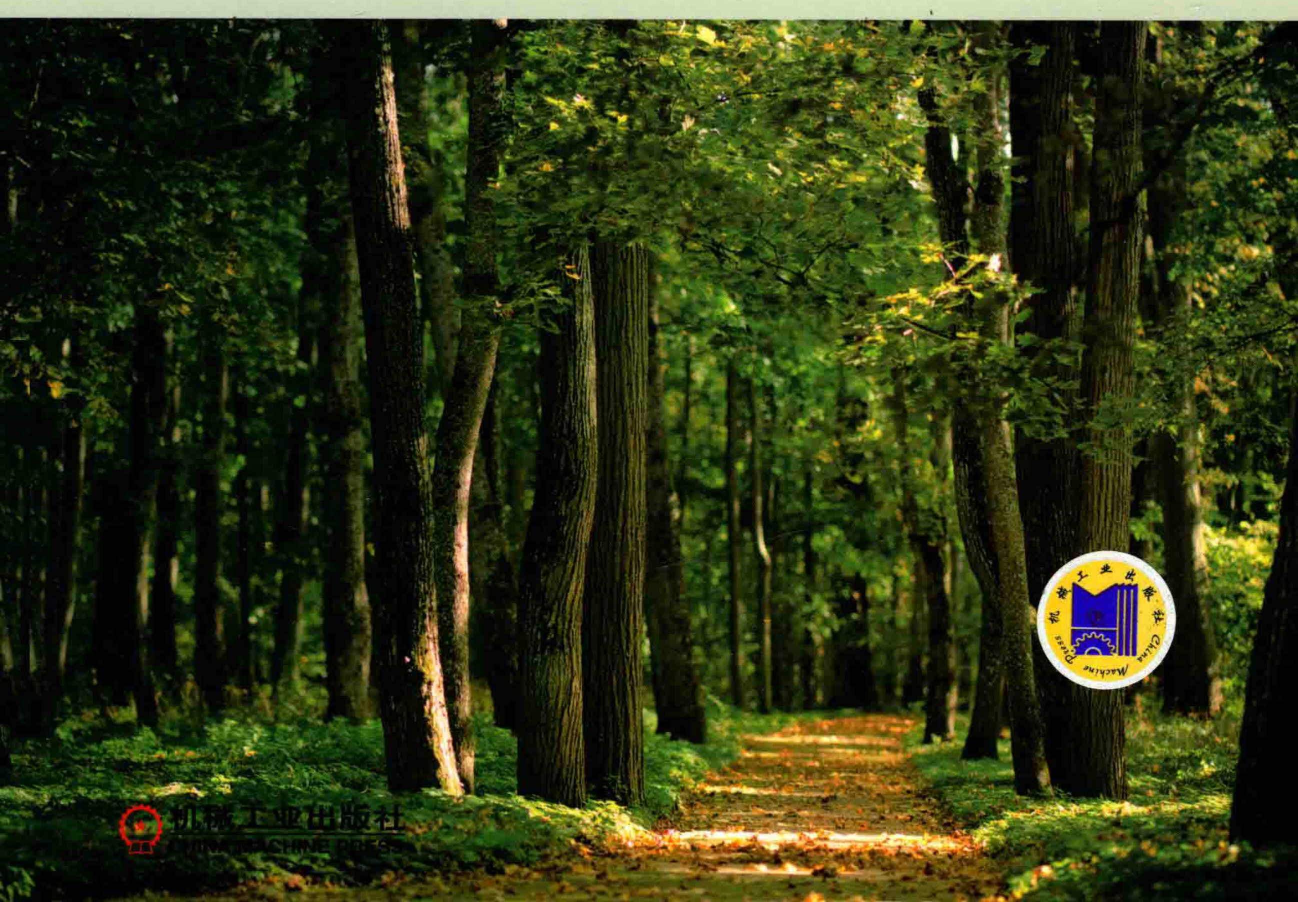
"十三五"国家重点出版物出版规划项目配套用书

高等数学例题与习题集

第2版

张汉林　范周田　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十三五"国家重点出版物出版规划项目配套用书

高等数学例题与习题集

第2版

主　编　张汉林　范周田

参　编　田　鑫　胡京兴　彭　娟　张真宁

机械工业出版社

本书是与主教材《高等数学教程》（上、下册，第3版，范周田、张汉林编著，机械工业出版社出版）配套的教学辅导书，集知识点总结、要点提示、例题演示、练习册、习题集于一体．全书十二章既是一个整体又相互独立，可以分为十二个独立的练习册来使用．

书中精选例题568道，练习题428道，是学习高等数学必要的工具书．书中的第六章和第十二章的例题分别为一元微积分的综合例题和整个微积分的综合例题，习题则是近年的考研题或竞赛题．除第六章、第十二章外，每一章的第一部分和第二部分均给出了所在章节的主要内容和教学要求及要点提示，可以使读者方便地了解相关的重点及高等数学教学大纲的要求；第三部分是精选例题，读者可以从中学习典型的解题思想与基本技巧；第四部分是练习册，读者可以直接在书上完成练习；第五部分是更多的习题．其中后两部分的习题总量可以满足学习高等数学所必需的练习要求．

本书的主要内容与主教材同步，在极限证明、微分方程解法、曲线和曲面积分计算等方面均采用了更简明的方法．

本书可作为高等院校理工科类各专业学生的教学辅导书，也可作为自学、考研的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学例题与习题集/张汉林，范周田主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2018.8

“十三五”国家重点出版物出版规划项目配套用书

ISBN 978-7-111-60038-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②范… Ⅲ.①高等数学-高等学校-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第150174号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 张 超
责任校对：肖 琳 樊钟英 封面设计：鞠 杨
责任印制：张 博
三河市宏达印刷有限公司印刷
2018年8月第2版第1次印刷
184mm×260mm·22.5印张·555千字
标准书号：ISBN 978-7-111-60038-1
定价：53.50元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

第2版前言

本书与主教材《高等数学教程》上、下册，第3版，范周田、张汉林编著，机械工业出版社出版）配套，构成了一个完整的教材体系.

高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，但更重要的是其思想性. 因此，在高等数学的教学与学习中，更为重要的是思想方法的训练与培养，而达成这一目标的最有效的途径就是不断练习，没有一定量的练习就不可能学好高等数学. 为学生们提供一整套的参考与训练材料使之能够顺利掌握高等数学的知识与思想是本书的立意所在.

本书是在上一版的基础上修订而成的. 参加本次修订的有张汉林、范周田、田鑫、胡京兴、彭娟、张真宁等，其中第一章极限与连续、第二章导数与微分、第三章中值定理与导数应用由田鑫副教授修订；第四章不定积分、第五章定积分及其应用由彭娟博士修订；第七章常微分方程、第八章无穷级数由张汉林教授修订；第九章多元函数微分学、第十章重积分、第十一章曲线积分与曲面积分由胡京兴副教授修订；第六章一元微积分综合例题、第十二章综合例题由张真宁博士修订. 全书统稿由张汉林教授和范周田教授完成.

本书集知识点总结、要点提示、例题演示、练习册、习题集于一体. 在本次修订中，除了对原有内容进行订正外，最大变化是增加了练习册部分. 全书十二章既是一个整体又相互独立，可以分为十二个独立的练习册来使用.

除第六章、第十二章外，书中各章具有完全类似的结构：第一部分和第二部分均给出了所在章节的主要内容和教学要求以及要点提示，可以使读者方便地了解相关的重点及高等数学教学大纲的要求；第三部分是精选例题，读者可以从中学习典型的解题思想与基本技巧；第四部分是练习册，读者可以直接在书上完成练习；第五部分是更多的习题. 其中后两部分的习题总量可以满足学习高等数学所必需的练习要求.

在本书的使用过程中，请读者注意以下两点：

1. 书中以无穷小及其比较定理为核心从正面诠释极限理论，较之传统的证明更为简单，有助于更好地接受和理解极限理论.

2. 部分内容的例题，如二阶常系数线性微分方程的解法和第二型曲线、曲面积分的计算等，采用了相对简单一些的计算方法.

除了方法简单一些之外，本书的知识体系与同类书籍完全相同.

本书在内容的编排上，首先满足高等数学教学大纲的要求，强调基本概念的理解和基本技巧的掌握. 同时，为了适应优秀学生考研、竞赛的需求，在例题和习题中适当加入了相关重点内容. 本书适合高等院校理工科类各专业学生使用，也可作为自学、考研的参考书.

由于编者水平和时间有限，对书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2018年春

第 1 版前言

本书是和范周田、张汉林编著的主教材《高等数学教程》(上、下册) 配套的教学辅导书，与主教材构成一个完整的教材体系.

高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，但更重要的是其思想性. 因此，在高等数学的教学过程中，尤其重要的是思想方法的训练与培养. 为学习者提供一整套的参考与训练材料使之能够顺利掌握高等数学的知识与思想是本书的立意所在.

本书有以下特点：

1. 书中以无穷小及其比较定理为核心从正面诠释极限理论，较之传统的证明更为简单，有助于读者更好地接受和理解极限理论.

2. 部分内容的例题，如二阶常系数线性微分方程的解法和第二型曲面积分的计算等，采用了相对简单一些的计算方法.

本书各章具有完全类似的结构：第一部分是“本章的主要内容和教学要求”，可以使读者方便地了解高等数学教学大纲的要求；第二部分是精选的“例题”，读者可以从中学习典型的解题思想与基本技巧；第三部分是选编的“练习题”，题量可以满足学习高等数学所必需的练习要求. 事实上，没有一定量的实际练习就不可能学好高等数学.

参加本书编写的有范周田、张汉林、张方、丁津、田鑫、杨晓华、李贵斌、胡京兴.

本书在内容的编排上首先满足高等数学教学大纲的要求，强调基本概念的理解和基本技巧的掌握，同时，为了适应优秀学生考研或竞赛的需求，在例题和习题中适当加入了相关重点内容. 本书适合高等院校理工科类专业学生使用，也可作为自学或考研的参考书.

由于编者水平和时间有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第一章　极限与连续

一、本章主要内容及教学要求

主要内容　函数的定义，函数的基本性质，基本初等函数，复合函数，反函数，初等函数，数列极限的 ε-N 定义，数列收敛的条件，函数极限的 ε-X 定义，函数极限的 ε-δ 定义，函数的左右极限，极限的四则运算，两个极限存在准则，两个重要极限，无穷小与无穷大的定义，无穷小与函数极限的关系，无穷小的比较，函数连续的定义，间断点，连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，闭区间上连续函数的最大值、最小值定理及介值定理.

基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.
6. 理解极限的概念（对极限的 ε-N、ε-δ 定义可在学习过程中逐步加以理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不做过高要求）.
7. 掌握极限四则运算法则.
8. 了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限.
9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念. 会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数在一点连续的概念.
11. 了解间断点的概念，并会判断间断点的类型.
12. 了解连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，及闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大最小值定理).

重点　函数的概念、数列极限的 ε-N 定义、函数极限的 ε-δ 定义、无穷小、极限的四则运算、函数的连续性.

难点　抽象函数符号的使用，复合函数的分解，分段函数，数列极限的 ε-N 定义，函数极限的 ε-δ 定义.

深度和广度　中学学过的有关函数的内容只需加以复习提高，不必再做详细讲解. 但对于函数符号 $f(x)$ 的意义和用法、复合函数的分解应有足够的说明和训练，还应当介绍分段函数，举例说明建立函数式的方法. 对某些函数要求对给定的 ε 会求 N 或 δ，不定式求极限的训练主要放在洛必达法则中进行；对第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，只需证明 x 为正整

数的情况；基本初等函数的连续性可不全证；对于连续函数在闭区间上的性质，只要求作几何说明.

二、要点提示

1. 三个基本无穷小：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$

2. 无穷小比较定理：

设$\lim f(x)=0$，A 为常数. 如果$|g(x)-A|\leqslant C|f(x)|$，则$\lim g(x)=A$，其中 C 为常数.

3. 极限四则运算法则　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$　$(B\neq 0)$

4. 极限存在准则与两个重要极限：

准则Ⅰ（夹逼定理）　设$f(x)$、$h(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0的某空心邻域内有定义，且满足以下条件：

（1）$\exists\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

5. 连续性与间断点的分类：

初等函数在定义区间内连续.

设$f(x)$ 在 x_0点间断. 如果$f(x)$ 在 x_0处的左、右极限都存在且相等，则 x_0为$f(x)$ 的**可去间断点**；如果$f(x)$ 在 x_0处的左、右极限都存在但不相等，则 x_0为$f(x)$ 的**跳跃间断点**；其他间断点都是**第二类间断点**.

6. 闭区间上连续函数的性质

如果$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值，而且$f(x)$ 可以取到其最大值与最小值之间的一切值.

三、例题

例 1.1　设 $u_n=\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明　因为

$$|u_n|=\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right|=\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}\leqslant\frac{1}{n}$$

而$\dfrac{1}{n}\to0$　$(n\to\infty)$，由无穷小比较定理有 $u_n\to0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

例 1.2　证明：$\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$.

证明

$|x^2-4|=|x+2|\,|x-2|$，因为 $x\to2$，不妨设 $|x-2|<1$，从而有 $|x+2|<3$，进而有

$$|x^2-4|=|x+2|\,|x-2|<3|x-2|$$

由无穷小比较定理有

$$\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$$

例 1.3　求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}=\dfrac{4}{3}$.

证明

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{9n^2+6}<\frac{9}{9n}=\frac{1}{n}$$

而$\dfrac{1}{n}$是无穷小，由无穷小比较定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}$$

例 1.4　求证：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{5x^3}=\dfrac{1}{5}$.

证明　$\left|\dfrac{1+x^3}{5x^3}-\dfrac{1}{5}\right|=\dfrac{1}{5\cdot|x|^3}$

而$\dfrac{1}{|x^3|}\to0$，由无穷小比较定理，有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1+x^3}{5x^3}-\frac{1}{5}\right|=0，即$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}$$

例 1.5　用定义证明：$\lim\limits_{x\to2}x^3=8$.

证明　因 $x\to 2$，故只考虑 $x=2$ 附近的值，不妨设 $1<x<3$. 于是

$$|x^3-8|=|x-2|\cdot|x^2+2x+4|<19|x-2|$$

由无穷小比较定理，有 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)=0$，即

$$\lim_{x\to 2}x^3=8$$

例 1.6　求证：$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2}{x+4}=1$.

证明　因 $x\to -2$，故只考虑 $x=-2$ 附近的值，

可设 $|x+2|<1$，即 $-3<x<-1$，且 $|x+4|>1$.

因为

$$\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|=\left|\frac{x^2-x-6}{x+4}\right|<|x^2-x-6|$$

$$=|x+2|\,|x-3|=|x+2|\,|x+2-5|<6|x+2|$$

由 $x+2$ 是无穷小及无穷小比较定理，有

$$\lim_{x\to -2}\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|=0$$

即

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2}{x+4}=1$$

例 1.7　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

解　设 $S_n=\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$，

当 $n=2k-1(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的奇项组成的子列：

$$S_{2k-1}=\left|\frac{1}{2k-1}-\frac{2}{2k-1}+\cdots+\frac{2k-3}{2k-1}-\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-1}\right|=\frac{k}{2k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\frac{1}{2}$$

当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的偶项组成的子列：

$$S_{2k}=\left|\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\cdots+\frac{2k-1}{2k}-\frac{2k}{2k}\right|=\left|\frac{-k}{2k}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\frac{1}{2}$$

例 1.8　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n}=+\infty\quad(a>1)$.

证明　令 $a=1+b\quad(b>0)$，则

$$a^n=(1+b)^n=1+nb+\frac{n(n-1)}{2}b^2+\cdots+b^n>\frac{n(n-1)}{2}b^2$$

因此，有

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)b^2}$$

由于$\frac{1}{n-1}$是无穷小，再由无穷小比较定理，有$\frac{n}{a^2}\to 0^+$ $(n\to\infty)$，从而有$\frac{a^n}{n}\to+\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$$

注　本题也可以用无穷大定义证明.

例 1.9　(1) 若 x_n 收敛，y_n 发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何?

(2) 若 x_n 和 y_n 均发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何?

答　(1) x_n+y_n 发散.

若不然，设 $z_n=x_n+y_n$，若 z_n 收敛，则 $y_n=z_n-x_n$，由例 1.4，两收敛数列之差 y_n 应该收敛，与题设矛盾.

$x_n\cdot y_n$ 可能收敛，也可能发散.

收敛的例子：$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$

发散的例子：$x_n=\frac{n}{n+1}$，$y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 2 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$

(2) x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 可能都收敛，也可能都发散.

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都收敛的例子：

$$x_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ -1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}-1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都发散的例子：

$$x_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ -1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}1 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

例 1.10　如果一个数列的两个子数列有相同的极限，原数列是否收敛？请举例说明.

答　不一定，例如，$x_n=\begin{cases}2 & (n=3k+1)\\ \frac{n}{n+1} & (n=3k+2)\\ \frac{n-1}{n+2} & (n=3k+3)\end{cases}$，$k=0,1,2,\cdots$

由 2，5，8，…，$3k+2$，…诸项构成的子数列极限是 1；

由 3，6，9，…，$3k+3$，…诸项构成的子数列极限也是 1，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 发散.

例 1.11　若 x_n 和 y_n 都收敛，且 $x_n>y_n$，是否一定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$?

答　不一定，例如：$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\frac{1}{2n}$，则有 $x_n>y_n$，但是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

例 1.12　在 $x=-1$ 处，研究函数$f(x)=\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$的左、右极限.

解　注意到 $\lim\limits_{x\to-1-0}[x]=-2$，$\lim\limits_{x\to-1+0}[x]=-1$，所以

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{(-1)^{-2}}{x+1}=-\infty$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{(-1)^{-1}}{x+1}=-\infty$$

因此，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$.

例 1.13 求$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 对任意实数 t，都有 $t=[t]+\{t\}$，

其中$\{t\}$表示 t 的小数部分，$0\leqslant\{t\}<1$. 据此，

$$\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}\right]+\left\{\frac{1}{x}\right\},\ 即\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}$$

所以

$$\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}x\cdot\left(\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=\lim_{x\to0}\left(1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=1$$

其中，$\lim\limits_{x\to0}x\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=0$ 是因为当 $x\to0$ 时，无穷小 x 与有界变量$\left\{\dfrac{1}{x}\right\}$的乘积还是无穷小.

例 1.14 讨论函数$f(x)=(e^{\frac{1}{x^2}}-1)(2-\cos x)$在$(-\infty,-2]$的有界性.

解 因$|2-\cos x|\leqslant3$ 有界，且$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{\frac{1}{x^2}}-1)=0$，

即 $e^{\frac{1}{x^2}}-1$ 是 $x\to-\infty$ 时的无穷小，根据无穷小的性质，有$f(x)$在$(-\infty,-X]$上有界($X<-2$).

又因为$f(x)$在$[-X,-2]$上是连续函数，一定有界，所以$f(x)$在$(-\infty,-2]$上有界.

例 1.15(1) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$与$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$一定存在吗?

答 因$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}[(f(x)+g(x))-f(x)]$，由极限的运算性质，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$一定存在.

(2) 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$与$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$一定存在吗?

答 不一定存在，例如，$f(x)=x$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$a=0$.

例 1.16 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

解 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k(k+1)}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}S_n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

例 1.17 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=1$

例 1.18　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)-n(n+1)}{2(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

例 1.19　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}{n^3}=\dfrac{1}{3}$

例 1.20　计算$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}$.

解　该有理分式的分子、分母展开后都是多项式，最高次数相同，都是50，该极限等于最高次项的系数之比，故
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{3^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

例 1.21　计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$.

解　分子、分母同时除以$\sqrt{x}$，原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{1}=1.$

例 1.22　计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[e^{3x}\left(1+\frac{2}{e^{3x}}\right)\right]}{\ln\left[e^{2x}\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)\right]}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(1+\frac{2}{e^{3x}}\right)}{\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{3}{e^{2x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

例 1.23　计算$\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)[4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)[4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]}$

$$= \lim_{x\to -8}\frac{-(x+8)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$= -\lim_{x\to -8}\frac{4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{1-x}+3} = -2$$

例 1.24 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a 和 b.

解 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right]=0$$

可知，$\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}$的分子中，二次项系数必须为0，

否则，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right]=\infty$.

由此得，$1-a=0$，即 $a=1$.

将 $a=1$ 代入$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，

有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)=0$，故

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1$$

例 1.25 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，其中 $|x|<1$.

解 因

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\ &= \frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots\\ &= \frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\end{aligned}$$

注意到 $|x|<1$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

例 1.26 当 $x\to 0$ 时，研究函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\tan\dfrac{1}{x}$的极限.

解 若取点列 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\cdot\tan n\pi=0$，

又取点列 $x_n'=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}\to 0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=+\infty$$

因此，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限不存在，且$f(x)$不是无穷大.

例 1.27 根据单调有界数列极限存在原理，研究数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}$（$n$ 层根号）的极限.

解 由 x_n 的定义可知，$x_{n+1}>x_n>\cdots>x_1=\sqrt{3}(n=2,3,\cdots)$，
即 x_n 单调递增；

再由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，即 $x_{n+1}=\dfrac{3}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}}=\sqrt{3}+1$ 可知，数列 x_n 有上界（当 $n=1$ 时，$x_1<\sqrt{3}+1$ 也成立）.

故数列 x_n 收敛，可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

对 $x_{n+1}^2=3+x_n$ 两端取极限，得 $A^2=3+A$，注意到 $x_n>0$，进而 $A>0$，解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

例 1.28 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n}$.

解 由 $nx-1<[nx]\leqslant nx$，有 $x-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[xn]}{n}\leqslant x$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}x=x$，由极限存在准则 1′（夹逼定理），得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[nx]}{n}=x$$

例 1.29 根据单调有界数列极限存在原理，研究数列

$$x_n=\frac{9}{1}\cdot\frac{10}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+8}{3n-2}$$

的极限.

解 由 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$ 可知，当 $n>4$ 时，$x_{n+1}<x_n$，数列 x_n 单调递减；

又 $x_n>0$，数列 x_n 有下界，根据单调有界数列必有极限原理，数列 x_n 收敛.

可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$ 的两端取极限，得 $A=A\cdot\dfrac{1}{3}$，解得 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.30 计算 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot\frac{-2x}{1}\cdot\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{-4}$.

例 1.31 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1+4}{2x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{4}\cdot\frac{4}{2x+1}\cdot x}=\mathrm{e}^2$

例 1.32 设有函数 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & (x<-1)\\ 1/x & (x\geqslant-1)\end{cases}$，

(1) 试述函数的定义域;

(2) 求函数的间断点，并确定间断点的类型;

(3) 写出这个函数的连续区间.

解 (1) 除 $x=0$ 外，$f(x)$处处有定义，

函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

$x=0$ 是$f(x)$的无穷间断点.

在 $x=-1$ 处，

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(2x+5)=3$$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x}=-1$$

因 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$都存在，但 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$，所以 $x=-1$ 是跳跃间断点.

(3) 函数的连续区间为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

例 1.33 指出函数$f(x)=\begin{cases}x & (|x|\leqslant 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$的连续区间，如果有间断点，指出间断点的类型.

解 显然，$f(x)$在 $x\neq\pm 1$ 时连续.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1$,

所以 $x=-1$ 是$f(x)$的跳跃间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$，$f(1)=1$，所以 $x=1$ 是$f(x)$的连续点.

于是，$f(x)$的连续区间是$(-\infty,-1)$及$[-1,+\infty)$.

例 1.34 设 $a>0$，$b>0$，试证方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

证明 作函数$f(x)=x-a\sin x-b$，则$f(x)$在区间$[0,a+b]$上连续.

$$f(0)=-b<0,\ f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$$

若$f(a+b)=0$，则 $a+b$ 就是方程的根;

若$f(a+b)>0$，由闭区间上连续函数的零点定理，至少存在一点$\xi\in(0,a+b)$，使$f(\xi)=0$，此时，ξ 就是满足要求的方程的根.

例 1.35 证明方程 $2^x-x^2=1$ 的实根个数不少于 3 个.

证明 设$f(x)=2^x-x^2-1$，显然，$f(0)=f(1)=0$,

即 $x=0$，$x=1$ 是方程的两个根. 又$f(x)$在$[4,5]$上连续，且$f(4)=-1<0$，$f(5)=6>0$，由零点定理，存在$\xi\in(4,5)$，使$f(\xi)=0$，所以ξ 是方程的第三个根.

例 1.36 设函数 $f(x)\in(1,2)$，$1<k_1<k_2<k_3<2$，试证：至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{3}[f(k_1)+f(k_2)+f(k_3)]$$

证明 设

$$f(k_i)=\min\{f(k_1),f(k_2),f(k_3)\}$$