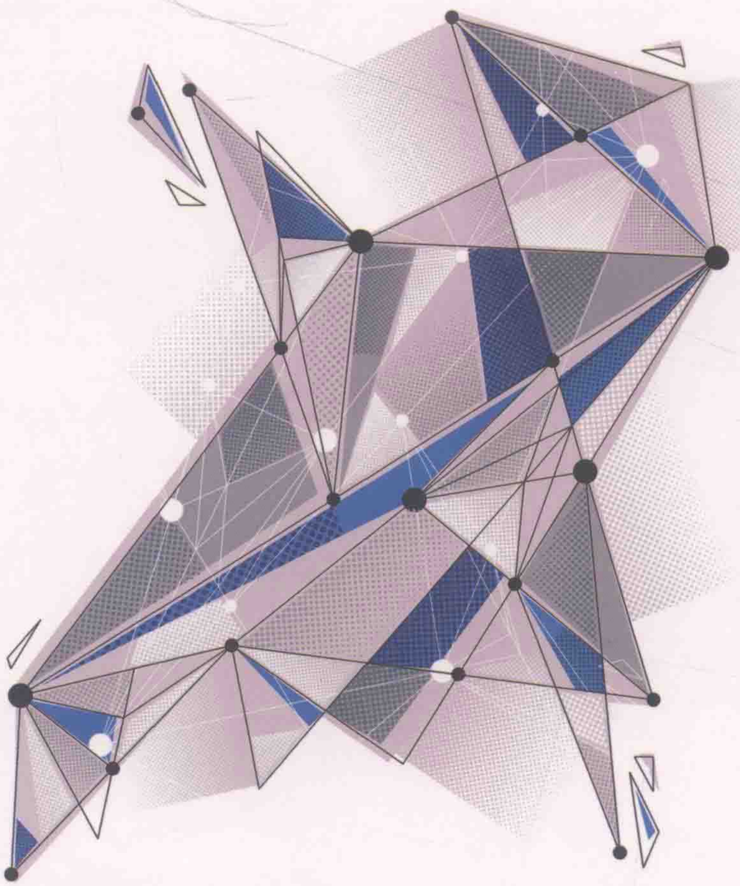
Advanced Mathematics Foundation

高等数学基础

◎ 解玖霞 主编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学基础

主编 解玖霞

常州大学图书馆
藏书章

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/解玖霞主编.—南京：东南大学出版社，2019.1

ISBN 978 - 7 - 5641 - 8238 - 0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①解…　Ⅲ.①高等数学-职业教育-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 011174 号

高等数学基础

出版发行　东南大学出版社
社　　址　南京市四牌楼 2 号　**邮编**:210096
出 版 人　江建中
责任编辑　马　伟
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　丹阳市兴华印刷厂
版　　次　2019 年 1 月第 1 版
印　　次　2019 年 1 月第 1 次印刷
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　13.75
字　　数　342 千
书　　号　ISBN　978-7-5641-8238-0
定　　价　39.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话(传真)：025-83791830

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　　言

职业院校学生生源和学生类型多样,数学基础参差不齐。有夏季高考学生、春季高考学生、单独招生学生、校企合作学生、免试录取退伍军人,有师范类学生、非师范类学生,非师范类学生中还有工科类学生、经济类学生等。有些学生来自普通高中,有些学生来自职业高中或者中等职业学校;有的学生数学基础比较好,有的学生数学基础比较差。数学基础较差的学生普遍感觉数学学习难度较大。为了适应春季招生、校企合作、职业高中、中等职业学校等生源组成的数学基础较差的学生使用,特编写了本书。

本书包括初等数学内容:第一章集合,第二章不等式,第三章函数,第四章任意角的三角函数,第五章基本初等函数,第六章数列;高等数学内容:第七章极限,第八章导数与微分,第九章导数的应用,第十章不定积分,第十一章定积分。

在本书的编写过程中,以传授知识、培养能力为目标,以"必须、够用"为度,具有以下特点:

1. 注重基础知识

本书内容特别关注了与九年义务教育阶段数学课程的衔接,对传统的初等数学和高等数学内容进行精心选择,以保证必要的、基础的数学水准,第一章到第六章初等数学的选取是根据第七章到第十一章高等数学学习的需要。因为生源来自不同的职业高中、中等职业学校,学生的数学基础参差不齐,数学知识点有的学生学习过,有的学生没有学习过。第一章到第六章初等数学的设置既起到复习的作用,又起到数学知识补充、统一的作用。

2. 通俗、实用、简单、易学、易教,深入浅出

针对学生的心理特点、认识规律、数学基础,本书在编写过程中力求降低知识起点,例如在数列极限概念的阐述上没有用"$\varepsilon-\delta$"做出的严格的数学定义,而是用直观、形象的语言,用"无限接近"描述介绍了极限的定义。利用通俗易懂的语言,采取数形结合的方法,以图、表直观的讲解概念、定理,注重背景材料的引入和直观阐述,避免面面俱到地复杂论证,淡化定理的理论推导,加强分析过程。在例题的讲解过程中尽量把步骤详细罗列,每个知识点后面紧跟课堂练习,课堂练习的设置起点低、难度小,基本和例题差不多,做到边讲边练。本书的内容、例题、课堂练习题、习题、复习题的设置都本着深入浅出的原则,使教材易教易学。

3. 富有弹性,适合理科类和文科类各个专业

本书采用模块结构编排方式,将教材内容分为必学、选学(标有 *)部分,选学内容分为两种情况:一是难度较大的数学知识;二是在数学知识的不同应用上进行选学,例如积分在物理上的应用,积分在经济分析中的应用等,增强了教材的弹性和实用性。

4. 突出应用,注意激发兴趣、培养学生数学素质

本书采取了分散和集中相结合的方式,编排了有价值的数学应用知识,在合适的章节设有应用题,注重数学知识的应用。本书十分重视创设情境引入新课,激发学生的学习兴趣,

在阅读理解中选取了部分数学史、数学思想、数学方法，培养学生的数学素养。

本教材所有的图像由杨蕊绘制，孟玲对本书的出版提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不足甚至错误之处，恳请广大师生批评指正。

编　者

2018 年 12 月

目　录

第一章 集合

第一节 集 合

亲爱的同学们，打开东营地图，东西街道的名称和南北街道的名称有什么特征呢？例如南北街道有曹州路、胶州路、沂州路…… 东西街道有黄河路、红河路、淮河路、大渡河路……前者以州命名，后者以河命名.当你对东营市中心城区街道名称心中有数时，你已经在不知不觉中运用“集合”的思想进行思考了.

集合论起源于 19 世纪后期，是现代数学的一个分支，它的基本思想、方法和符号已经运用到数学的各个领域.

一、集合的概念

先看下面的例子：

(1) 不超过 10 的所有正偶数；

(2) 一个班级里所有的学生；

(3) 方程 $x^2-5x+6=0$ 的全部实数根；

(4) 所有的等腰三角形；

(5) 东营职业学院图书馆里的所有藏书；

(6) 到一条线段两端距离相等的所有点.

上面的例子指的都是一些对象的全体，这些对象分别具有某些特定的属性.

通常，把由某些确定的对象构成的整体叫做**集合**(简称**集**).构成集合的每个对象叫做这个集合的**元素**.

上面的例子中，(1)是由 2,4,6,8,10 组成的集合，其中 2,4,6,8,10 都是该集合的元素；(2)是由一个班级里所有学生组成的集合，这个班的每个学生都是该集合的元素；(3)是由 2,3 组成的集合，其中 2,3 都是该集合的元素；(4)是由所有等腰三角形组成的集合，每个等腰三角形都是该集合的元素…… 可以看出，有些集合的元素个数是有限的，有些集合的元素个数是无限的.

由有限个元素构成的集合叫做**有限集**；由无限个元素构成的集合叫做**无限集**.

集合的元素可以是一些人、一些物、一些数、一些点、一些式子、一些图形等等.

注意 通常，我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

例1 下列对象能否构成集合?

(1) 小于 6 的自然数; (2) 某校工程造价专业的全体学生;

(3) 中国著名的画家; (4) 方程 $x^2=16$ 的所有解.

解 (1) 由于小于 6 的自然数是确定的对象,所以能构成集合.

(2) 由于工程造价专业的学生是确定的对象,所以能构成集合.

(3) 由于著名没有具体的标准,对象是不确定的,所以不能构成集合.

(4) 由于方程 $x^2=16$ 的解为 -4 和 $+4$,它们是确定的对象,所以能构成集合.

在数学中,我们将由数构成的集合叫做**数集**.常见的数集有:

自然数集:全体自然数构成的集合,记作 **N**;

正整数集:全体正整数构成的集合,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

整数集:全体整数构成的集合,记作 **Z**;

有理数集:全体有理数构成的集合,记作 **Q**;

实数集:全体实数构成的集合,记作 **R**.

为了讨论问题的方便,我们将不含任何元素的集合叫做**空集**,记作 $\varnothing$.

例如,大于 5 且小于 2 的自然数构成的集合为空集.

例2 指出下列集合中,哪个是空集,哪个不是空集?

(1) 方程 $x+3=0$ 在实数范围内的解; (2) 方程 $x+3=0$ 在自然数范围内的解.

解 (1) 方程 $x+3=0$ 在实数范围内只有一个解 $x=-3$,所以此集合不是空集.

(2) 方程 $x+3=0$ 在自然数范围内无解,所以此集合是空集.

课堂练习 1

1. 判断下列对象能否构成一个集合,如果能,写出它的元素.

(1) 与 2 接近的实数; (2) 小于 8 的自然数; (3) 中国古代四大发明.

2. 写出下列集合的元素:

(1) 方程 $3x-2=1$ 的解;

(2) 平方后等于 4 的实数组成的集合;

(3) 大于 4 且小于 12 的自然数组成的集合.

3. 判断下列集合是否为空集:

(1) 方程 $x^2+2x+2=0$ 的解集; (2) 方程 $x^2=1$ 的解集;

(3) 大于 3 且小于 -1 的实数; (4) 不等式 $x+4>4$ 的解集.

二、集合的表示法

集合的表示法有列举法和描述法.

(一) 列举法

当集合中的元素不多时,常常把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内,元素之间用逗号隔开,这种表示集合的方法叫做列举法.

大于1且小于7的自然数构成的集合,用列举法表示为$\{2,3,4,5,6\}$;中国古代四大发明构成的集合,用列举法表示为{指南针,造纸术,活字印刷术,火药}.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例3　用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x-2=0$ 的解集；

(2) 大于 3 且小于 9 的奇数构成的集合；

(3) 中国的直辖市构成的集合.

解　(1) $\{2\}$；

(2) $\{5,7\}$；

(3) {北京,天津,上海,重庆}.

注意　用列举法表示集合时不必考虑元素的前后顺序，例如，$\{2,4,6\}$ 与 $\{6,4,2\}$ 表示同一集合；集合中的元素是互异的，列举的元素不能重复出现，例如，$\{2,4,2\}$ 的这种表示方法是错误的；对于含较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显的规律，也可用含有省略号的列举法，例如，小于 1 000 的自然数可表示为 $\{0,1,2,3,\cdots,999\}$.

课堂练习 2

1. 学校体育组购进了两批器材，第一批有铁饼、乒乓球和羽毛球；第二批有跳绳、篮球、杠铃和剑，试用列举法表示这两个集合.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) 大于 2 且小于 13 的偶数构成的集合；　(2) 方程 $x^2=4$ 的解集；

(3) 不等式 $6\leqslant x<7$ 的整数解构成的集合.

(二) 描述法

思考：不等式 $x-4>1$ 的所有实数解构成的集合能用列举法表示吗？

将集合中的所有元素的共同性质描述出来，写在大括号{　　}内，这种表示集合的方法叫做描述法，其一般形式为{x | x 具有的共同性}.

例如，$x-2>1$ 的所有实数解构成的集合，用描述法表示为 $\{x \mid x-2>1, x\in\mathbf{R}\}$；所有正方形构成的集合，用描述法表示为{$x$ | x 是正方形}.

例4　用描述法表示下列集合：

(1) 大于 7 的全体实数构成的集合；

(2) 所有正奇数构成的集合；

(3) 所有的长方形构成的集合.

解　(1) $\{x \mid x>7, x\in\mathbf{R}\}$；

(2) {x | x 是正奇数}；

(3) {x | x 是长方形}.

注意　本教材中，若无特殊说明，上述表示法中的 $x\in\mathbf{R}$ 均可省略不写；元素与性质之间用竖线"|"分隔，其中，大括号内竖线左边为集合中元素的代表符号，竖线右边为集合中元素的共同性质.

为了方便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分，例如{直角三角形}.

习惯上，我们把求得的不等式的解用集合表示，叫做不等式解的集合，简称不等式的解集.例如，$\{x \mid x>5\}$ 就是不等式 $x-3>2$ 的解集.类似地，把求得的方程的解用集合表示，叫做方程的解的集合，简称方程的解集.例如，$\{-1,4\}$ 是方程 $x^2-3x-4=0$ 的解集，$\{(-1,4)\}$ 是方程组 $\begin{cases}x+2y=7,\\2x+y=2\end{cases}$ 的解集.

例 5 写出下列方程或不等式在实数范围内的解集：

(1) $4x^2-9=0$； (2) $5x-1\leqslant x+3$.

解 (1) 因为 $4x^2-9=0$ 在实数范围内有两个解：$x_1=-\dfrac{3}{2}$，$x_2=\dfrac{3}{2}$，所以方程 $4x^2-9=0$ 的解集为 $\left\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right\}$.

(2) 解不等式 $5x-1\leqslant x+3$：把含有 x 的项放在不等号的一边，把常数项放在不等号的另一边，得 $5x-x\leqslant 3+1$，解得 $x\leqslant 1$.

所以不等式 $5x-1\leqslant x+3$ 的解集为 $\{x \mid x\leqslant 1, x\in \mathbf{R}\}$.

课堂练习 3

用描述法表示下列集合：

(1) 周长等于 8 cm 的三角形； (2) 小于 10 并且能被 3 整除的自然数；

(3) 不大于 2 的所有实数构成的集合； (4) 到两坐标轴距离相等的点；

(5) 方程组 $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解集.

三、元素与集合的关系

2008 年北京奥运会的五个吉祥物：贝贝、晶晶、欢欢、迎迎、妮妮组成了“北京奥运会吉祥物”集合，这五个吉祥物中的每一个都是这个集合的元素，2004 年雅典奥运会的吉祥物雅典娜就不是这个集合的元素.

在数学中，如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a **不属于**集合 A，记作 $a\notin A$.

例如，所有的高等职业学校构成集合 A，我们现在就读的高等职业学校 a 就属于集合 A，记作 $a\in A$；我们曾经就读的小学 b 就不属于集合 A，记作 $b\notin A$.

因为集合中的元素是确定的，所以对于任何一个对象，或者是这个集合中的元素，或者不是这个集合中的元素，二者必居其一.

“$\in$”“$\notin$”是表示元素与集合之间的关系符号，不能表示集合与集合之间的关系.

例 6 用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) 3 ____ $\mathbf{R}$； (2) -5 ____ $\mathbf{N}$； (3) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{Z}$；

(4) $\dfrac{2}{5}$ ____ $\mathbf{Q}$； (5) 0 ____ $\{0\}$； (6) 0 ____ $\varnothing$.

解 (1) $\in$；(2) $\notin$；(3) $\notin$；(4) $\in$；(5) $\in$；(6) $\notin$.

课堂练习 4

用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1) -3 ____ $\mathbf{Z}$； (2) 0.5 ____ $\mathbf{N}$； (3) 6 ____ $\mathbf{N}_+$；

(4) 2 ____ $\mathbf{R}$； (5) π ____ $\mathbf{R}$； (6) $\sqrt{3}$ ____ $\mathbf{Q}$.

习题 1-1

1. 判断下列各组对象能否构成集合,并说明理由.

(1) 漂亮的衣服；　(2) 所有的圆；

(3) 到一个角的两边距离相等的点；　(4) 方程 $x^2=16$ 解集.

2. 指出下列集合中的元素：

(1) 大于 1 且小于 9 的自然数；　(2) 一年中有 31 天的月份的全体；

(3) 构成英语单词 word 的字母的全体；　(4) 一个班级里所有的学生；

(5) 平方等于 16 的实数.

3. 用"∈"或"∉"填空:(其中 A 表示小于 5 的自然数构成的集合,B 表示不等式$2x+5>7$的所有实数解构成的集合)

(1) 3____A；　(2) $\frac{3}{4}$____A；　(3) $\sqrt{5}$____A；

(4) 0.6____B；　(5) -5____B.

4. 用列举法和描述法分别表示下列集合：

(1) 小于 8 的自然数；　(2) 倒数等于 4 的数；

(3) 不等式 $6\leqslant x<8$ 的整数解构成的集合；(4) 方程 $x^2+2x+1=0$ 的解集.

5. 将下列集合用另一种方法表示：

(1) $A=\{x\mid -1<x<6, x\in \mathbf{Z}\}$；　(2) $B=\{1,2,3\}$；

(3) $B=\{x\mid x=2n, n\in \mathbf{N}^*\}$.

6. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 小于 9 的所有正整数构成的集合；　(2) 不等式 $2x+2<0$ 的解集；

(3) 大于 3 且小于 5 的自然数；　(4) 所有的奇数构成的集合.

第二节　集合之间的关系

一、子集

如果用字母 A 表示集合{东营市市民},字母 B 表示集合{中华人民共和国公民},显然集合 A 中的任何元素都属于集合 B.

一般地,对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 是集合 B 的**子集**,也就是说,如果由任意的 $x\in A$,可以推出 $x\in B$,那么集合 A 就是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),读作集合 A 包含于集合 B(或集合 B 包含集合 A).

例如,集合 $A=\{2,4,6\}$,集合 $B=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 就是集合 B 的子集.

为了直观地说明集合之间的关系,我们通常用封闭的曲线来表示集合,它内部的点表示集合的元素.例如集合 B 和它的子集 A 之间的关系可用图 1-1 和图 1-2 来表示.

空集是任何集合的子集.也就是说,对于任何集合 A,都有 $\varnothing\subseteq A$.

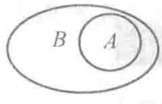


图 1-1

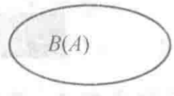


图 1-2

当集合 A 不包含于集合 B,或集合 B 不包含集合 A 时,则记作 $A \not\subseteq B$(或 $B \not\supseteq A$),读作集合 A 不包含于集合 B(或集合 B 不包含集合 A).

例 1 用"$\subseteq$""$\supseteq$""$\in$"或"$\notin$"填空:

(1) $\{3\}$______$\{3, 4\}$; (2) $\varnothing$______$\{0\}$;

(3) $\{1,2,4,3\}$______$\{1,3\}$; (4) b______$\{b\}$.

解 (1) 集合$\{3\}$的元素是集合$\{3,4\}$的元素,因此$\{3\} \subseteq \{3,4\}$.

(2) 空集是任何集合的子集,因此 $\varnothing \subseteq \{0\}$.

(3) 集合$\{1,3\}$的元素都是集合$\{1,2,4,3\}$的元素,因此$\{1,2,4,3\} \supseteq \{1,3\}$.

(4) b 是集合$\{b\}$的元素,因此 $b \in \{b\}$.

课堂练习 1

1. 写出集合 $A=\{x \mid x>3\}$ 与集合 $B=\{x \mid x>5\}$ 之间的关系.

2. 写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 与集合 $B=\{8$ 与 14 的公约数$\}$ 之间的关系.

二、真子集

已知集合 $A=\{1,3,5\}$,集合 $B=\{1,3,5,7\}$.分析集合 A 是否为集合 B 的子集,集合 B 中是否包含不属于集合 A 的元素.

如果集合 $A \subseteq B$,并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$),读作集合 A 真包含于集合 B(或集合 B 真包含集合 A).

显然,如果集合 A 是集合 B 的真子集,那么集合 B 中至少有一个元素不是集合 A 中的元素.例如,集合 $A=\{2\}$,集合 $B=\{2,4\}$,$A \subsetneqq B$,集合 B 中有一个元素 4 不属于集合 A,因此集合 A 是集合 B 的真子集.又如,自然数集 $\mathbf{N}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的真子集;自然数集 $\mathbf{N}$ 是有理数集 $\mathbf{Q}$ 的真子集.

空集 $\varnothing$ 是任何非空集合 A 的真子集,即 $\varnothing \subsetneqq A$.

子集与真子集的区别就在于"$A \subseteq B$"允许 $A=B$,而"$A \subsetneqq B$"不允许 $A=B$,所以,若"$A \subsetneqq B$",则"$A \subseteq B$"一定成立;若"$A \subseteq B$",则"$A \subsetneqq B$"不一定成立,因为 A 可能等于 B.

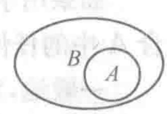


图 1-3

注意 真子集具有传递性,即如果集合 A 是集合 B 的真子集,集合 B 是集合 C 的真子集,那么集合 A 是集合 C 的真子集.记作:$A \subsetneqq B$ 且 $B \subsetneqq C \Rightarrow A \subsetneqq C$.如果集合 A 是集合 B 的真子集,它们的关系见图 1-3.

例 2 判断下列表示是否正确,并说明理由.

(1) $4 \subsetneqq \{4,5\}$; (2) $\{1,3\} \subsetneqq \{1,3,5\}$;

(3) $\varnothing \subsetneqq \{2,4\}$; (4) $\{1,2\} \subsetneqq \{1,2\}$.

解 (1) 不正确.4 是一个元素,不是集合,它们之间的关系是 $4 \in \{4,5\}$.

(2) 正确.集合$\{1,3\}$是集合$\{1,3,5\}$的子集,并且集合$\{1,3,5\}$中的元素 5 不在集合

$\{1,3\}$ 中,因此集合$\{1,3\}$ 是集合$\{1,3,5\}$ 的真子集.

(3) 正确.空集是任何非空集合的真子集,因此 $\varnothing \subsetneqq \{2,4\}$.

(4) 不正确.集合$\{1,2\}$ 是集合$\{1,2\}$ 的子集,不是真子集.

例3 写出集合 $A=\{2,4,6\}$ 的所有子集和真子集.

解 集合 A 的所有子集是 $\varnothing,\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}$.

在上述子集中,除去集合 A 本身,即$\{2,4,6\}$,剩下的都是集合 A 的真子集.

例4 用适当的符号表示下列各题中的两个集合之间的关系:

(1) 集合 A:$\{x \mid x-1 \leqslant 0\}$,集合 B:$\{x \mid x-2<0\}$;

(2) 集合 C:$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$,集合 D:$\{x \mid 0<x<3\}$.

解 (1) 不等式 $x-1 \leqslant 0$ 的解为 $x \leqslant 1$,集合 A 用不等式的解集表示为$\{x \mid x \leqslant 1\}$,不等式 $x-2<0$ 的解为 $x<2$,集合 B 用不等式的解集表示为$\{x \mid x<2\}$,所以 $A \subsetneqq B$.

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解为 $x_1=1,x_2=2$,集合 C 用方程的解集表示为$\{1,2\}$,集合 D 表示的是大于 0 且小于 3 的所有实数的全体,所以 $C \subsetneqq D$.

课堂练习 2

1. 写出集合 $A=\{1,3,5\}$ 的所有子集和真子集.
2. 指出下面集合之间的关系,并且用图表示:

   $A=\{$平行四边形$\}$;$B=\{$菱形$\}$;$C=\{$矩形$\}$;$D=\{$正方形$\}$.

三、集合的相等

已知集合 $A=\{x \mid x^2=1\}$,集合 $B=\{1,-1\}$.分析集合 A 与集合 B 中元素的关系.

对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任意一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$.

也就是说,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,那么 $A=B$.实际上也可以说,当集合 A 与集合 B 的元素完全相同时,则 $A=B$.

例5 指出下列各组中两个集合之间的关系:

(1) $A=\{2,4,6,8\},B=\{2,4,6\}$;

(2) $A=\{x \mid x^2=16\},B=\{-4,4\}$;

(3) $C=\{$偶数$\},D=\{$整数$\}$.

解 (1) $B \subsetneqq A$;

(2) $A=B$;

(3) $C \subsetneqq D$.

例6 确定整数 x,y,使$\{2x,x+y\}=\{7,4\}$.

解 由集合相等的定义可知:$\begin{cases}2x=7,\\x+y=4\end{cases}$或$\begin{cases}2x=4,\\x+y=7.\end{cases}$

由$\begin{cases}2x=7,\\x+y=4\end{cases}$解得 $x=\dfrac{7}{2}$,不合题意,舍去;

由$\begin{cases}2x=4,\\x+y=7\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=5.\end{cases}$

所以整数 x,y 分别为 2,5.

例 7 写出与下列集合相等的一个集合：

(1) $\{x \mid x^2-x-6=0\}$； (2) $\{x \mid x+3<0\}$.

解 (1) 集合 $\{x \mid x^2-x-6=0\}$ 中的元素即方程 $x^2-x-6=0$ 的解，解方程得 $x_1=-2, x_2=3$.

所以 $\{x \mid x^2-x-6=0\}=\{-2,3\}$.

(2) 集合 $\{x \mid x+3<0\}$ 中的元素即不等式 $x+3<0$ 的解，解不等式得 $x<-3$.

所以 $\{x \mid x+3<0\}=\{x \mid x<-3\}$.

课堂练习 3

指出集合 $A=\{2,4\}$ 与集合 $B=\{x \mid x^2-6x+8=0\}$ 之间的关系.

习题 1-2

1. 用"$\in$""$\notin$""$=$""$\subsetneqq$"或"$\supsetneqq$"填空：

(1) a ________ $\{a,b,c\}$； (2) 4 ________ $\{5\}$；

(3) $\{a\}$ ________ $\{a,e,f\}$； (4) $\{a,b,c\}$ ________ $\{b,c\}$；

(5) $\varnothing$ ________ $\{1,2,3\}$； (6) {正方形} ________ {平行四边形}；

(7) $\{1,2,3\}$ ________ $\{3,2,1\}$； (8) $\varnothing$ ________ $\{x \mid x^2=-1, x\in\mathbf{R}\}$.

2. 判断下列各题表示的关系是否正确：

(1) 空集就是 $\{0\}$； (2) $2 \subset \{x \mid x \leqslant 10\}$；

(3) $\{2,8\}=\{x \mid x^2-10x+16=0\}$； (4) $3 \subset \{x \mid x \leqslant 8\}$；

(5) $3 \in \left\{x \,\middle|\, \dfrac{(x-3)^2}{x-3}=0\right\}$.

3. 确定 x,y 的值，使 $A=\{2,x\}$，$B=\{3,5,y\}$ 满足 $A \subseteq B$.

4. 设 $A=\{b,1,3\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，若 $B \subsetneqq A$，求实数 b 的值.

5. 已知 $A=\{2,3,1\}$，$B=\{2,1,a\}$，若 $A=B$，求实数 a 的值.

第三节 集合的基本运算

一、交集

思考：东营职业学院的小李喜欢的课程构成的集合为 $A=\{$数学，英语，体育$\}$，小王喜欢的课程构成的集合为 $B=\{$化学，数学，英语，计算机应用基础$\}$，试写出他们都喜欢的课程构成的集合.

设 A 和 B 是两个集合，把属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$(或 $B\cap A$)，读作 A 交 B，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$.

A 与 B 的交集由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成.

例如，$\{2,4,6,8\}\cap\{1,2,3,4\}=\{2,4\}$.

集合 A 与 B 的交集，可用图 1-4 和图 1-5 中的阴影部分来表示.

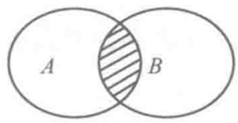


图 1-4

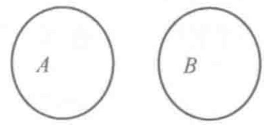


图 1-5

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有：

(1) $A \cap B = B \cap A$；

(2) $A \cap A = A$；

(3) $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$；

(4) 如果 $A \subseteq B$，则 $A \cap B = A$.

例 1 设 $A=\{x \mid x>1\}$，$B=\{x \mid x<4\}$，求 $A \cap B$.

解 $A \cap B=\{x \mid x>1$ 且 $x<4\}=\{x \mid 1<x<4\}$.

例 2 设 $A=\{x \mid 5x-4>3(x-4)\}$，$B=\left\{x \left\lvert\, \frac{1}{2}x+2<4-\frac{3}{2}x\right.\right\}$，求 $A \cap B$.

解 解不等式 $5x-4>3(x-4)$：

$5x-4>3x-12$，$5x-3x>-12+4$，$x>-4$，所以集合 $A=\{x \mid x>-4\}$.

解不等式 $\frac{1}{2}x+2<4-\frac{3}{2}x$：

$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x<4-2$，$2x<2$，$x<1$，所以集合 $B=\{x \mid x<1\}$.

$A \cap B=\{x \mid -4<x<1\}$.

例 3 设 $A=\{(x,y) \mid x-y=3\}$，$B=\{(x,y) \mid x+2y=0\}$，求 $A \cap B$.

解 $A \cap B=\{(x,y) \mid x-y=3$ 且 $x+2y=0\}=\left\{(x,y) \left\lvert \begin{cases} x-y=3, \\ x+2y=0 \end{cases}\right.\right\}=\{(2,-1)\}$.

课堂练习 1

1. 设 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{8,10,12\}$，求 $A \cap B$.

2. 根据下列条件，求 $A \cap B$：

(1) $A=\{x \mid x \geqslant -1\}$，$B=\{x \mid x \leqslant 4\}$；

(2) $A=\{x \mid x<4\}$，$B=\{x \mid x<4\}$.

3. 设 $A=\{(x,y) \mid 3x-y=4\}$，$B=\{(x,y) \mid x+y=8\}$，求 $A \cap B$.

二、并集

思考：某班周三值日的学生构成的集合为 $A=\{$李芳，王娜，张帅，周琦$\}$，周四值日的学生构成的集合为 $B=\{$周琦，李芳，王红，刘飞$\}$，试写出周三、周四值日的学生构成的集合.

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$(或 $B \cup A$)，读作 A 并 B，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com