AB，并与 ABC 的另外两条边 AC 与 BC 分别交于 D、E 两点。

由此我们知道$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$。所以，$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DC}$，或者说 $AB\cdot$

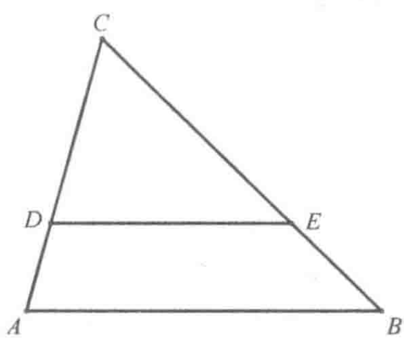

图 4.49

$DC = DE \cdot AC$。

现在我们将等式两边同乘以 $AB - DE$，可得 $AB^2 \cdot DC - AB \cdot DC \cdot DE = AB \cdot DE \cdot AC - DE^2 \cdot AC$。

接着在以上等式的两边同时加上 $AB \cdot DC \cdot DE$，并减去 $AB \cdot DE \cdot AC$，这样可得 $AB^2 \cdot DC - AB \cdot DE \cdot AC = AB \cdot DC \cdot DE - DE^2 \cdot AC$。

分别对等式两边的表达式提取公因式，则有 $AB(AB \cdot DC - DE \cdot AC) = DE(AB \cdot DC - DE \cdot AC)$。

现在令等式两边同时除以 $AB \cdot DC - DE \cdot AC$，则有 $AB = DE$。这是荒谬的，因为我们可以看出 $AB > DE$。图形中没有错误，那么错误在哪里呢？是的，我们用零作了除数：让我们回想一下这个禁忌除法！这是在我们令上面的等式两边同时除以 $AB \cdot DC - DE \cdot AC$ 的时候发生的，后者等于零，因为 $AB \cdot DC = DE \cdot AC$。我们必须认清，就像这次一样，在有些时候，代数上的错误会造成几何上的荒谬。

179 三角形的每个外角都等于与它不相邻的内角

如图 4.50 所示，我们从三角形 ABC 出发，希望证明角 $\delta =$ 角 α。

现在我们参考图 4.51，图中有一个四边形 $APQC$，作图时我们令 $\angle CAP + \angle CQP = \alpha + \varepsilon = 180°$。然后过三点 C、P 和 Q 作一个圆。我们称直线 AP 与圆相交的另一个交点为 B 点。画出 BC，我们作出了一个圆的内接四边形（即一个可以嵌在圆周上的四边形）$BPQC$，从中可知下面的等式是成立的：

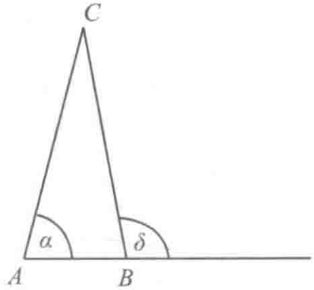

图 4.50

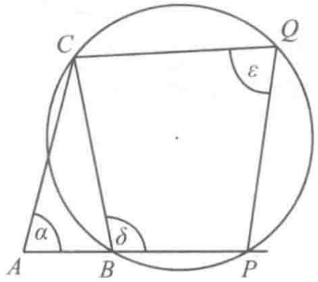

图 4.51

$$\angle CQP + \angle CBP = \varepsilon + \delta = \angle BCQ + \angle BPQ = 180°。$$

然而,我们一开始作图时令$\angle CAP + \angle CQP = \alpha + \varepsilon = 180°$,这样一来 180
我们可以下结论说$\angle CAP = \angle CBP$,也就是说$\alpha = \delta$。肯定有什么弄错了。但错误在什么地方呢?

如果四边形 $APQC$ 具有令$\angle CAP + \angle CQP = \alpha + \varepsilon = 180°$的性质,而其中 3 个顶点 C、P、Q 在同一个圆上,则四边形 $APQC$ 也一定是该圆的内接四边形,这就意味着,点 A 也一定在圆上。这也意味着,A 与 B 这两点必定是同一个点。这样,三角形 ABC 不可能存在。所以,错误现在终于露出了马脚。

一个平面上的两条不平行直线不相交：一个悖论

我们也可以“证明”，如果两条非平行直线中刚好有一条与第三条直线垂直，则这两条直线不会相交。这个悖论是普罗克洛斯(Ploclus,410—485)首先提出的。

这里肯定有错误，因为两条直线不相交只在一种情况下才可能出现，那就是它们相互平行，但这里不是这种情况。所以，请大家和我们一起检验证明，看你们是不是能找出这个错误。如图4.52所示，我们有 $PB \perp AB$，而 QA 不垂直于 AB。现在我们将“证明”，不平行的直线 PB 与 QA 不会相交。

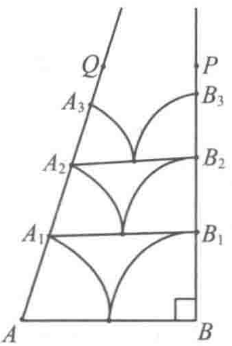

图 4.52

181 首先我们找出 AB 的中点，然后以 A 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 为半径画圆弧，与 AQ 交于 A_1 点；并以 B 为圆心，以 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画圆弧，与 BP 交于 B_1 点。在 AA_1 和 BB_1 段上的任何地方，AQ 与 PB 都不

会相交。如果它们确实在某处相交,比如说在 R 点相交,则会出现一个三角形 ARB,其中两条边的和 $AR+RB<AB$,而这是不可能的。我们现在考虑线段 A_1B_1,并重复上述过程,于是有 $A_1A_2=B_1B_2=\frac{1}{2}A_1B_1$。① 我们继续这一过程,平分 A_2B_2,并得到 $A_2A_3=B_2B_3=\frac{1}{2}A_2B_2$。我们无限继续这一过程,同时知道 A_n 永远不会与 B_n 重合,因为一旦它们重合,就会有一个直角三角形,其斜边 AA_n 将等于 BB_n,这显然是不可能的！所以,在这一永无休止的过程中的任何一步,斜线都不会与垂直线相交。这当然是一派胡言！但错误出在哪里呢?

如图 4.53 所示,让我们考虑直线 AQ 与 BP 相交的情况。与上面一样,沿 AQ 作出一系列线段 $AA_1$②,A_1A_2,A_2A_3,…,同样也沿 BP 182
作出一系列线段 BB_1,B_1B_2,B_2B_3,…。我们知道,我们可以一直沿这两条直线标注这些线段,直至无穷。而且,带有同样下标的线段永远也不会相交。例如,我们知道,A_1A_2 和 B_1B_2 不会相交。但有不同下标的线段可以相交。例如,在图 4.53 中,A_3A_4 就与 B_1B_2 相交。前面的"证明"只是把我们的论据控制在了某些线段上,也就是说控制在那些下标相同的线段上,而它们确实不相交;但这并不意味着其他线段也不会相交。这一错误是建立在推理的有限形式上的。

---

① 此处原文为 $A_2A_3=B_2B_3=\frac{1}{2}A_2B_2$,似有不妥,故按内容做了改动。——译者注

② 原文此处为 AB_1,似有不妥,故按内容做了改动。——译者注

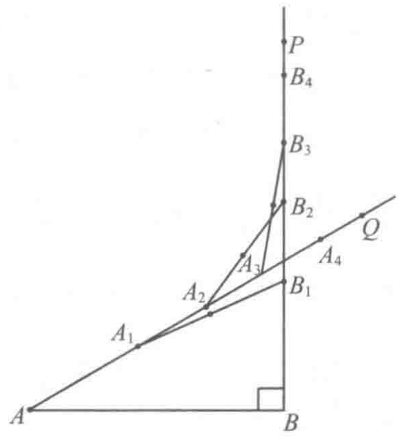

图 4.53

从开始就犯下了错误

我们在这里面对的是基础几何中的一个简单问题。我们可以很容易地在典型教科书中找到这一问题:如图 4.54 所示,我们有一个直角三角形,其斜边长度为 $c=4$,一条直角边 $b=\sqrt{12}$。我们也知道 $\angle BAC=\alpha=40°$。求另一条直角边 a 的长度。

我们可以很容易地得出第三个角的大小为 $\beta=180°-\angle BAC-\angle BCA=180°-\alpha-\gamma=180°-40°-90°=50°$。

183 根据 $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}$,我们可以得到 $a=c\times\sin\alpha=4\times\sin 40°\approx 4\times 0.6428=2.5712$。

到现在为止,似乎一切都没问题。现在,难题来了。我们也可以用下面的方式来解这个问题:

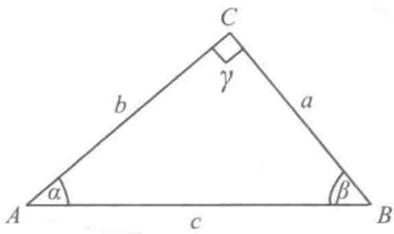

图 4.54

根据 $\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$，可以得到 $a=b\times\tan\alpha=\sqrt{12}\times\tan 40°$ $\approx 3.4641\times 0.8391=2.9067$。

为得出第三个角的大小，我们可以取 $\tan\beta=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}\approx 1.1918$，据此 $\beta\approx 50.0001°$。

现在回过头去看看这两种解法，用它们得到的 β 的大小基本上是一样的。然而，我们得到的 a 值则不同，一个是 2.5712，另一个是 2.9067。为什么会这样？一定是在什么地方出了问题。但这两种解法都是没问题的。这里的毛病是，原题的陈述有错误。

如果我们尝试按照以下给定的条件来作出原题规定的三角形：$\alpha=\angle BAC=40°$，$\gamma=\angle ACB=90°$，$b=\sqrt{12}$，$c=4$，我们将得到一个没有闭合的三角形，如图 4.55 所示。

实际上，符合原题条件的三角形是不存在的，因此，这里的错误发生在原题上，它给出了根本不存在的三角形的条件。我们在这里给出的是这样一个例子：人们毫不怀疑地接受了有问题的信息，因而犯错误。

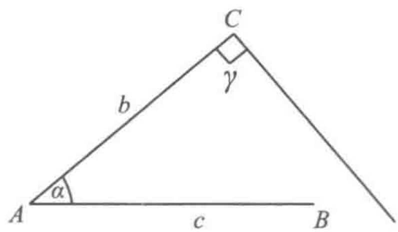

图 4.55

184 在使用动态几何程序时也可能出现错误

随着动态几何绘图程序的迅猛发展，人们往往会忽略久经考验的正确作图模式。例如，我们不妨看看对三角形 ABC 作内切圆的方法。回想一下，内切圆的圆心是三角形的三个角的平分线的交点。因此，作图的第一步是确定这个圆的圆心的位置。

如图 4.56 所示，我们可以看到，圆心的位置 I 点可以通过角平分线 t_a 与 t_b 的交点确定。一个普遍的错误可能会随之出现。举例来说，为了尽快完成任务而使用了某种计算机程序（例如"几何画板"）的作图者将使用圆规器以 I 点为圆心画圆，并逐步将圆放大，直至圆周与三角形的某一边接触（即相切），这一过程可见于图 4.56。然而，只要最初的三角形稍有变形，我们就可以清楚地看出，这个作图方法是有问题的。我们可以从图 4.57 看出，内切圆与三角形各边的相切很不到位。

作内切圆的正确方式应该与我们用尺规作图时一样，即从圆心作三角形一边的垂线 $DI(=EI=FI)$，然后以 DI 的长度为半径