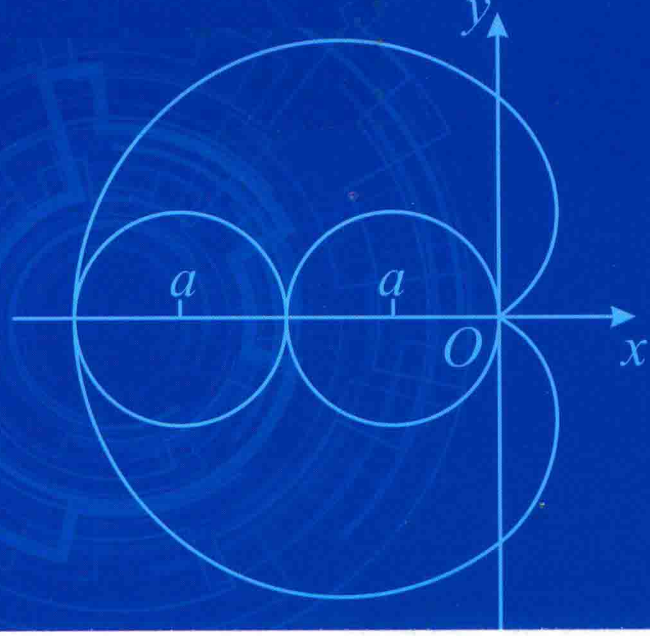
GAODENG
SHUXUE



高等数学

下册

魏 嘉 王 静◎主编

陕西师范大学出版总社

高等数学

（下册）

主　编　魏　嘉　王　静
副主编　裴东林　李　旭

陕西师范大学出版总社

图书代号　JC18N1730

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 魏嘉，王静主编. —西安：陕西师范大学出版总社有限公司，2018.12

ISBN 978-7-5695-0070-7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①魏… ②王…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 140281 号

高等数学·下册

魏　嘉　王　静　主编

责任编辑	王东升　李　恒
责任校对	刘金茹
封面设计	鼎新设计
出版发行	陕西师范大学出版总社 (西安市长安南路 199 号　邮编 710062)
网　　址	http://www.snupg.com
经　　销	新华书店
印　　刷	兴平市博闻印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	11.75
字　　数	273 千
版　　次	2018 年 12 月第 1 版
印　　次	2018 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5695-0070-7
定　　价	30.00 元

读者购书、书店添货或发现印装质量问题，请与本社高等教育出版中心联系。

电话：(029)85303622(传真)　85307864

目 录

第七章　多元函数微分学

第一节　多 元 函 数

一、多元函数的概念

无论在理论上还是在实践中,我们经常会看到,许多量的变化、计算与测定不是由单个因素决定的,而是受到多个因素的影响. 例如,圆柱体的体积 V 与底半径 r 及高度 h 有关,所以 V 是两个变量 r 和 h 的函数,若将这两个变量排个序,那么 V 就是二元有序实数组(r,h)的函数. 又如,地表的温度 T 与测量温度时的位置及时间 t 有关,由于地表各处的位置可以用经度 x 与纬度 y 来刻画,因而 T 就是三个变量 x,y 和 t 的函数,或者说 T 是三元有序实数组(x,y,t)的函数. 一般地,我们用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序实数组的全体构成的集合,即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathbf{R};k=1,2,\cdots,n\}.$$

在解析几何中,通过建立直角坐标系,$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$)中的元素分别与平面(或空间)中的点的坐标或向量的坐标式成一一对应,故 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也称为 n 维空 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量. 与此相适应,称 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$为 $\mathbf{R}^n$ 中点 x 的第 k 个坐标或 n 维向量 x 的第 k 个分量. 特别地,$\mathbf{R}^n$ 中零元 $\mathbf{0}(\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0))$称 $\mathbf{R}^n$ 为中的坐标原点或 n 维零向量.

定义　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集,从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一个 n 元(实值)函数,记作

$$f:D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},$$

或

$$y=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),x\in D.$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为自变量,y 称为因变量,习惯上也常称 y 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数. D 称为函数 f 的定义域,$F(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的值域. 有时也称点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为自变量,而将 x_k 称为自变量 x 的第 k 个分量.

在 n 等于 2 与 3 时，习惯上将点 (x_1,x_2) 与点 (x_1,x_2,x_3) 分别写成 (x,y) 与 (x,y,z). 这时若用字母表示 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的点，则通常写成 $P(x,y)$ 或 $M(x,y,z)$ 等. 相应地，二元函数及三元函数也可简记为 $z=f(P)$ 或 $u=f(M)$.

一个二元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 的图像是指空间点集

$$\{(x,y,f(x,y))\mid(x,y)\in D\},$$

它在几何上表示了空间中的一张曲面. 在直角坐标系下，这张曲面在 xOy 坐标面上的投影就是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D（见图 7－1）. 例如函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\leqslant1)$ 的图像是一张上半球面，它在 xOy 坐标面上的投影是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$，$D$ 就是函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域.

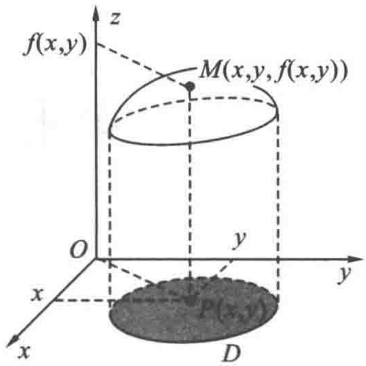


图 7－1

与一元函数相类似，当我们用某个算式表达多元函数时，凡是使算式有意义的自变量所组成的点集称为这个多元函数的自然定义域. 例如，二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的自然定义域为

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

（见图 7－2）. 又如，二元函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 自然定义域为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$$

（见图 7－3）. 我们约定，凡用算式表达的多元函数，除另有说明外，其定义域都是指自然定义域.

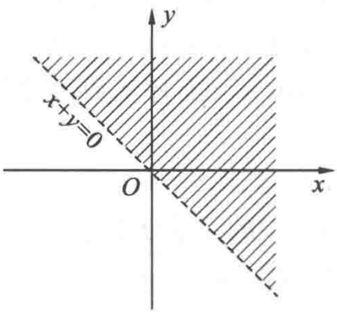


图 7－2

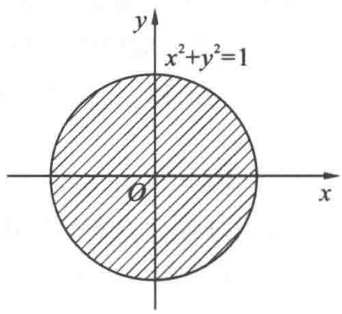


图 7－3

二、多元函数的极限与连续

1. 一些重要点集

在学习一元函数极限时，我们用到邻域等一些重要点集，与此相似我们在学习多元函数极限时也需要这些重要的点集，为此，我们先介绍这些相关概念

(1) 邻域.

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$\delta$ 为某一正数，在 $\mathbf{R}^2$ 中与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\in\mathbf{R}^2\mid |P_0P|<\delta\}$$
$$=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，以 δ 为半径的圆盘（不包括圆周）. $U(P_0,\delta)$ 中除去点 $P_0(x_0,y_0)$ 后所剩部分，称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

如果不需要强调邻域的半径，通常就用 $U(P_0)$ 或 $\mathring{U}(P_0)$ 分别表示点 P_0 的某个邻域或某个去心邻域.

(2)内点、边界点和聚点.

设集合 $E\subset\mathbf{R}^2$，点 $P\in\mathbf{R}^2$，如果存在 $\delta>0$，使得 $U(P,\delta)\subset E$，则称 P 是 E 的内点（见图7－4）. 若在点 P 的任一邻域内，都既有集合 E 的点，又有余集 E^c 的点，则称 P 是 E 的边界点（见图7－5），E 的边界点的全体称为 E 的边界，记作 ∂E. 如果对任意给定的 $\delta>0$，P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 中总有 E 中的点（P 本身可属于 E，也可不属于 E），则称 P 是 E 的聚点.

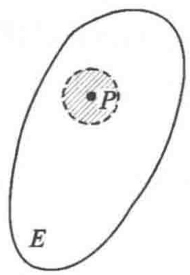


图7－4

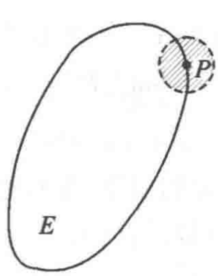


图7－5

例如，设点集 $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$，点 $P(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，若 $1<{x_0}^2+{y_0}^2<2$，则点 P 为 E 的内点；若 ${x_0}^2+{y_0}^2=1$ 或 ${x_0}^2+{y_0}^2=2$，则点 P 为 E 的边界点，也是 E 的聚点. E 的边界 ∂E 为集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=2\}$.

(3)开集与闭集.

设集合 $E\subset\mathbf{R}^2$，如果 E 中每一点都是 E 的内点，则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集；如果 E 的余集 E^c 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

例如，$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集；$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集；而 $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$ 既不是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，也不是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

通常约定空集 $\varnothing$ 是开集，这样 $\varnothing$ 及 $\mathbf{R}^2$ 都既是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，也是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

(4)有界集与无界集.

设集合 $E\subset\mathbf{R}^2$，如果存在常数 $K>0$，使得对所有的 $P\in E$，都有 $\rho(P,O)=\sqrt{x^2+y^2}<K$，则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集. 一个集合如果不是有界集，就称为是无界集.

例如，$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集，$\{(x,y)\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的无界集

(5)区域.

在研究一元函数时,我们经常用到区间的概念,类似地在研究多元函数时,我们经常用到区域的概念.

设 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的非空开集,如果对于 E 中任意两点 P_1 与 P_2,总存在 E 中的折线把 P_1 与 P_2 连接起来(此时称 E 是连通的),则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开区域.可见,开区域即为"连通"的开集.开区域连同它的边界一起,称为闭区域.开区域和闭区域统称为区域.

例如,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 以及 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的开区域;$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}$ 以及 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域.

读者不难将上述这些概念逐一推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中去.

2. 多元函数的极限

现在利用邻域概念来定义二元函数的极限.

定义 1 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,如果存在常数 A.使得对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,只要点 $P(x,y)\in D\cup \mathring{U}(P_0,\delta)$,就有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$(在 D 上)趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,$$

或者 $f(P)\to A(P\to P_0)$,$f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$.

为了区别于一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫作二重极限.

仿此可以定义 n 元函数的极限.

例 1 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证 用 P 与 O 分别表示点 (x,y) 与 $(0,0)$,因为

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=\rho(P,O),$$

故对于任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $P\in\mathring{U}(O,\delta)$ 时,就有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon.$$

所以结论成立.

这里应当指出,按照二重极限的定义,必须当动点 $P(x,y)$ 在 D 上以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 都以常数 A 为极限,才有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

如果仅当 $P(x,y)$ 在 D 上以某种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 趋于常数 A,那么还不能断定 $f(x,y)$ 存在极限.但是如果当 $P(x,y)$ 在 D 上以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 趋于不同的常数,那么便能断定 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 2 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,证明:当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不存在.

证 记 $E_1=\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$,$E_2=\{(x,x)\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$,因在 E_1 上 $(x,y)\to(0,0)$

时，$f(x,y)=f(x,0)=0\to 0$，又在 E_2 上 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)=f(x,x)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$. 由于极限值不同，故当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限不存在.

多元函数极限的定义与一元函数极限的定义有着完全相同的形式，这使得有关一元函数的极限运算法则以及极限的性质均可以平行地推广到多元函数上来，对此这里不多说了.

例 3 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{y}$.

解 令 $f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{y}$，则函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D=\{(x,y)\mid y\neq 0, xy>-1\}$，$P_0(1,0)$ 为 D 的聚点.

由乘积的极限运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(1+xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left[\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot x\right]$$
$$=\lim_{xy\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\lim_{x\to 1}x=1\times 1=1.$$

3. 多元函数的连续性

有了多元函数的极限概念，就可以定义多元函数的连续性.

定义 2 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0(x_0,y_0)\in D$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，如果 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处间断（P_0 称为 $f(x,y)$ 的间断点）.

如果 D 是区域且 $f(x,y)$ 在 D 的每一点处都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数，记作 $f\in C(D)$.

仿此可以定义 n 元函数的连续性.

和一元函数一样，利用多元函数的极限运算法则可以证明，多元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍是连续函数，多元连续函数的复合函数也是连续函数. 同时，与一元函数相似，多元函数在点 P_0 连续时，也具有局部有界、局部保号性，这里就不详细叙述了.

与一元初等函数相类似，一个多元初等函数是指能用一个算式表示的多元函数，这个算式由常量及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到，例如，$x+y^2$，$\frac{x-y}{1+x^2}$，e^{xy^2}，$\sin(x^2+y^2+z)$ 等都是多元初等函数.

对多元初等函数的连续性，也有与一元初等函数相类似的结论，这就是：**一切多元初等函数在其定义域内的任一区域上是连续的.**

例如初等函数 $f(x,y)=\ln(x^2-y)$ 的定义域是开区域 $D=\{(x,y)\mid y<x^2\}$，由上述结论知 $f(x,y)$ 在 D 内连续. 又在 D 的边界 $C=\{(x,y)\mid y=x^2\}$ 上，每一点都是 D 的聚点，且 $f(x,y)$ 在 C 上没有定义，故 C 上各点都是 $f(x,y)$ 的间断点.

在求多元初等函数$f(P)$在点P_0处的极限时，如果点P_0属于函数的定义域内的某个区域，则由函数的连续性，该极限值就等于函数在点的函数值，即

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例如，设$f(x,y)=\dfrac{2+\sqrt{xy+2}}{xy}$，则

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=f(1,2)=2.$$

最后我们列举有界闭区域上多元连续函数的几个性质，这些性质分别与(有界)闭区间上一元连续函数的性质相对应.

性质1　有界闭区域D上的多元连续函数是D上的有界函数.

性质2　有界闭区域D上的多元连续函数在D上存在最大值和最小值.

性质3　有界闭区域D上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

性质1与2对于有界闭集上的多元连续函数也是成立的.

习题7-1

1. 根据已知条件，写出下列各函数的表达式：

(1)$f(x,y)=x^y+y^x$，求$f(xy,x+y)$；

(2)$f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}$，求$f(x)$；

(3)$f(x,y)=x+2y$，求$f(xy,f(x,y))$.

2. 求下列各函数的定义域，并绘出定义域的图形：

(1)$f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(2)$f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x+y}$；

(3)$f(x,y)=\ln x+\ln\sin y$；　　(4)$f(x,y)=\ln(1-|x|-|y|)$.

3. 求下列各极限：

(1)$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-x+xy}{x^2+y^2}$；　　(2)$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3)$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2+x)\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；　　(4)$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

4. 证明下列函数当$(x,y)\to(0,0)$时极限不存在：

(1)$f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$；　　(2)$f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$.

5. 下列函数在何处是间断的？

(1)$z=\dfrac{y^2+x}{y^2-x}$；　　(2)$z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

6. 设函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续，且$f(x_0,y_0)>0$(或$f(x_0,y_0)<0$)，证明：存在点P_0的某个邻域$U(P_0,\delta_0)$，使得当$(x,y)\in U(P_0,\delta_0)$时，有$f(x,y)>0$(或$f(x,y)<$

0).(本题结论就是二元连续函数的局部保号性)

第二节 偏 导 数

一、偏导数

大家知道,一元函数的导数定义为函数增量与自变量增量的比值的极限,它刻画了函数对于自变量的变化率.对于多元函数来说,由于自变量个数的增多,函数关系就更为复杂,但是我们仍然可以考虑函数对于某一个自变量的变化率,也就是在其中一个自变量发生变化,而其余自变量都保持不变的情形下,考虑函数对于该自变量的变化率.例如由物理学知,一定量理想气体的体积 V,压强 P 与绝对温度 T 之间存在着某种联系,我们可以观察在等温条件下(T 视为常数)体积对于压强的变化率,也可以分析在等压过程中(P 视为常数)体积对于温度的变化率,多元函数对于某一个自变量的变化率引出了多元函数的偏导数概念.

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,当 y 固定在 y_0,而 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时,函数相应地取得增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \qquad ①$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},z_x(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\text{或}f_x(x_0,y_0).$$

类似地固定 $x=x_0$,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \qquad ②$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 y 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},z_y(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\text{或}f_y(x_0,y_0).$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 同时存在对 x 与对 y 的偏导数时,简称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某平面区域 D 内的每一点 (x,y) 处都存在对 x 或对 y 的偏导数,那么这些偏导数仍然是 x,y 的函数,我们称它们为 $f(x,y)$ 的偏导函数.记作 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},f_x(x,y),f_y(x,y),z_x,z_y$ 等.在不致产生误解时,偏导函数也简称为偏导数.

从偏导数的定义可以看出,计算多元函数的偏导数并不需要新的方法.例如当我们计算 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数时,因为已将 y 视为常数,故若令 $h(x)=f(x,y)$,那么

$$f_x(x,y)=h'(x).$$

所以 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数就是 $h(x)$ 的导数,这样,一元函数的求导公式和求导法则都可

沿用到多元函数偏导数的计算上来.

例 1 求 $z=x^2+3xy$ 在点$(1,2)$的偏导数.

解 将 y 视为常量,对 x 求导,得

$$z_x(x,y)=2x+3y.$$

同样将 x 视为常量,对 y 求导,得

$$z_y(x,y)=3x,$$

所以

$$z_x(1,2)=8,z_y(1,2)=3.$$

例 2 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的偏导函数.

解 将 y 和 z 都视为常量,对 x 求导,得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

根据自变量 x,y,z 在表达式中的对称性,立即可写出

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 3 已知一定量理想气体的状态方程为 $PV=RT$(R 为常量),证明

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 因

$$P=\frac{RT}{V},\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},$$

$$V=\frac{RT}{P},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P},$$

$$T=\frac{PV}{R},\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

例 3 表明,用作偏导数记号的$\frac{\partial P}{\partial V},\frac{\partial V}{\partial T}$与$\frac{\partial T}{\partial P}$应当作为整体记号来看待,不能看作分子与分母之商. 在偏导数记号$\frac{\partial z}{\partial x}$中,单独的分子与分母并未赋予独立的含义.

偏导数的几何意义 设二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可偏导.

如图 7 - 6 所示,设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面 $z=f(x,y)$上的一点,过点 M_0 作平面 $y=y_0$,此平面与曲面相交得一曲线,曲线的方程为

$$\begin{cases}z=f(x,y),\\y=y_0.\end{cases}$$

由于偏导数 $f_x(x_0,y_0)$等于一元函数 $f(x,y_0)$的导数

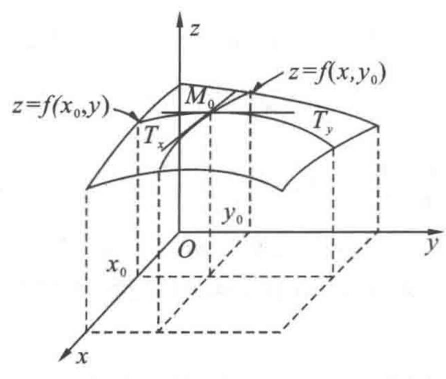


图 7 - 6

$f'(x,y_0)\big|_{x=x_0}$，故由一元函数导数的几何意义可知：偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率.

同理可知：偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 在几何上表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率.

我们知道，一元函数如果在某一点可导，那么函数在该点一定连续，但是对于多元函数来说，**如果它在某一点可偏导，则并不能保证它在该点连续**（见例 4）.

例 4　$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0), \\ 0, & 当(x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可偏导. 但在点 $(0,0)$ 处不连续.

事实上，因为按偏导数的定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

由此可见 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导. 但由第一节的例 2，我们知道函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不存在极限，因而在该点处不连续.

二、高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内处处存在偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$，如果这两个偏导函数仍可偏导，则称它们的偏导数为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，按照求导次序的不同，有下列四种不同的二阶偏导数.

函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的二阶偏导数，记作 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$f_{xx}(x,y)$，$z_{xx}$ 等，由下式定义：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}或\ z_{xx}或\ f_{xx}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

类似地可定义其他三种二阶偏导数，其记号和定义分别为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}或\ z_{xy}或\ f_{xy}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}或\ z_{yx}或\ f_{yx}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}或\ z_{yy}或\ f_{yy}(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

其中偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数，仿此可继续定义二元函数的更高阶的偏导数，并且可仿此引入相应的记号. 例如：$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$.

例 5 求 $z=x^3y^2+xy$ 的四个二阶偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y+1$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y+1.$

例 6 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0).\end{cases}$

求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，我们有

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，按定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

于是

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

我们看到，在例 5 中混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，但在例 6 中两者不相等，这说明混合偏导数与求偏导数的次序有关. 但是就通常所遇到的函数而言，这种情况不会发生，这是因为我们有如下定理：

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导函数 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

证明从略.

对于更为高阶的混合偏导数，也有类似的结论成立，即若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内处处存在直到 q 阶的所有偏导函数，并且所有这些偏导函数都在 D 内连续（今后我们称这样的函数为 D 内的 $C^{(q)}$ 类函数，记作 $f\in C^{(q)}(D)$），那么 $f(x,y)$ 在 D 内的 q 阶混合偏导数与求偏导数的次序无关，例如 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}$.

多元函数的偏导数常常用于建立某些偏微分方程. 偏微分方程是描述自然现象、反映自然规律的一种重要手段. 例如方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(a 是常数)称为波动方程,它可用来描述各类波的运动. 又如方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

称为拉普拉斯(Laplace)方程,满足这一方程的 $C^{(q)}$ 类函数称为二元调和函数,它在热传导、流体运动等问题中有着重要的应用.

例 7 验证函数 $z=\sin(x-ay)$ 满足波动方程.

证 因

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x-ay),\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin(x-ay);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-a\cos(x-ay),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-a^2\sin(x-ay),$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

习题 7-2

1. 按定义求下列函数在指定点处的一阶偏导数:

(1) $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{|x|}{y}}$,点$(0,1)$;

(2) $z=x^2\mathrm{e}^y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$,点$(1,0)$.

2. 求下列函数的一阶偏导函数:

(1) $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$; (2) $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$;

(3) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; (4) $z=x^y\cdot y^x$;

(5) $u=\arctan(x-y)^z$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当(x,y)=(0,0).\end{cases}$

证明:$f(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续且可偏导,并求出 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 的值.

4. 求旋转曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 与平面 $x=1$ 的交线在点$(1,1,\sqrt{3})$处的切线与 y 轴正向之间的夹角.

5. 求下列函数的所有二阶偏导数:

(1) $z=x^2y+x\sqrt{y}$; (2) $z=x\arcsin\sqrt{y}$;

(3) $z=\cos^2(x+2y)$; (4) $z=\mathrm{e}^{xy^2}$.

6. 验证下列函数满足波动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$:

(1) $u=\sin(kx)\sin(akt)$; (2) $u=\ln(x+a)$;