HIT

全国优秀数学教师专著系列

High School Math Competition Training Courses—Elementary Algebra

高中数学竞赛培训教程——初等代数

叶美雄　贺功保　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国优秀数学教师专著系列

高中数学竞赛培训教程——初等代数

High School Math Competition Training Courses —Elementary Algebra

叶美雄 贺功保 编著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

全书共分为6讲，包括集合及其应用，函数的性质及其应用，递推数列及其应用，不等式的证明方法及其应用，复数及其应用，多项式及其应用等内容，每节后面配有巩固练习及参考答案.

本书适合于初、高中学生，初、高中数学竞赛选手及教练员使用，也可以作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的“竞赛数学”课程及国家级、省级骨干教师培训班讲座教材.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛培训教程：初等代数/叶美雄，贺功保编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.4

ISBN 978-7-5603-8055-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①叶… ②贺… Ⅲ.①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第049264号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 33.25 字数 633千字
版　　次 2019年4月第1版 2019年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-8055-1
定　　价 78.00元

◎ 目　录

集合及其应用

第1讲

集合知识在高考与竞赛中经常出现，是其中的重要内容.本讲主要是介绍集合的有关性质以及应用，大体上分为四个部分：其一是由集合构成的交、并、补运算，以及产生的运算性质与应用；其二是由集合的子集所产生的一系列性质，而这些性质主要由一些高考试题或一些简单的竞赛试题抽象概括而来，体现了集合子集的本质属性，即集合中的计数问题.因此，通过这些性质的学习和理解，对提高学生的思维能力与解题能力是很有帮助的，要掌握这些性质的应用方法，还需要用到排列组合和容斥原理，简单的组合恒等变形等知识；其三是介绍集合中的最值(或极值）问题；其四是简要介绍集合的划分与覆盖的基本知识，最后列举集合中综合问题的解题方法与策略.

第1节　集合的概念与运算以及性质

一、集合与元素

(1) 集合中元素的三个特征：确定性、互异性、无序性.

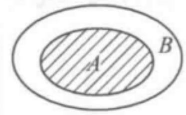
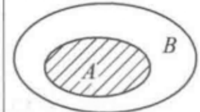
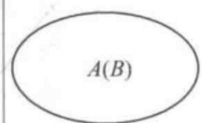
(2) 元素与集合的关系包括属于或不属于两种，用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示.

(3) 集合的表示法：列举法、描述法、图示法.

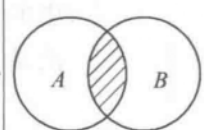
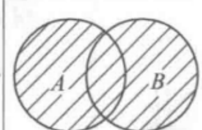
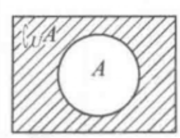
(4) 常见数集的记法：

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$（或 $\mathbf{N}_+$）	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

二、集合间的基本关系

关系	自然语言	符号语言	韦恩(Venn)图
子集	集合 A 中所有元素都在集合 B 中(即若 $x \in A$,则 $x \in B$)	$A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)	
真子集	集合 A 是集合 B 的子集,且集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中	$A \subsetneqq B$(或 $B \supsetneqq A$)	
集合相等	集合 A,B 中的元素相同或集合 A,B 互为子集	$A = B$	

三、集合的基本运算

运算	自然语言	符号语言	韦恩图
交集	由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	
补集	由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合	$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$	

四、集合的关系及运算

1. 集合的交集、并集与补集的主要运算律

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 同一律 $A\cup\varnothing=A$，$A\cap U=A$，$A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(5) 等幂律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

(6) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$.

(7) 求补律 $A\cup\complement_U A=U$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$.

(8) 反演律(摩根律) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(9) 对合律 $\complement_U(\complement_U A)=A$.

2.集合运算中的常用方法

(1) 若已知的集合是不等式的解集，用数轴求解.

(2) 若已知的集合是点集，用数形结合法求解.

(3) 若已知的集合是抽象集合，用韦恩图求解.

例 1 (1) 已知集合 $A=\{x\mid\log_2 x<1\}$，$B=\{y\mid y=2^x,x\geqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid 1<x<2\}$

C. $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$

解 C. 由已知可得 $A=\{x\mid 0<x<2\}$，$B=\{y\mid y\geqslant 1\}\Rightarrow A\cap B=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$.

(2) 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$，若对于任意 $(x_1,y_1)\in M$，存在 $(x_2,y_2)\in M$，使得 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 成立，则称集合 M 是“理想集合”. 给出下列 4 个集合：①$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\dfrac{1}{x}\right\}$；②$M=\{(x,y)\mid y=\sin x\}$；③$M=\{(x,y)\mid y=e^x-2\}$；④$M=\{(x,y)\mid y=\lg x\}$.

其中所有“理想集合”的序号是(　　)

A. ①③　　B. ②③　　C. ②④　　D. ③④

解 B. 由题意设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，又由 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 可知，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. ① 项，$y=\dfrac{1}{x}$ 是以 x 轴、y 轴为渐近线的双曲线，渐近线的夹角为 $90°$，所以当点 A，B 在同一支上时，$\angle AOB<90°$，当点 A，B 不在同一支上时，$\angle AOB>90°$，不存在 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故不正确；② 项，通过对其图像的分析发现，对于任意的点 A 都能找到对应的点 B，使得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 成立，故正确；③ 项，由图像可得直角始终存在，故正确；④ 项，由图像可知，点 $(1,0)$ 在曲线上，不存在另外一个点使得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ 成立，故错误. 综合 ②③ 正确.

点评 (1) 关于集合的关系及运算问题，要先对集合进行化简，然后再借助韦恩图或数轴求解.

(2) 对集合的新定义问题，要紧扣新定义集合的性质探究集合中元素的特征，将问题转化为熟悉的知识进行求解，也可利用特殊值法进行验证.

例 2 设 $A=\{X \mid X=a^2+b^2, a, b \in \mathbf{Z}\}$，$X_1, X_2 \in A$，求证：$X_1 \times X_2 \in A$.

分析 A 中的元素是什么？是自然数，即由两个整数 a, b 的平方和构成的自然数，亦即从 $0,1,4,9,16,25,\cdots,n^2,\cdots$ 中任取两个（相同或不相同）数加起来得到的一个和数，本题要证明的是：两个这样的数的乘积一定还可以拆成两个自然数的平方和的形式，即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$，其中 $x, y \in \mathbf{Z}$.

证明 设 $X_1=a^2+b^2$，$X_2=c^2+d^2$，$a,b,c,d \in \mathbf{Z}$，则

$$\begin{aligned}X_1 \times X_2 &=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2\\&=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+b^2c^2-2bcad+a^2d^2\\&=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\end{aligned}$$

又 $a,b,c,d \in \mathbf{Z}$，故 $ac+bd$，$bc-ad \in \mathbf{Z}$，从而 $X_1 \times X_2 \in A$.

例 3 设 $A=\{a \mid a=x^2-y^2, x, y \in \mathbf{Z}\}$，求证：$2k-1 \in A(k \in \mathbf{Z})$，$4k-2 \notin A(k \in \mathbf{Z})$.

证明 因为 $k, k-1 \in \mathbf{Z}$ 且 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，故 $2k-1 \in A$；

另外，假设 $4k-2 \in A(k \in \mathbf{Z})$，则存在 $x, y \in \mathbf{Z}$，使 $4k-2=x^2-y^2$，即

$$(x-y)(x+y)=2(2k-1) \tag{*}$$

由于 $x-y$ 与 $x+y$ 具有相同的奇偶性，所以式（*）左边有且仅有两种可能：奇数或4的倍数，另一方面，式（*）右边只能是被4除余2的数，故式（*）不能成立. 由此，$4k-2 \notin A(k \in \mathbf{Z})$.

例 4 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$，若方程 $f(x)=x$ 无实根，求证：方程 $f(f(x))=x$ 也无实根.

证明 已知 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$，方程 $f(x)=x$，即 $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c=0$ 无实根，$f(x)-x$ 仍是二次函数，$f(x)-x=0$ 仍是二次方程，它无实根，即 $\Delta=(b-1)^2-4ac<0$.

若 $a>0$，则函数 $y=f(x)-x$ 的图像在 x 轴上方，所以 $y>0$，即 $f(x)-x>0$ 恒成立，即 $f(x)>x$ 对任意实数 x 恒成立，所以对 $f(x)$ 有 $f(f(x))>f(x)>x$ 恒成立，所以 $f(f(x))=x$ 无实根；

若 $a<0$，函数 $y=f(x)-x$ 的图像在 x 轴下方，所以 $y<0$，即 $f(x)-x<0$ 恒成立，即对任意实数 x，$f(x)<x$ 恒成立，所以对实数 $f(x)$ 有 $f(f(x))<f(x)<x$ 恒成立，所以 $f(f(x))=x$ 无实根，综上可知，当 $f(x)=x$ 无实根时，方程 $f(f(x))=x$ 也无实根.

例 5 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的不动点，若

$f(f(x))=x$,则称 x 为 $f(x)$ 的稳定点. 函数 $f(x)$ 的不动点和稳定点的集合分别记为 A 和 B. 若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$,且集合 $A=B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

解 (1)$a=0$ 时,$f(x)=-1$,则集合 $A=B=\{-1\}$,满足题设;

(2)$a\neq 0$ 时,因为集合 $A\neq\varnothing$,所以方程 $ax^2-1=x$ 有解,得 $a\geqslant -\dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}\text{集合 } B&=\{x\mid a(ax^2-1)^2-1=x\}=\{x\mid a^3x^4-2a^2x^2-x+a-1=0\}\\&=\{x\mid (ax^2-x-1)(a^2x^2+ax-a+1)=0\}\end{aligned}$$

因为 $A=B$,所以方程 $a^2x^2+ax-a+1=0$ 无解,或与 $ax^2-x-1=0$ 同解.

由 $\Delta<0$,得 $a<\dfrac{3}{4}$,由

$$\begin{cases}a^2x^2+ax-a+1=0\\ax^2-x-1=0\end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{3}{4}$,综上得 $-\dfrac{1}{4}\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{4}$ 为所求.

点评 本题借用"不动点"和"稳定点"这两个概念来描述方程的解集问题,关键是对 $f(f(x))-x$ 进行因式分解,由于 $f(x)$ 不一定就是二次函数,所以要考虑 a 是否等于 0.

例 6 设有集合 $A=\{x\mid x^2-[x]=2\}$ 和 $B=\{x\mid |x|<2\}$,求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$(其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 之值的最大整数).

分析 先求集合 B,再根据 $[x]$ 的定义化简集合 A.

解 解不等式 $|x|<2$,得 $B=\{x\mid -2<x<2\}$,由 $x^2-[x]=2$ 得 $x^2-2=[x]$,根据 $[x]$ 的定义,知 $x^2-2=[x]\leqslant x$,从而 $-1\leqslant x\leqslant 2$,显然 $2\in A$,所以 $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 2\}$.

若 $x\in A\cap B$,则 $x^2=[x]+2$,$[x]\in\{1,0,-1\}$,从而得出 $x=\sqrt{3}$($[x]=1$)或 $x=-1$($[x]=-1$),于是 $A\cap B=\{-1,\sqrt{3}\}$.

例 7 设 $A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$,是否存在 $k,b\in\mathbf{N}^*$,使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,证明你的结论.

分析 由集合 A 与集合 C 中的方程联立构成方程组,用判别式对根的情况进行限制,可得到 k,b 的范围,又因为 $k,b\in\mathbf{N}^*$,进而可得值.

解 因为 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$,所以 $A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$,因为 $\begin{cases}y^2=x+1\\y=kx+b\end{cases}$,所以 $k^2x^2+(2bk-1)x+b^2-1=0$,因为 $A\cap C=\varnothing$,所以

$$\Delta_1=(2bk-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$$

所以 $4k^2-4bk+1<0$,此不等式有解的充要条件是 $16b^2-16>0$,即

$$b^2>1 \quad ①$$

因为$\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0\\ y=kx+b\end{cases}$,所以

$$4x^2+(2-2k)x+(5-2b)=0$$

因为 $B\cap C=\varnothing$,所以 $\Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$.

所以 $k^2-2k+8b-19<0$,从而 $8b<20$,即

$$b<\frac{5}{2} \quad ②$$

由式①② 及 $b\in\mathbf{N}^*$,得 $b=2$,代入由 $\Delta_1<0$ 和 $\Delta_2<0$ 组成的不等式组,得$\begin{cases}4k^2-8k+1<0\\ k^2-2k-3<0\end{cases}$,所以 $k=1$,故存在自然数 $k=1,b=2$,使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

例 8 一个集合含有 10 个互不相同的两位数,试证:这个集合必有 2 个无公共元素的子集,此两子集的各数之和相等.

分析 两位数共有 10,11,…,99,计 99−9=90(个),最大的 10 个两位数依次是 90,91,…,99,其和为 945,因此,由 10 个两位数组成的任意一个集合中,其任一个子集中各元素之和都不会超过 945,而它的非空子集却有 $2^{10}-1=1\ 023$ 个,这是解决问题的突破口.

解 已知集合含有 10 个不同的两位数,因它含有 10 个元素,故必有 $2^{10}=1\ 024$ 个子集,其中非空子集有 1 023 个,每一个子集内各数之和都不超过 $90+91+\cdots+98+99=945<1\ 023$,根据抽屉原理,一定存在 2 个不同的子集,其元素之和相等,如此 2 个子集无公共元素即交集为空集,则已符合题目要求;如果这 2 个子集有公共元素,则划去它们的公共元素即共有的数字,可得两个无公共元素的非空子集,其所含各数之和相等.

巩固练习

1.(1)(2017 届云南曲靖一中月考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2-5x+4\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x^2-4=0\}$,下列结论成立的是(　　).

A. $B\subseteq A$　　B. $A\cup B=A$　　C. $A\cap B=A$　　D. $A\cap B=\{2\}$

(2) 用 $C(A)$ 表示非空集合 A 中的元素个数,定义 $A*B=\begin{cases}C(A)-C(B),C(A)\geqslant C(B)\\ C(B)-C(A),C(A)<C(B)\end{cases}$,若 $A=\{1,2\}$;$B=\{x\mid(x^2+ax)(x^2+ax+2)=0\}$,且 $A*B=1$,设实数 a 的所有可能取值构成的集合是 S,则 $C(S)$ 等于

(　　).

A. 4　　　B. 3　　　C. 2　　　D. 1

解　(1)D;　(2)B.

(1)$A=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid x=\pm 2\}\Rightarrow A\cap B=\{2\}$,故选 D.

(2) 由 $A=\{1,2\}$,得 $C(A)=2$,由 $A*B=1$,得 $C(B)=1$ 或 $C(B)=3$.

由$(x^2+ax)(x^2+ax+2)=0$,得 $x^2+ax=0$ 或 $x^2+ax+2=0$.

当 $C(B)=1$ 时,方程$(x^2+ax)(x^2+ax+2)=0$ 只有实根 $x=0$,这时$a=0$;

当 $C(B)=3$ 时,必有 $a\neq 0$,这时 $x^2+ax=0$ 有两个不相等的实根 $x_1=0$,$x_2=-a$,方程 $x^2+ax+2=0$ 必有两个相等的实根,且异于 $x_1=0$,$x_2=-a$.由 $\Delta=a^2-8=0$,得 $a=\pm 2\sqrt{2}$,可验证均满足题意,故 $S=\{-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2}\}$,故 $C(S)=3$.

2. 设 $A=[-2,4)$,$B=\{x\mid x^2-ax-4\leqslant 0\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围为(　　).

A. $[-1,2)$　B. $[-1,2]$　C. $[0,3]$　D. $[0,3)$

解　D. 因 $x^2-ax-4=0$ 有两个实根 $x_1=\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}$,$x_2=\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}$.

故 $B\subseteq A$ 等价于 $x_1\geqslant -2$ 且 $x_2<4$,即 $\frac{a}{2}-\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}\geqslant -2$ 且 $\frac{a}{2}+\sqrt{4+\frac{a^2}{4}}<4$,解之得 $0\leqslant a<3$.

3. 集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a+5\}$,$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 33\}$,$A\subseteq(A\cap B)$,则 a 的取值范围是________.

解　$a<-4$ 或 $1\leqslant a\leqslant 9$. 由条件知 $A\subseteq B$,当 $A=\varnothing$ 时,$2a+1>3a+5$;当 $A\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}2a+1\geqslant 3\\3a+5\leqslant 23\\3a+5\geqslant 2a+1\end{cases}$,$1\leqslant a\leqslant 9$.

所以 $a<-4$ 或 $1\leqslant a\leqslant 9$.

4. 已知两个集合 $A=\{(x,y)\mid x=m,y=-3m+2,m\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{(x,y)\mid x=n,y=a(n^2-n+1),n\in\mathbf{N}^*\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则整数 a 的值为________.

解　-1. 由题意知,方程组$\begin{cases}y=-3x+2\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$,有整数解$(x,y)$,$x>0$. 显然$a\neq 0$,$y<0$,从而 $a<0$. 消去 y,可得 $ax^2-(a-3)x+a-2=0$,$\Delta=$

$(a-3)^2-4a(a-2)=-3a^2+2a+9\geqslant 0$，即 $3a^2-2a\leqslant 9$，由于 a 是负整数，所以 a 只能等于 -1. 当 $a=-1$ 时，$A\cap B=\{(1,-1),(3,-7)\}$，所以 $a=-1$.

5. 设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$________.

解　$\{-3,0,2,6\}$. 显然，在 A 的所有三元子集中，每个元素均出现了 3 次，所以 $3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15$，故 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$，于是集合 A 的四个元素分别为 $5-(-1)=6, 5-3=2, 5-5=0, 5-8=-3$，因此，集合 $A=\{-3,0,2,6\}$.

6. 若集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$ 和 $B=\{x\mid 2m-1\leqslant x\leqslant m+1\}$.

(1) 当 $m=-3$ 时，求集合 $A\cap B$.

(2) 当 $B\subseteq A$ 时，求实数 m 的取值范围.

解　(1) 当 $m=-3$ 时，$B=\{x\mid -7\leqslant x\leqslant -2\}$，$A\cap B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}$.

(2) 因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B\neq\varnothing$. 当 $B=\varnothing$ 时，$2m-1>m+1$，即 $m>2$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，有$\begin{cases}2m-1\leqslant m+1\\2m-1\geqslant -3\\m+1\leqslant 4\end{cases}$，即 $-1\leqslant m\leqslant 2$.

综上所述，所求 m 的范围是 $m\geqslant -1$.

7. 已知函数 $y=\sqrt{21-4x-x^2}$ 的定义域为 A，函数 $y=\log_2(x-a+1)$ 的定义域为 B.

(1) 若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解　由已知得 $A=\{x\mid -7\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x>a-1\}$.

(1) 若 $A\subseteq B$，则 $a-1<-7$，得 $a<-6$，所以 $a\in(-\infty,-6)$.

(2) 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a-1\geqslant 3$，得 $a\geqslant 4$，所以 $a\in[4,+\infty)$.

8. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

解　由 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}=\{x\mid x=0$ 或 $x=-4\}=\{0,-4\}$. 因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$ 或 $B=\{0,-4\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，即 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实根，由 $\Delta<0$，即 $4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$；

当 $B=\{0\}$ 时，由根与系数的关系：$0+0=-2(a+1)$，$0\times 0=a^2-1\Rightarrow a=-1$；

当 $B=\{-4\}$ 时，由根与系数的关系：$-4-4=-2(a+1)$，$(-4)\times(-4)=a^2-1\Rightarrow a\in\varnothing$；

当 $B=\{0,-4\}$ 时，由根与系数的关系：$0-4=-2(a+1)$，$0\times(-4)=a^2-1\Rightarrow a=1$；

综上所得 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

9. 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

(2) 若 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解 由已知，得 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$.

(1) 因为 $A\cap B=A\cup B$，所以 $A=B$.

于是 2，3 是一元二次方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的两个根，由韦达定理知：
$\begin{cases}2+3=a\\ 2\times 3=a^2-19\end{cases}$，解之得 $a=5$.

(2) 由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing\Rightarrow A\cap B\neq\varnothing$，又 $A\cap C=\varnothing$，得 $3\in A$，$2\notin A$，$-4\notin A$，由 $3\in A$，得 $3^2-3a+a^2-19=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，与 $2\notin A$ 矛盾；

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，符合题意.

第 2 节　集合中的计数

在这里，我们将介绍 n 个元素的集合的子集个数公式与性质及其应用；集合中的对应原理及其应用；容斥原理及其应用. 首先介绍 n 个元素的集合的子集个数公式及其应用.

我们知道 n 个元素的集合的子集有如下两条性质：

(1) 把一个有限集合 M 分成 k 个非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，如果满足 $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant k)$，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=M$，那么 $|M|=\sum\limits_{i=1}^{k}|A_i|$（这里 $|M|$ 表示集合 M 中所包含的元素的个数，下同）. 这个结论的成立是显然的.

(2) 含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n.

关于这个结论的证明方法有很多，这里只介绍一种"追踪元素去向"的证明方法，并给出它的相关应用.

对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$，有些子集中含有元素 1，有些子集中不含有元素 1；有些子集中含有元素 2，有些子集中不含有元素 2；依此类推. 因此，对于集合

$\{1,2,\cdots,n\}$ 中的某个子集 C 而言，任何一个元素可能属于它，也可能不属于它，也就是说，某个元素可能在子集 C 中，也可能不在子集 C 中，有两种可能. 集合$\{1,2,\cdots,n\}$ 含有 n 个元素，根据乘法原理容易得到：含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n.

例 1 若集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足条件：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则满足条件的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共有________对.

解 2^n-1. 在这里不妨追踪元素 a_1 的去向，a_1 可能在一个集合中，也可能在其中的两个集合中，……，也可能所有集合中都有元素 a_1，因此，对于元素 a_1 来说，它共有$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$ 种走向.

同样对于其他的元素不难得到：$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都有 2^n-1 种走向.

因此，由乘法原理可得，满足条件的集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 共有 2^n-1 对.

例 2 设 $P_1,P_2,\cdots,P_j$ 是集合 $P=\{1,2,\cdots,i\}$ 的子集，其中 i,j 为正整数，记 $f(i,j)$ 为满足 $P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_j=\varnothing$ 的有序子集组$(P_1,P_2,\cdots,P_j)$ 的个数.

(1) 求 $f(2,2)$ 的值；

(2) 求 $f(i,j)$ 的表达式.

解 第(1) 问中，由于数据较少，可以采用列举的办法. 但为了给第(2) 问作辅垫，这里给出“追踪元素去向”的方法.

P_1,P_2 为集合 $P=\{1,2\}$ 的子集，要满足 $P_1\cap P_2=\varnothing$，对于元素 1，要么在 P_1 中，要么在 P_2 中，要么既不在 P_1 中，也不在 P_2 中；对于元素 2，要么在 P_1 中，要么在 P_2 中，要么既不在 P_1 中，也不在 P_2 中. 所以 $f(2,2)=(C_2^0+C_2^1)^2=9$.

第(2) 问是对第(1) 问的一般性推广，对于 P 中的任何一个元素，只要不同时在 $P_1,P_2,\cdots,P_j$ 中即可. 否则，不能满足要求，P 中其他元素也如此，因此有 $f(i,j)=(C_j^0+C_j^1+C_j^2+\cdots+C_j^{j-1})^i$.

例 3 设集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*)$，$A,B$ 是 S 的两个非空子集，且 A 中的最大数小于 B 中的最小数，则这样的集合对(A,B) 的个数是________.

解 $(n-2)2^{n-1}+1$. 我们不妨设 A 中的最大数为 k，则 A 可以含元素 $1,2,3,\cdots,k-1$ 中的某些元素或全部元素，所以集合 A 中共有$C_{k-1}^0+C_{k-1}^1+C_{k-1}^2+\cdots+C_{k-1}^{k-1}=2^{k-1}$ 种情况.

由题意知：集合 B 可以含元素 $k+1,k+2,\cdots,n$ 中的部分元素，但不能同时含有全部元素，所以集合 B 共有$C_{n-k}^1+C_{n-k}^2+C_{n-k}^3+\cdots+C_{n-k}^{n-k}=2^{n-k}-1$ 种情况. 所以，当 A 中的最大元素为 k 时，集合对(A,B) 共有 $2^{k-1}(2^{n-k}-1)=2^{n-1}-2^{k-1}$ 个.

当 k 依次取值 $1,2,3,\cdots,n-1$ 时，可以分别得到集合对(A,B) 的个数为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2^{n-1}-2^{k-1})=(n-1)2^{n-1}-(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2})=(n-2)2^{n-1}+1$$

点评 若把条件中"A的最大数小于B中的最小数"改为"A的最大数不大于B的最小数",则(A,B)共有$(n-1)2^n+1$个.

例4 设集合A,B是非空集合M的两个不同子集,满足A不是B的子集,且B也不是A的子集.若$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,求所有不同的元素集合对(A,B)的个数.

解 要满足条件,集合A中必须含有集合B没有的元素,同时集合B中必须含有集合A没有的元素,较为复杂,于是我们想到要从反面考虑,即集合A是集合B的真子集,或集合B是集合A的真子集,从这个角度出发,寻找元素的去向,来求此时有序集合对(A,B)个数.

集合M有2^n个子集,如不做任何限制,不同的集合对(A,B)有$2^n(2^n-1)$个.

当集合A是集合B的真子集,且集合B中含有$k(1\leqslant k\leqslant n)$个元素时,集合$B$有$C_n^k$种可能,集合$A$有$2^k-1$种可能.因此,这样的有序集合对$(A,B)$有

$$\sum_{k=1}^{n}[C_n^k(2^k-1)]=\sum_{k=1}^{n}(C_n^k 2^k)-\sum_{k=1}^{n}C_n^k=3^n-2^n(\text{个}).$$

同理,当集合B是集合A的真子集时,满足条件的有序集合对(A,B)也有3^n-2^n个.

故综上,满足题设要求的有序集合对(A,B)的个数为$2^n(2^n-1)-2(3^n-2^n)=4^n+2^n-2\cdot 3^n$.

点评 在解集合题时,寻找集合元素去向的方法主要是在于通过对子集条件的分析,找到某个子集可以满足的所有情况,重在对元素走向的分析.但也要注意:当正面较复杂时,可以从它的反面入手,这样就容易找到解题方法.当然解决集合中的计数问题,除了应用以上方法以外,常用的方法还有:列举法、分类计数原理和分步计数原理、递推法、图示法等.对于如何应用对应原理法与容斥原理法下面将专门介绍.

例5 (2005年山西省高中数学预赛试题)已知集合$M=\{1,2,\cdots,12\}$,$A=\{a,b,c\}$是M的子集,且$a+b+c$为完全平方数,则这种集合A的个数是________.

解 26.不妨设$a<b<c$,由于$6\leqslant a+b+c\leqslant 33$,在此范围内的完全平方数有9,16,25.

(1) 若$a+b+c=9$,则$c\in\{4,5,6\}$,这样的子集A有$\{1,2,6\}$,$\{1,3,5\}$,$\{2,3,4\}$这3个.

(2) 若$a+b+c=16$,则$c\in\{7,8,9,10,11,12\}$,这样的子集A有

$\{1,3,12\}$，$\{1,4,11\}$，$\{2,3,11\}$，$\{1,5,10\}$，$\{2,4,10\}$，$\{1,6,9\}$，$\{2,5,9\}$，$\{3,4,9\}$，$\{1,7,8\}$，$\{2,6,8\}$，$\{3,5,8\}$，$\{3,6,7\}$，$\{4,5,7\}$，这 13 个.

(3) 若 $a+b+c=25$，则 $c\in\{10,11,12\}$，这样的子集 A 有 $\{2,11,12\}$，$\{3,10,12\}$，$\{4,9,12\}$，$\{5,8,12\}$，$\{6,7,12\}$，$\{4,10,11\}$，$\{5,9,11\}$，$\{6,8,11\}$，$\{6,9,10\}$，$\{7,8,10\}$，这 10 个.

综上，满足条件的子集共有 $3+13+10=26$(个).

点评　本题中主要应用了分类计数原理、极端原理和列举法.

例 6　(2013 年山东省高中数学预赛试题) 已知 $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e\}$，$A\cap B=\{a,b,c\}$，$c\in A\cap B\cap C$，则满足上述条件的 $\{A,B,C\}$ 共有________组.

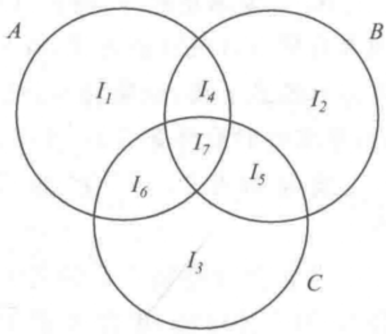


图 1

解　100. 如图 1，集合 $A\cup B\cup C$ 可分为 7 个互不相交的区域，分别记为 $I_1,I_2,\cdots,I_7$.

已知 $c\in I_7$，元素 a,b 属于 I_4,I_7 中的某个区域，有 4 种可能；元素 d,e 属于 I_1,I_2,I_3,I_5,I_6 中的某个区域，各有 5^2 种可能. 从而，符合条件的 $\{A,B,C\}$ 共有 $1\times4\times5^2=100$(组).

点评　本题借助集合的韦恩图，利用分步计数原理，使问题得到直观、快速的解决.

例 7　求满足 $A\cap B\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=U$ 的有序集合 (A,B) 的个数.

解　易知 A,B 中必有 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 这 k 个元素，记 $M=\{a_{k+1},a_{k+2},\cdots,a_n\}$，$M$ 中有 $t=n-k$ 个元素，下面就 A 中其他元素(但必在 M 中)的个数进行讨论：

(1) 当 A 含有 M 中 0 个元素时，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，A 只有一个，即 C_t^0 个.

由 $A\cap B=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，可知 B 还可以有 M 中若干个元素，B 的个数相当于 M 的子集数，因此 B 有 2^t 个，有序集合对 (A,B) 的个数为 $2^tC_t^0$ 个.

(2) 当 A 含有 M 中一个元素时，A 有 C_t^1 个，由 $A\cap B=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$B$ 可含有 M 中其他任何元素(除 A 所含的)，所以 B 有 2^{t-1} 个，所以有序集合对 (A,B) 的个数为 $2^{t-1}C_t^1$.

(3) 同理，A 有两个元素时，有序集合对 (A,B) 的个数为 $2^{t-2}C_t^2$ 个.

(4) 当 A 含有 M 全部元素时，(A,B) 的个数为 $2^0C_t^t$ 个.

根据分类计数原理，知有序集合对 (A,B) 的个数为 $2^tC_n^0+2^{t-1}C_n^1+\cdots+2^0C_t^t=(1+2)^t=3^{n-k}$ 个.

二、对应原理及其应用

定义 1　设 A,B 是两个集合(两者可以相同)，如果对于每个 $x\in A$，都有