高等职业教育“十三五”规划教材
高等职业教育公共基础课规划教材

# 高等数学

◎胡 煜 主编
◎吴立炎 李惠珠 傅秀莲 刘 芳 副主编

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等职业教育“十三五”规划教材
高等职业教育公共基础课规划教材

# 高等数学

主　编　胡　煜

副主编　吴立炎　李惠珠　傅秀莲　刘芳

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

## 内容简介

本书共6章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用、矩阵及其应用、Mathematica入门。在每章内容之后，都精选一套综合练习题，可供学生复习、自测使用。书后附有常用公式供学生参考。

本书可作为职业院校和应用型本科院校工科类、经济管理类各专业教材，也可供成人教育使用。



**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学 / 胡煜主编. 一北京：电子工业出版社，2018.8
ISBN 978-7-121-34320-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第111564号

策划编辑：朱怀永
责任编辑：朱怀永　　　文字编辑：底　波
印　　刷：三河市良远印务有限公司
装　　订：三河市良远印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　　印张：11.5　　字数：294千字
版　　次：2018年8月第1版
印　　次：2018年8月第1次印刷
定　　价：31.80元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 前　言

本书根据高等职业院校“高等数学”课程的教学大纲编写而成。具有职业教育的特色，充分体现“以应用为目的，必需、够用”的原则。本着“联系实际、深化概念、注重应用”的教学原则，突出强调数学概念与实际问题的联系。不过多强调数学逻辑的严密性、思维的严谨性，不过分追求复杂的计算和变换，而重视数学应用意识，以培养学生灵活运用和解决问题、分析问题的能力。

《高等数学》编写内容力求简洁易懂、突出实用性，在教学中可根据不同专业和学时多少在内容上有所取舍。充分考虑高等职业院校学生的数学基础，简要介绍了使用 Mathematica 数学软件来处理复杂的高等数学计算，帮助学生更好地理解相关概念和理论。

本书共分 6 章，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，矩阵及其应用，Mathematica 入门。书后附有常用公式供学生参考。本教材适合作为各类高等职业院校、成人高校及应用型本科院校各专业的教学用书。

教材标有*号的内容可依实际情况灵活掌握，另行安排学习。

本书编者来自广东工贸职业技术学院，由胡煜担任主编，吴立炎、李惠珠、傅秀莲和刘芳担任副主编，吴立炎老师对数学软件的应用部分做了大量的工作。

限于编者的水平，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

# 目　录

**第 1 章　函数、极限与连续**……………………………………………1

1.1　函数………………………………………………………………1

1.2　极限………………………………………………………………8

1.3　无穷小量与无穷大量……………………………………………15

1.4　两个重要极限……………………………………………………19

1.5　函数的连续性……………………………………………………24

综合练习 1 …………………………………………………………28

**第 2 章　导数与微分**…………………………………………………31

2.1　导数的概念………………………………………………………31

2.2　导数的运算………………………………………………………36

2.3　函数的微分………………………………………………………44

综合练习 2 …………………………………………………………49

**第 3 章　导数的应用**…………………………………………………51

3.1　微分中值定理……………………………………………………51

3.2　洛必达法则………………………………………………………54

3.3　导数在几何上的应用……………………………………………59

综合练习 3 …………………………………………………………66

**第 4 章　积分及其应用**………………………………………………67

4.1　定积分的概念及性质……………………………………………67

4.2　不定积分的概念及性质…………………………………………71

4.3　积分计算…………………………………………………………76

4.4　定积分的应用……………………………………………………91

4.5　无限区间上的广义积分…………………………………………98

4.6　常微分方程*………………………………………………………102

综合练习 4 …………………………………………………………112

第 5 章　矩阵及其应用 …… 116
5.1　矩阵 …… 116
5.2　向量及其线性关系 …… 127
5.3　线性方程组 …… 133
综合练习 5 …… 144
第 6 章 Mathematica 入门 …… 147
6.1　引言 …… 147
6.2　Mathematica 的一般介绍 …… 147
6.3　微积分的函数命令 …… 153
6.4　线性代数的函数命令 …… 156
附录 A　参考答案 …… 160
附录 B　常用公式 …… 172

# 第1章 函数、极限与连续

学习目标

1. 理解函数的概念，了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念，了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构.

2. 了解极限的描述性定义，了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质.

3. 会用两个重要极限公式求极限，掌握极限的四则运算法则.

4. 理解函数在一点连续的概念，知道间断点的分类.

5. 会应用函数连续性的性质.

极限是数学中一个重要的基本概念，也是学习微积分学的理论基础.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限与连续等问题.

## 1.1 函数

### 一、函数概念

#### 1. 函数的定义

【定义1】 设两个变量 $x$ 和 $y$，当变量 $x$ 在某给定的非空数集 $D$ 中任意取一个值时，变量 $y$ 的值由这两个变量之间的关系 $f$ 确定，称这个关系 $f$ 为定义在 $D$ 上的一个函数关系，或称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y=f(x),x\in D$.

数集 $D$ 叫作这个函数的**定义域**，$x$ 叫作**自变量**，$y$ 叫作**因变量**.

当 $x$ 取定 $x_0\in D$ 时，与之对应的 $y$ 的数值称为函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，$f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的**值域**，记作 $R_{\mathrm{f}}$ 或 $f(D)$，即 $R_{\mathrm{f}}=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

下面介绍邻域的概念. 设 $a$ 是一个实数，$\delta>0$，称区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为以 $a$ 为中心，$\delta$ 为半径的**邻域**，简称点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，如图1.1所示.

称集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 为以 $a$ 为中心，$\delta$ 为半径的**去心邻域**，简称点 $a$ 的去心 $\delta$ 邻域，记作 $\overset{o}{U}(a,\delta)$，即 $\overset{o}{U}(a,\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}$.

函数的表示方法主要有三种：解析法、表格法、图像法.

【例1.1】（表格法）如假设 $x$ 表示月份，$y$ 表示某项金额. 表1.1给出了 $x$ 和 $y$ 之间的

依赖关系.

表 1.1

| $x$（月） | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$（金额） | 543 | 762 | 564 | 660 | 743 | 800 |

点集 $P=\{(x,y)\big|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$的图形或图像，如图 1.2 所示.

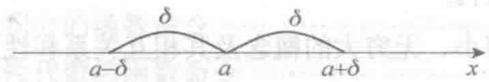


图 1.1

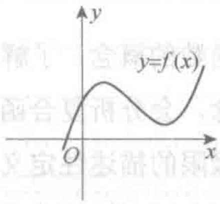


图 1.2

【例 1.2】 求下列函数的定义域.

（1） $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$；（2） $y=\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-2}$.

【解】（1）二次根号下的被开方数必须非负，分母不能为零，因此有 $3-x>0$，即 $x<3$，定义域为 $(-\infty,3)$.

（2）对数的真数必须为正实数，分母不为零，因此有

$$\begin{cases}x-1>0\\ x-2\neq 0\end{cases}$$

解得 $x>1$ 且 $x\neq 2$，故定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

【例 1.3】 判断下列各对函数是否为同一函数.

（1） $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$；（2） $f(x)=\cos^2 x+\sin^2 x,\ \ g(x)=1$；

（3） $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x,\ \ g(x)=1$.

【分析】 只有定义域和对应法则都相同的两个函数才是同一函数.

【解】（1）不相同，因对应法则不同，$g(x)=|x|$.

（2）相同，因定义域和对应法则都相同.

（3）不相同，因定义域不同. $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，$g(x)$ 的定义域为全体实数.

有的函数在定义域的不同取值范围内取不一样的表达式，这样的函数称为**分段函数**.以下举几例.

【例 1.4】（绝对值函数）$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$，图像如图 1.3 所示.

【例 1.5】（符号函数）$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，图像如图 1.4 所示.

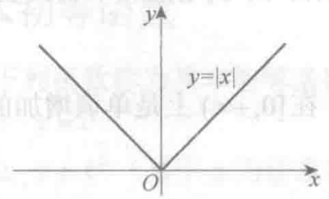


图 1.3

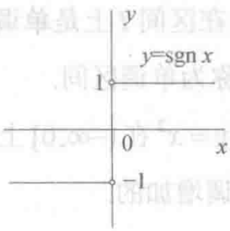


图 1.4

对任意实数 $x$，有 $x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x$.

【例 1.6】（取整函数，又名 Gauss 函数）$y=[x]$. $[x]$表示不超过实数 $x$ 的最大整数，简称 $x$ 的整数部分. 例如 $[\frac{2}{3}]=0,[\sqrt{3}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-2.5]=-3$. 取整函数图像如图 1.5 所示.

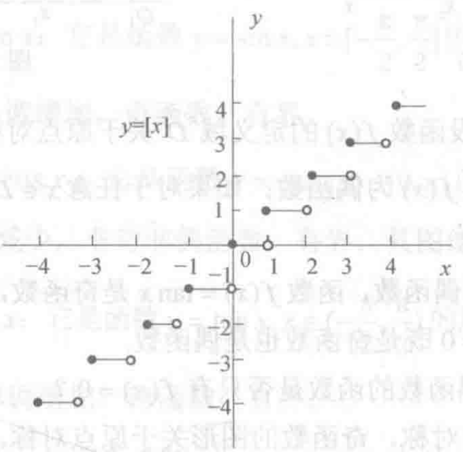


图 1.5

其图像形状如楼梯，因此这类函数又称为阶梯型函数.

## 2. 函数的几种特性

【定义 2】（有界性）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $M$，使得对每一个 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上**有界**；否则称 $f(x)$ 在 $D$ 上**无界**.

例如，正弦函数 $y=\sin x$，对任意实数 $x$，满足 $|\sin x|\leqslant 1$，故它在定义域内有界.

有界性的几何意义是：函数 $f(x)$ 的图像完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如，正弦函数的图像完全落在直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.

注　有界性是与区间有关的，例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上有界，而在区间 $(0,1)$ 上无界. 因此，不能笼统地说某函数有界或无界，而必须指明所考虑的区间.

【定义 3】（单调性）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$.若对于 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调增加**的（见图 1.6）；若对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 恒成立，那

么就称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调减少的**（见图 1.7）.单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**，区间 $I$ 称为单调区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的. 函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

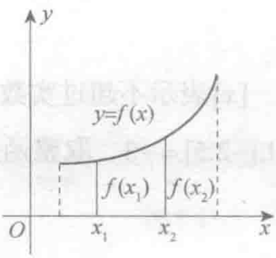


图 1.6

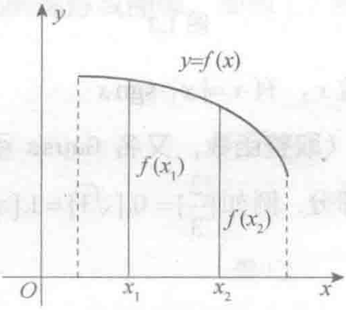


图 1.7

**【定义 4】（奇偶性）**设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=\tan x$ 是奇函数，而 $f(x)=x^2+\sin x$ 既非奇函数也非偶函数，函数 $f(x)=0$ 既是奇函数也是偶函数.

$\boxed{\text{思考}}$既是奇函数又是偶函数的函数是否只有 $f(x)=0$？

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1.8 所示.

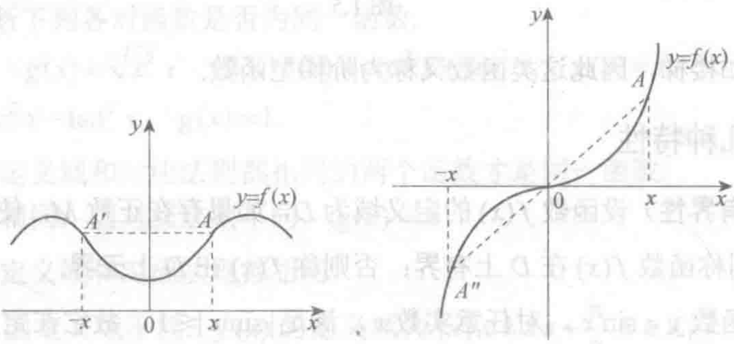


图 1.8

**【定义 5】（周期性）**设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个不为零的数 $T$，使得对任意 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 数 $T$ 称为函数的**周期**，通常我们说周期函数的周期是指满足该等式的最小正数 $T$，称为**最小正周期**.

三角函数都是周期函数，其中 $y=\sin x, y=\cos x$ 的周期为 $2\pi$， $y=\tan x$ 的周期为 $\pi$. 电气工程中常用的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi),(A,\omega>0)$，周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

$\boxed{\text{思考}}$是否所有周期函数都有最小正周期？

## 二、基本初等函数

【定义 6】 下列函数称为基本初等函数.

（1）常函数： $y=c$ .

（2）幂函数：$y=x^{\mu}$（其中 $\mu$ 为任意实常数）.

（3）指数函数：$y=a^{x}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（4）对数函数：$y=\log_{a}x$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（5）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

其中，常函数、幂函数、指数函数、对数函数及三角函数，我们在高中阶段已经进行了系统且详细的学习，此处不再赘述. 下面重点介绍反三角函数.

（1）反正弦函数 $y=\arcsin x$：它是函数 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数，定义域为 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，在定义域内单调增加，奇函数，有界.

（2）反余弦函数 $y=\arccos x$：它是函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数，定义域为 $[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$，在定义域内单调减少，非奇非偶函数，有界，其图像经过点 $(0,\frac{\pi}{2})$.

（3）反正切函数 $y=\arctan x$：它是函数 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，在定义域内单调增加，奇函数，有界.

（4）反正弦函数 $y=\operatorname{arccot} x$：它是函数 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$，在定义域内单调减少，非奇非偶函数，有界，其图像经过点 $(0,\frac{\pi}{2})$.

它们的图形分别如图 1.9～图 1.12 中实线所示.

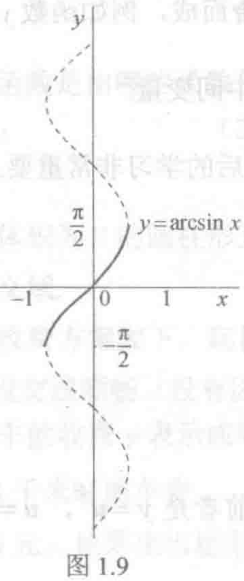


图 1.9

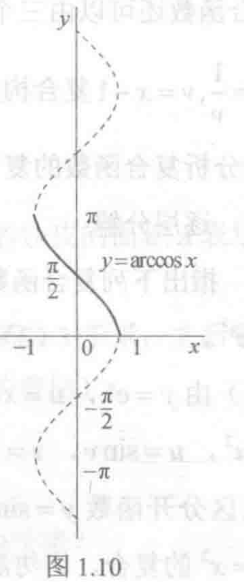


图 1.10

反三角函数在各自的定义域内满足以下关系式：

$$\sin(\arcsin x)=x,\quad \cos(\arccos x)=x,\quad \tan(\arctan x)=x,$$

$$\cot(\operatorname{arc}\cot x)=x,\quad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad \arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}.$$

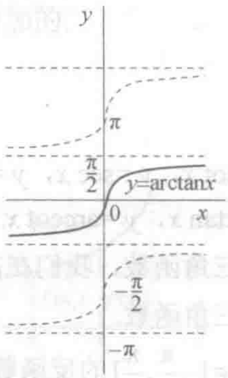


图 1.11

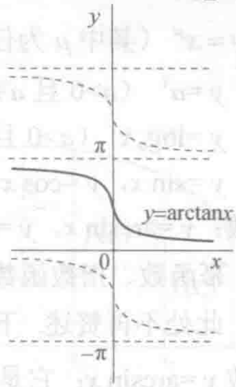


图 1.12

## 三、复合函数、初等函数

**【定义 7】** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_1$，函数 $u=g(x)$ 在 $D$ 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则函数 $y=f[g(x)],x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 $D$，变量 $u$ 称为**中间变量**.

例如，$y=\ln(2x+1)$ 是由 $y=\ln u,u=2x+1$ 构成的复合函数.

注 1 不是任何两个函数都可以复合，如 $y=\sqrt{u},u=-1-x^2$ 不能复合，这是因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，$u=-1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1]$，两者的交集为空集. 若作形式上的复合 $y=\sqrt{-1-x^2}$，则对任意实数 $x$，该表达式无意义！

注 2 复合函数还可以由三个或以上的函数复合而成，例如函数 $y=\sin\dfrac{1}{x-1}$ 可看作由函数 $y=\sin u,u=\dfrac{1}{v},v=x-1$ 复合构成，这里 $u,v$ 都是中间变量.

正确掌握分析复合函数的复合过程的方法对以后的学习非常重要. 方法如下：从外层开始，层层剥皮，逐层分解.

**【例 1.7】** 指出下列复合函数的复合过程.

（1） $y=e^{x^2}$，　（2） $y=\sin^2[\ln(3x+1)]$.

**【解】**（1）由 $y=e^u$，$u=x^2$ 复合构成.

（2） $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\ln w$，$w=3x+1$.

需要注意区分开函数 $y=\sin^2 x$，$y=\sin x^2$，前者是 $y=u^2$，$u=\sin x$ 的复合，后者是 $y=\sin u$，$u=x^2$ 的复合，切勿混淆.

【定义 8】 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成，并可用一个解析式表示出的函数称为**初等函数**.

例如，例 1.6 中的复合函数都是初等函数，又如 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=\sqrt[3]{\dfrac{2\ln x+\tan x+e^{3x}}{\arcsin x+3}}$ 皆为初等函数. 分段函数一般不是初等函数，如取整函数、符号函数都不是初等函数.

$\boxed{\text{思考}}$绝对值函数是不是初等函数？

## 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

（1） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　（2） $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；

（3） $y=\tan(3x+1)$；　（4） $y=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x^2-9}$.

2. 设 $f(x)=x^2+3x+2$，求 $f(1),f(-2),f(\frac{1}{3}),f(a+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ \cos x-1 & x<0\end{cases}$，求 $f(\frac{\pi}{2}),f(0),f(-\frac{\pi}{3}),f(1)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

（1） $y=x(x-1)(x+1)$；　（2） $y=\sin x+\cos x$；

（3） $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；　（4） $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5. 确定下列函数的单调区间.

（1） $y=2\sin(3x-1)$；　（2） $y=1+\sqrt{x-1}$；

（3） $y=(\frac{1}{\pi})^x$；　（4） $y=x^2-2x-1$.

6. 指出下列复合函数是由哪些函数复合构成的.

（1） $y=\sin(\ln x)$；　（2） $y=e^{\sqrt{x}}$；

（3） $y=3\tan x^2$.

7. 用铁皮做一个体积为 $V$ 的圆柱形无盖水桶，将所需的铁皮的面积 $A$ 表示成底面半径 $r$ 的函数，并指出其定义域.

8. 广州的出租车收费方案如下，起步价 7 元，起步里程 2.3 千米，之后每千米 2.6 元，另收燃油费 2 元. 假设交通顺畅（没有因堵车或等候产生的费用）.

（1）把乘坐出租车的收费 $y$ 表示成乘坐里程 $x$ 的函数.

（2）求里程为 15 千米时的车费.

（3）某人带着 50 元，他乘坐出租车最远可以达到多少千米？

# 1.2 极限

极限思想是由求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如，古希腊数学家阿基米德利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——穷竭法。中国古代数学家刘徽利用类似的割圆术，就是极限思想在几何学上的应用.

本节将介绍数列与函数极限的定义及一些计算方法.

## 一、数列的极限

### 1. 数列

我们先对高中阶段学习过的数列做个简要的复习.

**【定义 1】** 按一定次序排列的一些数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称作一个**数列**，记作 $\{x_n\}$. 其中，$x_1$ 称数列的第一项或**首项**，第 $n$ 项 $x_n$ 称为数列的一般项或**通项**.

数列亦可看作以正整数集为定义域的函数，$x_n = f(n), n \in \mathbf{Z}^+$.

下面举几个数列的例子.

（1）等差数列：$2,4,6,8,10,\cdots,2n,\cdots$ 即 $\{2n\}$.

（2）等比数列：$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\cdots,\frac{1}{3^{n-1}},\cdots$ 即 $\{\frac{1}{3^{n-1}}\}$.

### 2. 数列的极限

先看一个古代数学问题——截丈问题. 2000 多年前，中国的庄子提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”意为一根一尺长的竹竿，每天截取它的一半，那就永远取不完. 从第一天起，我们把该竹竿被截后所剩长度写下来，便得到如下数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

庄子指出，无论经过多少天，竹竿总有剩的，不可能取完. 也就是说，对任意的正整数 $n$（无论它多大），这个数列的项永远为正数. 但这只是问题的一个方面，另外，我们不难发现，当 $n$ 无限增大时，该数列的项就无限接近于 0. 这里隐含着数列的极限，下面给出定义.

**【定义 2】** 对于数列 $\{x_n\}$，若当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限接近于一个确定的常数 $a$，则称数列 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{，或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称 $\{x_n\}$ 是发散的.

因此，对截丈问题，可以用极限表示为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.

**【例 1.8】** 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$\{x_n = \frac{1}{n}\}$，（2）$\{x_n = 1-\frac{1}{n^2}\}$，（3）$\{x_n = \frac{1}{3^n}\}$，（4）$\{x_n = 2\}$.

**【解】**（1）$x_n = \frac{1}{n}$，当 $n$ 依次取 1，2，3，4，5，…时，$x_n$ 的各项依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$，可见，当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限接近于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

（2）$x_n = 1-\frac{1}{n^2}$，与上类似，$x_n$ 的各项顺次为 $0,1-\frac{1}{4},1-\frac{1}{9},1-\frac{1}{16},\cdots$，当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限接近于 1，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2}) = 1$$

（3）$x_n = \frac{1}{3^n}$，$x_n$ 的各项顺次为 $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$，当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 无限接近于 0，因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$$

（4）$x_n = 2$，该数列每项都为 2，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

数列一般有以下性质.

**【性质 1】** 常数数列的极限是常数，$\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

**【性质 2】** 公比的绝对值小于 1 的等比数列，极限为 0，即当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

注 并非所有数列都有极限，例如数列 $\{n^2\}$，当 $n$ 无限增大时，$n^2$ 也无限增大，并不趋近于一个确定的常数. 又如 $\{(-1)^n\}$，它的项交替取值−1 和 1，当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 不断在这两个数之间来回跳动，不是无限接近于一个确定常数. 这两个数列都没有极限.

## 二、函数的极限

数列可看作自变量为正整数 $n$ 的函数：$x_n = f(n)$，数列 $\{x_n\}$ 的极限为 $a$，即当自变量 $n$ 取正整数且无限增大 $(n\to\infty)$ 时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近数 $a$.

若将数列极限概念中自变量 $n$ 和函数值 $f(n)$ 的特殊性撇开，可以由此引出函数极限的一般概念：在自变量 $x$ 的某个变化过程中，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的数 $A$，则 $A$ 就称为 $x$ 在该变化过程中函数 $f(x)$ 的极限.

对数列而言，自变量 $n$ 的变化过程不外乎就是 $n\to\infty$. 然而，函数的自变量 $x$ 的变化过程就丰富得多，可以是趋于无穷大或有限值，还可以按这种趋势的左右方向进一步细分. 自变量的变化过程不同，函数的极限就有不同的表现形式. 本部分分两种情况来讨论.

### 1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限

我们先考察 $x \to \infty$ 时函数 $y=\frac{1}{x}$ 的变化趋势. 如图 1.13 所示，当 $x \to \infty$ 时，函数趋近于确定的常数 0. 我们说，函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限为 0.

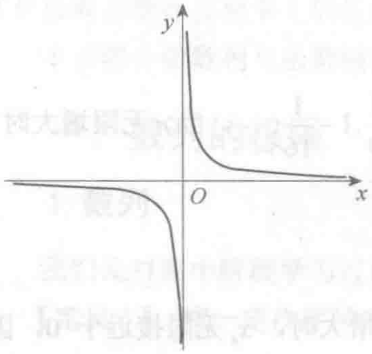


图 1.13

【定义 3】 如果当 $x$ 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 $A$，则称当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

如果从某一时刻起，$x$ 只取正数或负数且绝对值无限增大，则有以下定义.

【定义 4】 如果当 $x>0$ 且 $x$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 $A$，则称当 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

【定义 5】 如果当 $x<0$ 且 $x$ 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限接近一个常数 $A$，则称当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)$$

显然有以下结果:

【定理 1】 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

【例 1.9】 求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$；（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

【解】（1）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

（2）观察 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像可知当 $x\to-\infty$ 时，$\mathrm{e}^x\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

（3）观察反正切函数的图像可得，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，由定理 1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

### 2. 当 $x \to x_0$ 时函数的极限

【例 1.10】 考察函数 $f(x)=\frac{x}{3}+1$ 当 $x\to 3$ 时的变化趋势.

当 $x$ 从左边无限接近于 3 时，对应的函数值变化情况见表 1.2.

表 1.2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 2.9999 | $x\to 3$ |
| $y$ | 1.97 | 1.997 | 1.9997 | 1.99997 | $y\to 2$ |

当 $x$ 从右边无限接近于 3 时，对应的函数值变化情况见表 1.3.

表 1.3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3.1 | 3.01 | 3.001 | 3.0001 | $x\to 3$ |
| $y$ | 2.03 | 2.003 | 2.0003 | 2.00003 | $y\to 2$ |

可见，当 $x\to 3$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 无限接近于 2.我们说，函数 $f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 当 $x\to 3$ 时的极限为 2.

**【定义 6】** 如果当 $x$ 趋于 $x_0$（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 $A$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 $A$ 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

也称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 收敛到 $A$；否则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时发散或者极限不存在.

**【例 1.11】** 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时是否有极限.

**【解】** 在 $x=1$ 处，$f(x)$ 无定义. 我们考察的是当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的变化趋势. 当 $x\to 1$ 时，$x\neq 1$，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1(x\neq 1)$，因此有

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

本例说明 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是否有极限与 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处是否有定义毫无关系.

一般地，考察函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限时，常常需要考察 $x$ 分别从左边和从右边趋于 $x_0$ 时，函数值的变化趋势，为此，我们引入左右极限的概念.

**【定义 7】** 如果当 $x>x_0$ 且趋于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 $A$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的**右极限**是 $A$，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+) \text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

**【定义 8】** 如果当 $x<x_0$ 且趋于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 趋于一个常数 $A$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的**左极限**是 $A$，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-) \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

由上述定义，可得以下结论.

**【定理 2】** 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充要条件是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左、右极