全国卷网出品

全国卷 高考数学 满分教程：解析几何

全国卷怎么考，我们怎么教

周 韡 李红庆 主编

- 全国卷培优畅销书
- 专门指导高考战略
- 二级结论全部收录
- 助力考生拿到满分

清华大学出版社

全国卷

高考数学

满分教程：解析几何

周　韡　李红庆　主　编

张　甲　牛　松　张智慧　金　磊　副主编
王筱颖　陈良骥　胡志红　王荣新

清華大學出版社
北　京

内容简介

本书内容针对全国卷高考数学解析几何部分展开，侧重知识点的系统性与逻辑性，以及为达到满分的知识扩充和解题标准。全书分为九章，包括全国卷解析几何考试概论、最值与取值范围问题、切线问题、定值定点问题、平面向量在解析几何中的应用、几何元素问题、求轨迹方程、参数方程和极坐标、仿射变换等，附录给出了椭圆和双曲线的常考的92条性质和完整证明。

本书适合高中二、三年级的学生学习使用，也可供高中数学老师的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

全国卷高考数学满分教程：解析几何/周韡，李红庆主编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-46890-5

Ⅰ. ①全…　Ⅱ. ①周…　②李…　Ⅲ. ①中学数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第064248号

责任编辑：袁金敏　薛　阳
封面设计：刘新新
责任校对：胡伟民
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：210mm×295mm　　**印　　张**：20.25　　**字　　数**：605千字
版　　次：2017年6月第1版　　**印　　次**：2017年6月第1次印刷
印　　数：1～3500
定　　价：59.80元

产品编号：072420-01

preface 序言

本书是全国卷网(quanguojuan.com)高考研究中心教师多年的教学经验的提炼与总结,针对全国卷高考数学解析几何内容应试场景和满分战略进行讲解,侧重体现知识点的系统性与逻辑性,并进行了必要的知识扩充和解题标准讲解。

书中有很多作者团队多年的教学心得,例如解析几何的“硬解定理”、数形结合中的“切线规则”、向量与圆锥曲线的出题规律的解决方法以及其他一些数学思想的应用。针对全国卷的高考题型及特点,我们力求探索简洁、高效、容易掌握的普适方法。让高考满分不再只是学子的一个梦想。

书中内容为全国卷历年真题和模拟试题精选,配合互联网技术,真实还原考试场景下达到满分所具备的高考知识和学科素养。本书针对解答题和选择填空题梳理了二级子结论和知识扩展,应用出题人的思想,高屋建瓴,从大量题海中提炼了解题方法和技巧。

全书分为九章,覆盖了全国卷高考最值与取值范围问题、切线问题、定值定点问题、平面向量在解析几何中的应用、几何元素问题、求轨迹方程、参数方程和极坐标、仿射变换,并给出了椭圆和双曲线的常考92条性质和完整证明。

第一章为全国卷考试概论,讲解系统阐述:离心率在解答题中的应用以及从代数几何两个观点看待曲线的位置关系,并且讲解了考试场景中设而不求的快算:硬解定理加快解答速度。

第二章为解析几何中考点密集的最值取值范围问题,系统归纳了参数的最值问题和取值范围问题。整章从函数建模和参数值域角度考虑参数范围问题。

第三章为切线问题中单切线、双切线、切点弦的问题。创造性地给出了极线使用法则和全国卷常考的几个题型归纳。

第四章为定值定点问题。阐述了定值问题和定点问题。函数建模和几何元素的交汇使得该章节熠熠生辉。

第五章为平面向量在解析几何中的应用。讲解了解决有关角的问题和解决共线的问题。

第六章为几何元素问题。系统地阐述了直线和圆、圆锥曲线、角度问题、三角形的心、存在性问题。从几何元素角度阐述三角形心和向量过程。

第七章为求轨迹方程。讲解直接法求轨迹方程和间接法求轨迹方程的问题。

第八章为参数方程和极坐标。讲解参数方程和极坐标方程的问题。

第九章为仿射变换。系统地阐述仿射的变换、利用仿射变换处理面积、弦长问题、利用仿射变换凸显隐藏几何条件的问题。尽管本体属于“超纲”内容,但是按照考试原则我们可以更深刻地了解全国卷出题规律。

附录给出了椭圆和双曲线的92条考试性质总结和证明,可以当作题目思考,也可以作为性质巩固记忆。

本书得到海南华侨中学特级教师、正高级教师李红庆的中国教育学会“十二五”规定课题《素质教育目标下学生个性塑造、特长培养策略研究》(课题立项号:21050065)和2015年海南省教育科学重点课题《互联网+高中数学几何探究性实验研究》(立项号:qjz1251507)研究成果支持。

本书的完成有赖于一支高度负责的团队,各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容。然而,编者虽倾心倾力,但终究水平有限,书中若有不妥之处,恳请广大读者批评指正!

部分变式题讲解视频放于 www.quanguojuan.com 网站,视频课程为收费课程。

编者

目录

contents

第一章

全国卷解析几何考试概论

第一节　离心率和离心率方程不等式和范围

这类题的本质是已知 a,b,c 中任意两者的等式关系和不等关系，利用椭圆的 $a^2=b^2+c^2$ 和双曲线的 $c^2=a^2+b^2$ 来化简齐次方程。

方法：求离心率的过程就是探求基本量 a、b、c 的齐次式间的等量关系。常见的离心率公式应熟练掌握：①$e=\frac{c}{a}$；②$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$（椭圆）；③$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$（双曲线）。另外，在求解离心率的过程中要有以下意识：①利用定义的意识（定义中有 $2a$，且 $|F_1F_2|=2c$）；②获得了 a,b,c 中的任意两个参数间的数量关系都可以求解离心率 e。

【例 1】 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别是 A、B，左、右焦点分别是 F_1、F_2。若 $|AF_1|$、$|F_1F_2|$、$|BF_1|$ 成等差数列，则此椭圆的离心率为________。

解析　由题设可知 $|AF_1|=a-c$，$|F_1F_2|=2c$，$|BF_1|=a+c$，故 $4c=a-c+a+c$，即 $2c=a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$。

【例 2】 如图 1-1 所示，已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为 A，左焦点为 F，上顶点为 B，若 $\angle BAO+\angle BFO=90°$，则该椭圆的离心率是________。

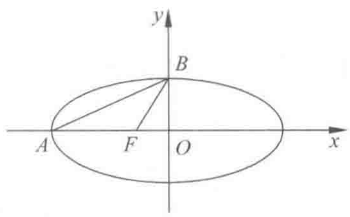

图 1-1

解析　因为 $\angle BAO+\angle BFO=90°$，所以 $\tan\angle BAO\cdot\tan\angle BFO=1$，即 $\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}=1$，得 $b^2=ac$，又因为 $a^2=b^2+c^2$，故 $a^2-c^2=ac$，即 $c^2+ac-a^2=0$，由 $e=\frac{c}{a}$ 可得 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），所以 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

【例 3】 过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P，F_2 为右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，则椭圆的离心率为(　　)。

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

解法 1（定义法）：如图 1-2 所示，令 $|PF_1|=1$，则在 $\text{Rt}\Delta PF_1F_2$ 中，由 $\angle F_1PF_2=60°$，可知 $|PF_2|=2$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}$，由椭圆定义得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=3$，$2c=\sqrt{3}$，所以 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。故选 B。

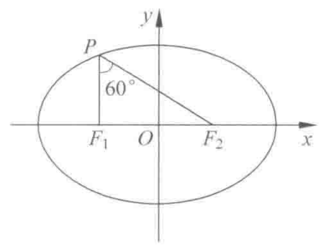

图 1-2

解法 2：依题意可知，$P\left(-c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$，再由 $\angle F_1PF_2=60°$，所以 $\angle PF_2F_1=30°$，得 $|PF_2|=2|PF_1|$，所以 $3|PF_1|=2a$，$\frac{3b^2}{a}=2a$，$2a^2=3b^2$，故 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，所以 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 B。

解法 3：同解法二，$P\left(-c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$，再由 $Rt\Delta PF_1F_2$ 中，$\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|}=\tan60°=\sqrt{3}$，即 $\frac{2c}{b^2}=\frac{2ac}{b^2}=\sqrt{3}$，故有 $2ac=\sqrt{3}b^2=\sqrt{3}(a^2-c^2)$，即 $\sqrt{3}c^2+2ac-\sqrt{3}a^2=0$，方程两边同时除以 a^2，有 $\sqrt{3}e^2+2e-\sqrt{3}=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $e=-\sqrt{3}$（舍）。故选 B。

变式 1 已知正方形 $ABCD$，以 A、B 为焦点，且过 C、D 两点的椭圆的离心率为________。

变式 2 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，且 $|F_1F_2|=2c$，点 A 在椭圆上，且垂直于 x 轴，$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=c^2$，则椭圆的离心率 e 等于(　　)。

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

变式 3 椭圆 P：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，焦距为 $2c$，若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆 P 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$，则该椭圆的离心率等于________。

变式 4 设 F_1、F_2 是椭圆的两焦点，以 F_2 为圆心，且过椭圆中心的圆与椭圆的一个交点为 M，若直线 F_1M 与圆 F_2 相切，则椭圆的离心率为(　　)。

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 4】 椭圆 G：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>c_0)$ 的两焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，椭圆上存在点 M 使 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$。则椭圆离心率 e 的取值范围为________。

解法 1：当 P 为椭圆的短轴端点时，$\angle F_1PF_2$ 取得最大值，而由题意可知，若在椭圆上存在点 $\angle F_1MF_2=90°$，只需要焦点三角形的顶点最大值 $\geqslant 90°$ 即可。故只需保证当点 M 落在椭圆短轴端点处情形时的 $\angle F_1MF_2\geqslant 90°$ 即可。所以有 $\frac{c}{a}=\sin\frac{\angle F_1MF_2}{2}\geqslant\sin\frac{90°}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。又因为 $e<1$，故所求的椭圆离心率 e 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$。

解法 2：由椭圆的定义知 $|MF_1|+|MF_2|=2a$　　①

由 ΔF_1MF_2 中，$\angle F_1MF_2=90°$，

由勾股定理得 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$　　②

将①，②化简得 $|MF_1|\cdot|MF_2|=2(a^2-c^2)$　　③

由①，③，根据韦达定理，可知 $|MF_1|$、$|MF_2|$ 是方程 $x^2-2ax+2(a^2-c^2)=0$ 的两个根，则 $\Delta=4a^2-8(a^2-c^2)\leqslant 0$，所以 $\left(\frac{c}{a}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}$，即 $e\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<e<1$，从而 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$，即 e 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$。

评注：若椭圆上存在点 P 使得 $\angle F_1PF_2=\alpha\left(F_1,F_2\text{ 为焦点},\alpha\in(0,\pi)\right)$，则 $e\in\left[\sin\frac{\alpha}{2},1\right)$；反之，若椭圆上不存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2=\alpha$，则 $e\in\left(0,\sin\frac{\alpha}{2}\right)$。

F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点，P 是椭圆上的动点，若 $\angle F_1PF_2=\theta$，则椭圆离心率 e 的取值范围为 $\sin\frac{\theta}{2}\leqslant e\leqslant 1$。

变式 1　已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是(　　)。

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【例 5】　已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是(　　)。

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

解析　由于满足$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的 M 总在椭圆内部，则对椭圆上任意一点 P，$\angle F_1PF_2$ 均为锐角，如图 1-3 所示，事实上只需顶点位置的顶角为锐角即可，即 $0<\angle F_1BO<\frac{\pi}{4}$，而 $e=\sin\angle F_1BO<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。故选 C。

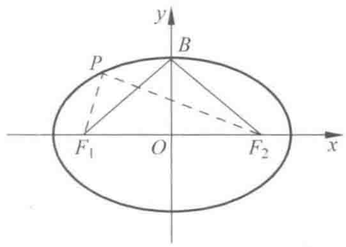

图　1-3

变式 1　设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为 F_1 和 F_2，P 是椭圆上任一点，点$\angle F_1PF_2$ 的最大值为$\frac{2\pi}{3}$，则椭圆的离心率为________。

【例 6】　椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点是 F_1、F_2，若 P 为其上一点，且$|PF_1|=2|PF_2|$，则此椭圆离心率的取值范围为________。

解析　根据椭圆的定义$|PF_1|+|PF_2|=2a$ 求解。

解法 1：由$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|PF_1|=2|PF_2|$。得$|PF_1|=\frac{4a}{3}$，$|PF_2|=\frac{2a}{3}$，又$|PF_1|-|PF_2|\leqslant 2c$，即$\frac{2a}{3}\leqslant 2c$，得$\frac{1}{3}\leqslant e<1$。故离心率的取值范围为$\left[\frac{1}{3},1\right)$。

解法 2：因为$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{2a-|PF_2|}{|PF_2|}=\frac{2a}{|PF_2|}-1$，随着点 P 的左移，$|PF_2|$增大，故$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$减小，因此$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$随点 P 的左移，故点 P 在右顶点时，$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}\geqslant 2$，即$\frac{a+c}{a-c}\geqslant 2\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant e<1$。故离心率的取值范围为$\left[\frac{1}{3},1\right)$。

评注：若椭圆上存在点 P 使得$|PF_1|=\lambda|PF_2|(\lambda>0,\lambda\neq 1)$，则 $e\in\left(\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|,1\right)$。

变式 1　F_1、F_2 分别为椭圆的两个焦点，椭圆上存在点 P 使得$|PF_1|=3|PF_2|$的椭圆方程可以是(　　)。

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{35}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　C. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{24}=1$　　D. $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

变式 2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，若椭圆上存在一点 P，使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_2}=\frac{c}{a}$，则该椭圆的离心率的取值范围是________。

【例 7】　已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，则此双曲线的离心率 e 为(　　)。

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

解析 由题意可知 $a^2=4,b^2=3$，故 $c^2=a^2+b^2=7$，故 $c=\sqrt{7}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$。故选 D。

评注：本题若借用公式 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{7}}{2}$，则更为简洁。因为此种方法在求解过程中避开了基本量 c 的求解，从而使得求解过程变得更为简洁。所以同学们应该对公式：椭圆中 $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}(0<e<1)$；双曲线中 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}(e>1)$，加以熟练识记。

变式 1 下列双曲线中离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$的是(　　)。

A. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1$

变式 2 已知点 $(2,3)$ 在双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，C 的焦距为 4，则它的离心率为________。

变式 3 已知双曲线$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，则 m 的取值范围是(　　)。

A. $(-12,0)$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(-3,0)$　　D. $(-60,-12)$

【例 8】 已知双曲线的渐近线方程是 $2x\pm y=0$，则该双曲线的离心率等于________。

分析 因为不确定焦点在 x 轴上还是在 y 轴上，所以需分情况求解，由渐近线中的 a,b 关系，结合 $c^2=a^2+b^2$ 得出离心率。

解析 依题意，双曲线的渐近线方程是 $y=\pm 2x$。

若双曲线的焦点在 x 轴上，则因双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}=2$，所以离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$；

若双曲线的焦点在 y 轴上，则因双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，故有 $\frac{a}{b}=2$，即 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，所以离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$。故离心率 e 等于$\sqrt{5}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$$

评注：

① 若双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(焦点在 x 轴上)，其渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$；若双曲线方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$时，其渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$。

② 若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}kx\ (k>0)$，则其离心率 $e=\sqrt{1+k^2}$（焦点在 x 轴上）或 $e=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$(焦点在 y 轴上)。

③ 若双曲线的离心率为 e，则其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{e^2-1}\,x$(焦点在 x 轴上)或 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{e^2-1}}\,x$(焦点在 y 轴上)。

变式 1 中心在原点，焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4,-2)$，则它的离心率为(　　)。

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

变式 2　若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$e=\sqrt{3}$，则其渐近线的方程为________。

【例 9】　(2012 湖北理 14)如图 1-4 所示，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两焦点为$F_1$、$F_2$。若以$A_1A_2$为直径的圆切于菱形$F_1B_1F_2B_2$，切点分别为$A$、$B$、$C$、$D$。

则　(1) 双曲线的离心率$e=$________；

(2) 菱形$F_1B_1F_2B_2$的面积S_1与矩形$ABCD$的面积S_2的比值$\frac{S_1}{S_2}=$________。

解析　(1) 如图 1-5 所示，连接OA，则由题意可知$OA\perp B_2F_2$且$|OA|=a$，又$|OF_2|=c$，故$|AF_2|=b$。

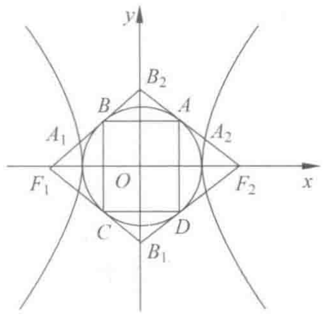

图　1-4

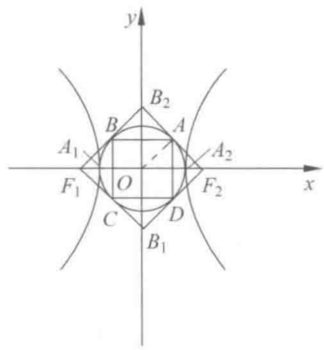

图　1-5

由$\mathrm{Rt}\triangle OAF_2\backsim\mathrm{Rt}\triangle B_2OF_2$，得$\frac{|OA|}{|AF_2|}=\frac{|B_2O|}{|OF_2|}$，即$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，(或由等面积法：$a\sqrt{b^2+c^2}=bc$求得此式)即$b^2=ac$，且$c^2=a^2+b^2$，故$c^2-a^2=ac$，即$c^2-ac-a^2=0$。

即$e^2-e-1=0$，解得$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)，所以$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

(2) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|F_1F_2||B_1B_2|}{\frac{1}{2}|AC||BD|\sin 2\angle AOF_2}=\frac{2bc}{2a^2\times 2\times\frac{a}{c}\times\frac{b}{c}}=\frac{e^3}{2}=\frac{(e+1)(e^2-e+1)-1}{2}=\frac{2e+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+2}{2}$

(因为$e^2-e-1=0$)。

> **评注：**$\frac{S_1}{S_2}$的值也可由以下方法得出。设AD交x轴于点M，考查局部图形如图 1-6 所示，由图形对称性知，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4S_{\triangle B_2OF_2}}{8S_{\triangle OMA}}=\frac{1}{2}\left(\frac{B_2F_2}{OA}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+c^2}{a^2}=e^2-\frac{1}{2}=e+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}+2}{2}$。

变式 1　设双曲线的一个焦点为F，虚轴的一个端点为B_2，如果直线FB与该双曲线的一条渐近线垂直，那么双曲线的离心率是(　　)。

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

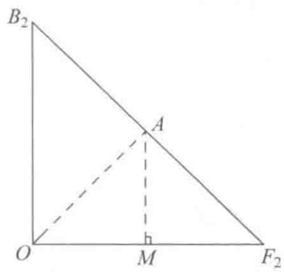

图　1-6

【例 10】　如图 1-7 所示，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1$，$F_2$，过$F_1$作倾斜角为$30°$的直线交双曲线右支于$M$点，若$MF_2$垂直于$x$轴，则双曲线的离心率为(　　)。

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 依题意，如图 1-7 所示，不妨设 $|MF_2|=1$，则 $|MF_1|=2$，$|F_1F_2|=\sqrt{3}$。故选 B。

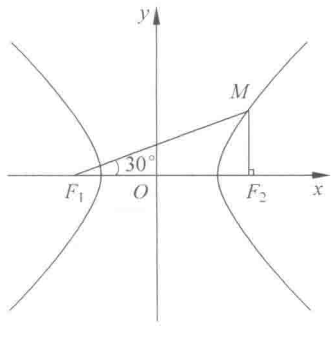

图 1-7

变式 1 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，M 为双曲线上的点，若 $MF_2\perp F_1F_2$，$\angle MF_1F_2=30^\circ$，则双曲线的离心率为（　　）。

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

变式 2 设 F_1、F_2 分别是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，P 是 C 上一点，若 $|PF_1|+|PF_2|=6a$，且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30°，则 C 的离心率为________。

变式 3 （2014 重庆理 8）设 F_1、F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P，使得 $|PF_1|+|PF_2|=3b$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{9}{4}ab$，则该双曲线的离心率为（　　）。

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{9}{4}$　　D. 3

【例 11】 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1、F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围为（　　）。

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

解析 由双曲线的定义知，$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a$，$|PF_1|=2|PF_2|$，故 $|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，又 $|PF_1|+|PF_2|\geqslant|F_1F_2|=2c$，故 $6a\geqslant 2c$，即 $e\leqslant 3$，故选 B。

> **评注**：若在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上存在一点 P，使 $|PF_1|=\lambda|PF_2|(\lambda>1)$，则 $1<e\leqslant\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}$，注意与椭圆中 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\leqslant e<1(\lambda>1)$ 类似结论的区分和对比识记。

变式 1 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$、$F_2(-c,0)$，若双曲线上存在点 P，使 $\dfrac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$，则双曲线的离心率的取值范围是（　　）。

【例 12】 [2009(全国 2)]如图 1-8 所示，已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B，若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，则 C 的离心率为（　　）。

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $\dfrac{5}{8}$　　D. $\dfrac{9}{5}$

解析 如图 1-9 所示，由题意知道该直线与双曲线的交点 A、B 在右支上，设双曲线的左焦点为 F'，连接 AF、AF' 及 BF、BF'，根据双曲线的第一定义有：

$$|AF'|-|AF|=2a\Rightarrow|AF'|=|AF|+2a \tag{1}$$

$$|BF'|-|BF|=2a\Rightarrow|BF'|=|BF|+2a \tag{2}$$

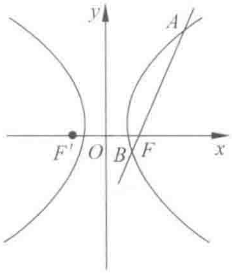

图　1-8

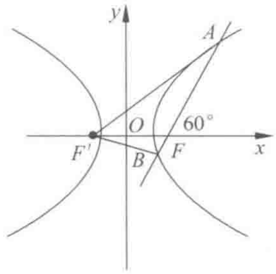

图　1-9

由过焦点的直线的斜率 $k=\sqrt{3}$，知$\angle AFx=\angle BFF'=60°$，$\angle AFF'=120°$，根据余弦定理有：

$$\cos 60° = \frac{|BF|^2+4c^2-|BF'|^2}{2\times 2c\times|BF|} \Rightarrow 2c\times|BF|=|BF|^2+4c^2-|BF'|^2 \tag{3}$$

$$\cos 120° = \frac{|AF|^2+4c^2-|AF'|^2}{2\times 2c\times|AF|} \Rightarrow -2c\times|AF|=|AF|^2+4c^2-|AF'|^2 \tag{4}$$

由式(1)、式(4)得：$|AF|\times(4a-2c)=4c^2-4a^2$，由式(2)、式(3)得：

$$|BF|\times(4c+2c)=4c^2-4a^2$$

所以

$$\begin{cases}|AF|\times(4a-2c)=4c^2-4a^2\\|BF|\times(4a+2c)=4c^2-4a^2\\|\overrightarrow{AF}|=4|\overrightarrow{BF}|\end{cases}$$

$$\Rightarrow 16a-8c=4a+2c,\quad \text{所以}\frac{c}{a}=\frac{6}{5}$$

由例 12 可得如下定理：设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过右焦点 F_2 且斜率为 k 的直线交双曲线的右支于 A、B 两点，如图 1-10 或图 1-11 所示，若$\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$。

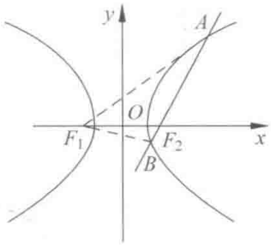

图　1-10

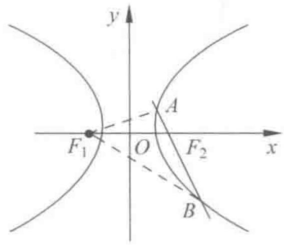

图　1-11

当 $k>0$ 时，双曲线的离心率

$$e=\frac{(\lambda-1)\sqrt{1+k^2}}{1+\lambda} \tag{1}$$

当 $k<0$ 时，双曲线的离心率

$$e=\frac{(1-\lambda)\sqrt{1+k^2}}{1+\lambda} \tag{2}$$

由例 12 可得如下推论：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过左焦点 F_1 且斜率为 k 的直线交双曲线的左支于 A、B 两点，如图 1-12 或图 1-13 所示，若$\overrightarrow{AF_1}=\mu\overrightarrow{F_1B}$。

当 $k>0$ 时，双曲线的离心率

$$e=\frac{(1-\mu)\sqrt{1+k^2}}{1+\mu} \tag{3}$$

当 $k<0$ 时，双曲线的离心率

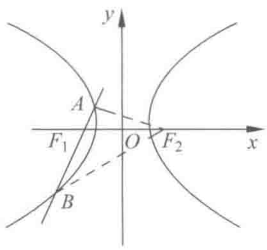

图 1-12

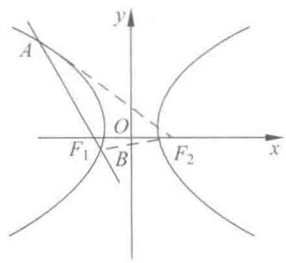

图 1-13

$$e=\frac{(1-\mu)\sqrt{1+k^2}}{1+\mu} \tag{4}$$

以图 1-10 为例证明如下：因为：

$$|AF_1|-|AF_2|=2a\Rightarrow |AF_1|=|AF_2|+2a \tag{1}$$

$$|BF_1|-|BF_2|=2a\Rightarrow |BF_1|=|BF_2|+2a \tag{2}$$

由过焦点的直线的斜率为 k，知 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}$，$\cos\angle AF_2F_1=-\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}$，根据余弦定理有：

在 $\triangle BF_2F_1$ 中，
$$\cos\angle BF_2F_1=\frac{|BF_2|^2+4c^2-|BF_1|^2}{2\times 2c\times|BF_2|}$$
$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}\Rightarrow 4c\times|BF_2|\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k}$$
$$=|BF_2|^2+4c^2-|BF_1|^2 \tag{3}$$

在 $\triangle AF_2F_1$ 中，
$$\cos\angle AF_2F_1=\frac{|AF_2|^2+4c^2-|AF_1|^2}{2\times 2c\times|AF_2|}$$
$$=-\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k^2}\Rightarrow -4c\times|AF_2|\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k}$$
$$=|AF_2|^2+4c^2-|AF_1|^2 \tag{4}$$

由①、④及②、③得 $4|BF_2|\left(c\times\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k}+a\right)=4|AF_2|\left(a-c\times\frac{\sqrt{1+k^2}}{1+k}\right)$，又因为 $|\overrightarrow{AF_2}|=\lambda|\overrightarrow{F_2B}|$。

所以 $c\times\sqrt{1+k^2}(1+\lambda)=a\times(1+k^2)(\lambda-1)\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{(\lambda-1)\sqrt{1+k^2}}{1+\lambda}$ 定理获证。

类比双曲线中过焦点的弦求离心率的 4 种情况，同样可以得到在椭圆中过焦点的弦求离心率也相应有 4 种情况。

定理 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过右焦点 F_2 且斜率为 k 的直线与椭圆的右支相交于 A,B 两点，如图 1-14 或图 1-15 所示，若 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$。

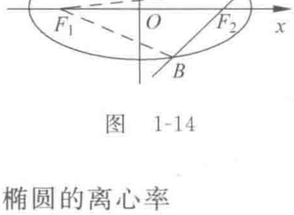

图 1-14

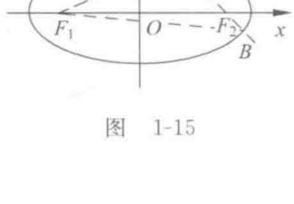

图 1-15

当 $k>0$ 时，椭圆的离心率

$$e=\frac{(1-\lambda)\sqrt{1+k^2}}{1+\lambda} \tag{1}$$

当 $k<0$ 时，椭圆的离心率

$$e=\frac{(\lambda-1)\sqrt{1+k^2}}{1+\lambda} \tag{2}$$

推论：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过右焦点$F_2$且斜率为$k$的直线交椭圆的左支于$A,B$两点，如图1-16或图1-17所示，若$\overrightarrow{AF_1}=\mu\overrightarrow{F_1B}$。

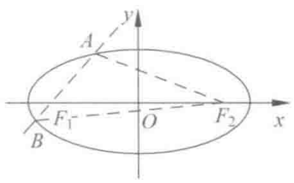

图　1-16

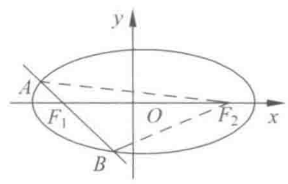

图　1-17

当$k>0$时，椭圆的离心率

$$e=\frac{(\mu-1)\sqrt{1+k^2}}{1+\mu} \tag{3}$$

当$k<0$时，椭圆的离心率

$$e=\frac{(1-\mu)\sqrt{1+k^2}}{1+\mu} \tag{4}$$

【例 13】　(2008年高考全国卷Ⅱ)设$a>1$，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$离心率$e$的取值范围是(　　)。

A. $(\sqrt{2},2)$　　B. $(\sqrt{2},\sqrt{5})$　　C. $(2,5)$　　D. $(2,\sqrt{5})$

解　$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{(a+1)^2+a^2}}{a}=\sqrt{2+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}$，这就是以$e$为函数值，$a$为自变量的函数，$e$的取值范围就转化为求此函数的值域。下面用换元法来求此函数的值域，设

$$\frac{1}{a}=t(0<t<1),\quad 则\ e^2=t^2+2t+2(0<t<1),$$

如图1-18所示，所以$2<e^2<5$，于是$\sqrt{2}<e<\sqrt{5}$，故选B。

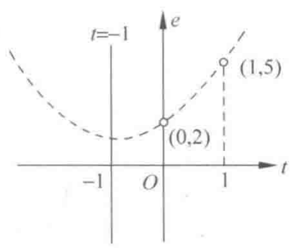

图　1-18

评注：通过对题目已知条件的分析，利用圆锥曲线的性质建立离心率e关于有关变量的函数关系。通过求函数值域得e的取值范围。

【例 14】　斜率为2的直线过中心在原点且焦点在x轴上的双曲线的右焦点，与双曲线的两个交点分别在左、右两支上，则双曲线离心率的取值范围是(　　)。

A. $e>\sqrt{2}$　　B. $1<e<\sqrt{3}$　　C. $1<e<\sqrt{5}$　　D. $e<\sqrt{5}$

解　设双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，右焦点为$F(c,0)$，直线$l$的方程式为$y=2(x-c)$。

由$\begin{cases}y=2(x-c)\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，得$(b^2-4a^2)x^2+8a^2cx-a^2(4c^2+b^2)=0$。

根据题意得$\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1\cdot x_2<0,\end{cases}$即$\begin{cases}64a^4c^2+4a^2(b^2-4a^2)(4c^2+b^2)>0\\ -\frac{a^2(4c^2+b^2)}{b^2-4a^2}<0,\end{cases}$　则$b^2-4a^2>0,c^2-5a^2>0,e>\sqrt{5}$，

故选D。

评注：将直线与双曲线方程联立后，判别式大于0，同时注意到$x_1x_2<0$。此题有一种很简洁的解法，即数形结合法，依题意得$\frac{b}{a}>2$，由此得$e>\sqrt{5}$。故选D。

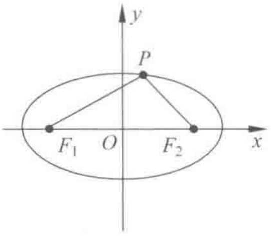

图 1-19

【例 15】 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点为$F_1$、$F_2$，椭圆上恒存在一点$P$，使$\angle F_1PF_2=120°$，求椭圆离心率$e$的取值范围。

解 设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，如图 1-19 所示，则在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得$4c^2=m^2+n^2-2mn\cos120°=(m+n)^2-2mn+mn=(m+n)^2-mn$，由椭圆的第一定义知，$m+n=2a$，于是$4a^2-4c^2=mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=a^2$，所以$3a^2\leqslant4c^2$，$e\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，即椭圆离心率$e\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$。

评注：解答本题的关键是利用均值不等式，寻找到a,b,c之间的不等关系式，从而获解。

【例 16】 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$。若双曲线上存在点$P$，使$\frac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\frac{a}{c}$，则该双曲线离心率的取值范围是________。

解 设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，如图 1-20，由正弦定理得

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2},$$

因为$\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=e$，

$$所以\frac{m}{n}=e,\quad 即\ m=en \tag{①}$$

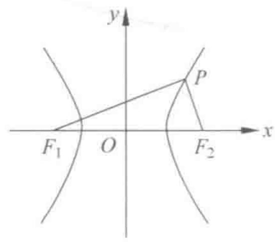

图 1-20

因为$e>1$，所以点P在双曲线的右支上，于是根据双曲线的第一定义得

$$m-n=2a \tag{②}$$

由①，②解得$m=\frac{2ae}{e-1}$，$n=\frac{2a}{e-1}$，因为$m+n\geqslant2c$，所以$\frac{2ae}{e-1}+\frac{2a}{e-1}\geqslant2c$，化简得$e^2-2e-1\leqslant0$，又$e>1$，所以$1<e\leqslant\sqrt{2}+1$，于是双曲线离心率的取值范围是$e\in(1,\sqrt{2}+1]$。

评注：根据三角形中恒有“两边之和大于第三边”这一简单性质，是建立的a、b、c之间不等关系式的关键。

【例 17】 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，若过点$F$且倾斜角为60°的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是(　　)。

A. (1,2)　　B. (1,2)　　C. [2,+∞)　　D. (2,+∞)

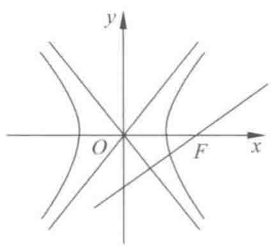

图 1-21

解 此题可以用代数方法求解，即将直线与双曲线方程联立，根据判别式就可以确定离心率的取值范围，但计算比较烦琐，因此考虑用几何方法，利用渐近线的几何特性，去求离心率的取值范围。

因为过点F且倾斜角为60°的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，如图 1-21 所示，所以渐近线$y=\frac{b}{a}x$的斜率不小于过点F且倾斜角为60°的直线的斜率，即$\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，解之得$e\geqslant2$，故选 C。

评注：渐近线控制着双曲线的形状，这与离心率控制着双曲线的形状有着异曲同工之妙，知道了这点，许多求双曲线离心率的取值范围的问题就可以利用渐近线的性质来很快且轻松地解决。

【例 18】 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(其中$a>b>0$)的两个焦点为$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$(其中$c>0$)，$M$为椭圆上一点，满足$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，求椭圆离心率$e$的取值范围。

解法 1：设点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{F_1M}=(x+c,y)$，$\overrightarrow{F_2M}=(x-c,y)$。由 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，得 $x^2-c^2+y^2=0$ 与椭圆方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 联立得 $c^2x^2+a^2b^2-a^2c^2=0$。

该方程必有根，故

$$\Delta=-4c^2(a^2b^2-a^2c^2)\geqslant 0$$

从而

$$b^2\leqslant c^2$$

于是

$$a^2\leqslant 2c^2$$

即

$$\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{1}{2}$$

故

$$\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$$

又因为 $0<e<1$，所以

$$e\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$$

评注：联立方程、消元、“Δ”、韦达定理是解决解析几何问题的固用套路。解法 1 由等式到不等式的转化，是由于点 M 的存在性，其对应方程有解，从而得到 $\Delta\geqslant 0$，由这一不等式关系求出 e 的范围。

解法 2：在解法 1 中，可知

$$y^2=c^2-x^2 \qquad ①$$

又点 M 在椭圆上，得

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad ②$$

由式①和式②，得

$$b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=c^2-x^2$$

即

$$x^2=a^2\left(2-\frac{a^2}{c^2}\right)$$

因为 $0\leqslant x^2\leqslant a^2$，所以

$$0\leqslant a^2\left(2-\frac{a^2}{c^2}\right)\leqslant a^2$$

即

$$0\leqslant 2-\frac{a^2}{c^2}\leqslant 1$$

故

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e\leqslant 1$$

又因为 $0<e<1$，所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$$

评注：代数问题的解决，关键是变形，变形中洞察力要强，解答题目发展的方向来源于变形中所带来的思维启发。

解法 3：设 $M(x_0,y_0)$，则

$$|MF_1|=a+ex_0,\quad |MF_2|=a-ex_0$$

因为 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，所以

$$\overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{F_2M},$$

从而

$$|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$$

即

$$2(a^2+e^2x_0^2)=4c^2$$

亦即

$$a^2+e^2x_0^2=2c^2$$

由题意：点 M 在椭圆上，但不在 x 轴上，从而