工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21世纪高等学校规划教材

高等数学
（下）

颜超 陆海霞 ◎ 主编
刘艳 杜秀清 周海青 ◎ 副主编

突出知识重点　凝练核心内容
甄选例题习题　激发学习兴趣
紧贴实际应用　注重创新教育

中国工信出版集团　人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目
21世纪高等学校规划教材

高等数学

（下）

颜超 陆海霞 ◎ 主编
刘艳 杜秀清 周海青 ◎ 副主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下 / 颜超，陆海霞主编．-- 北京 ：人民邮电出版社，2018.2
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-47808-5

Ⅰ．①高… Ⅱ．①颜… ②陆… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第028138号

内容提要

本书是编者在面向 21 世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”编写而成的。

本套教材分为上、下两册．本书为下册，含微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。

本书可作为高等学校非数学专业“高等数学”课程的教材，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

◆ 主　　编　颜　超　陆海霞
副 主 编　刘　艳　杜秀清　周海青
责任编辑　李　召
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京市艺辉印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13　　　　　　2018 年 2 月第 1 版
字数：301 千字　　　2018 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：39.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言　Preface

本套教材分为上、下两册. 上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等内容. 下册包括微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容. 每节和章末均配有习题.

本套教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用. 针对应用型本科专业学生的特点，本套教材在编写过程中尽量做到直观地阐述微积分中的基本概念、基本运算，尽量结合实际问题给出相应的例题，同时也为学生运用微积分的基本知识进行数学建模给出范例，考虑到微积分基本知识点对理工科和经济管理学科来说是相同的，只是在应用举例上侧重点不同. 因此，在编写本书时不分理工或经济管理，而是统一起来编写，在举例中既有理工类的例子，也有经济管理类的例子. 这样，可以让学理工的学生了解一些微积分在经济学中的应用，让学经济管理的学生了解一些微积分在自然学科中的应用，对他们来说应该是大有裨益的.

为适应分层次教学的需要，选修内容用 * 号标出. 本套教材中的概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题均经过精选，具有代表性和启发性，课后习题分为两组，其中 A 组为基础题，B 组题目供学有余力的同学加深理解，开拓思维.

本书由颜超副教授、陆海霞讲师主编，其中第 7 章由周海青副教授编写. 第 8 章、第 9 章由杜秀清副教授编写，第 10 章由刘艳老师编写，第 11 章由颜超副教授编写，第 12 章由陆海霞讲师编写，全书由滕加俊教授统稿. 本书的编写得到了南京工业大学浦江学院自编教材项目的支持，在编写过程中也得到了其他教师同仁们的大力帮助，在此一并表示感谢！ 由于水平所限，书中难免存在不足，我们恳切地希望各位读者能够提出宝贵意见，以期在再版时得到进一步完善.

编　者

2018 年 1 月

目 录 Contents

第 9 章 多元函数微分学

第 10 章 多重积分

第 11 章　曲线积分与曲面积分

第 12 章　无穷级数

参考文献

微分方程　第 7 章

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究. 因此如何寻找出所需要的函数关系，在实践中具有重要意义. 为了深入研究几何、物理、经济等许多实际问题，常常需要寻求问题中有关变量之间的函数关系. 而在许多问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，但是根据问题所提供的情况，有时可以列出含有要找的函数的导数的关系式，这样的关系式就是所谓的微分方程. 微分方程在自然科学、工程技术和经济学等领域中有着广泛的应用. 微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数来，这就是解微分方程. 本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法及差分方程.

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 引例

通过例题来说明微分方程的一些基本概念.

例 1 已知一曲线通过点(1，2)，且在该曲线上任一点 $M(x, y)$处的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$. 由题意，可知未知函数 $y=f(x)$应满足关系式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x & (1) \\ y\,|_{x=1}=2 & (2) \end{cases}$$

把式(1)两端积分，得

$$y=\int 2x\,\mathrm{d}x.$$

即

$$y=x^2+C, \tag{3}$$

其中 C 是任意常数.

把条件“$x=1$ 时，$y=2$”代入式(3)，得

$$2=1^2+C.$$

由此定出 $C=1$. 把 $C=1$ 代入式(3)，得所求曲线方程为

$$y=x^2+1.$$

例 2 列车在平直道路上以 20m/s(相当于 72km/h)的速度行驶，当制动时列车获得加速度$-0.4\ \mathrm{m/s^2}$. 问开始制动后需要多长时间列车才能停住，以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解 设列车的行驶速度为 v，开始制动后在时间 t 时行驶了路程 s. 根据题意，反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 \tag{4}$$

$$\begin{cases} v\Big|_{t=0}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 \\ S\,\Big|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{5}$$

把式(4)两端积分一次，得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1. \tag{6}$$

把式(6)两端再积分一次，得

$$s=-0.2t^2+C_1t+C_2. \tag{7}$$

这里 C_1、C_2 都是任意常数.

把条件 $v\big|_{t=0}=20$ 代入式(6)，得 $C_1=20$. 把条件 $s\big|_{t=0}=0$ 代入式(7)，得 $C_2=0$. 把 C_1、C_2 的值代入式(6)及式(7)，得

$$v=-0.4t+20. \tag{8}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{9}$$

在式(8)中令 $v=0$，得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\mathrm{s}),$$

再把 $t=50$ 代入式(9)，得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(\mathrm{m}).$$

7.1.2 微分方程的一般概念

上述两例的方程都含有未知函数的导数，因此，我们得到下列相关的定义.

微分方程：一般地，含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

常微分方程：若微分方程中未知函数为一元函数，则称此微分方程为常微分方程.

偏微分方程：若微分方程中未知函数是多元函数，则称此微分方程为偏微分方程.

微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫作微分方程的阶.

例如，$x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 为三阶，$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=2x$ 为四阶，$y^{(n)}+1=0$ 为 n 阶. 由于我们仅研究常微分方程，因此，将常微分方程简称为**微分方程**，有时简称为**方程**.

例如，下面方程都是微分方程(其中 y、v、θ 均为未知函数).

①$y'=kx$，k 为常数；

②$(y-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$；

③$mv'(t)=mg-kv(t)$；

④$y^n=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$；

⑤$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$（$g$、$l$ 为常数）.

例如，方程①—③为一阶微分方程，方程④—⑤为二阶微分方程.

一般 n 阶微分方程可用以下形式表示：

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数；$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 是已知函数，而且一定含有 $y^{(n)}$.

微分方程的解：代入微分方程能使该方程成为恒等式的函数叫作该微分方程的解. 确切地说，设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数，如果在区间 I 上，$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)]=0$，那么函数 $y=\varphi(x)$ 就叫作微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解.

不难验证，函数 $y=x^2$、$y=x^2+1$ 及 $y=x^2+C$（C 为任意常数）都是方程 $y'=2x$ 的解.

若微分方程的解中所含独立的（不能合并的）任意常数的个数与方程的阶数相同，则称这样的解为该**微分方程的通解**.

若在微分方程的通解中的任意常数取定一组固定常数，则得到的解称为该**微分方程的特解**. 例如，方程 $y'=2x$ 的解 $y=x^2+C$ 中含有一个任意常数且与该方程的阶数相同，因此，这个解是方程的通解；如果求满足条件 $y(0)=0$ 的解，代入通解 $y=x^2+C$ 中，得 $C=0$，那么 $y=x^2$ 就是微分方程 $y'=2x$ 的特解. 能够从通解中确定特解的条件称为该微分方程的**初始(值)条件**. 通常，一阶微分方程的初始条件是

$$y|_{x=x_0}=y_0，即\ y(x_0)=y_0$$

由此可以确定通解中的一个任意常数；二阶微分方程的初始条件是

$y|_{x=x_0}=y_0$ 及 $y'|_{x=x_0}=y'_0$，即 $y(x_0)=y_0$ 与 $y'(x_0)=y'_0$，由此可以确定通解中的两个任意常数.

一个微分方程与其初始条件构成的问题称为**初值问题**. 求解某初值问题，就是求方程的特解.

例 3 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 是方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=3$、$y'|_{x=0}=0$ 特解.

解 由 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 得

$$y'=C_1\mathrm{e}^x-2C_2\mathrm{e}^{-2x},$$

$$y''=C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x},$$

将 y' 与 y'' 代入原方程的左边，有

$$(C_1\mathrm{e}^x+4C_2\mathrm{e}^{-2x})+(C_1\mathrm{e}^x-2C_2\mathrm{e}^{-2x})-2(C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x})=0$$

因此，函数 y 是原方程的解，又函数 y 中任意常数的个数为 2，等于方程的阶数，所以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ 是方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解.

将初始条件 $y|_{x=0}=3$ 代入 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$，得

$$C_1+C_2=3 \tag{10}$$

将初始条件 $y'|_{x=0}=0$ 代入 $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$，得

$$C_1-2C_2=0 \tag{11}$$

由式(10)和式(11)解得 $C_1=2$，$C_2=1$，故所求特解为 $y=2e^x+e^{-2x}$.

习题 7.1

A 组

1. 指出下列微分方程的阶数.

(1) $x\,dx+y^2\,dy=0$；

(2) $-d\rho=\dfrac{2\rho}{100+\theta}d\theta$；

(3) $y''+8y'=4x^2+1$；

(4) $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2-y^4=e^x$；

(5) $(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$；

(6) $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=0$.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy'=2y$，$y=5x^2$；

(2) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=C$；

(3) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2e^x$；

(4) $y''=1+y'^2$，$y=\ln\sec(x+1)$.

3. 验证 $y=Cx^3$ 是方程 $3y-xy'=0$ 的通解(C 为任意常数)，并求满足初始条件 $y(1)=\dfrac{1}{3}$ 的特解.

4. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

(1)曲线在点(x, y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2)曲线上点 $P(x, y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分.

B 组

1. 验证下列各函数是否为所给微分方程的解，若是，试指出是通解还是特解(其中 C_1、C_2 均为任意常数).

(1) $y''+y=e^x$，$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{1}{2}e^x$；

(2) $y''-2y'+y=0$，$y=e^x+e^{-x}$.

2. 在下列各题给出的微分方程的通解中，按照所给的初值条件确定特解.

(1) $x^2-y^2=C$，$y|_{x=0}=5$

(2) $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y|_{x=\pi}=1$，$y'|_{x=\pi}=0$

3. 验证 $e^y+C_1=(x+C_2)^2$ 是方程 $y''+y'^2=2e^{-y}$ 的通解(C_1、C_2 为任意常数)，并求满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

7.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x, y, y')=0, \text{其中 } y'=\frac{dy}{dx}.$$

在本节中，我们着重讨论几个简单形式的一阶微分方程的解法.

7.2.1 可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

的方程称为**可分离变量的微分方程**.

一个一阶微分方程能写成 $g(y)dy=f(x)dx$ 的形式，也就是说，能把微分方程写成一端只含有 y 和 dy，另一端只含有 x 和 dx，那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

例如，微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 可以写成 $\frac{dy}{y}=2x\,dx$，所以微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 为可分离变量的微分方程.

解法 因为方程中的变量完全地分离到等式两边，所以对于这样的方程，可以两边同时积分，右边对变量 x 积分，左边对 y 积分，即

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx,$$

$$G(y)=F(x)+C.$$

其中 $F(x)$、$G(y)$ 分别为 $f(x)$、$g(y)$ 的原函数.

即只含变量 x、y 而不含导数(或微分)的等式，就是方程的解.

例 1 求微分方程 $y'=2xy$ 的通解.

解 原方程可化为,

$$\frac{dy}{dx}=2xy.$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx.$$

两端分别积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\,\mathrm{d}x.$$

即

$$\ln|y|=x^2+C_1.$$

从而

$$y=\pm \mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}=C\mathrm{e}^{x^2}(\text{其中}\pm \mathrm{e}^{C_1}=C).$$

故原方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}.$$

例 2 求方程 $yy'+\mathrm{e}^{y^2+2x}=0$ 的通解.

解 将方程整理得

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{e}^{2x}.$$

分离变量，得

$$y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1$$

故得通解为

$$\mathrm{e}^{-y^2}=\mathrm{e}^{2x}+C(\text{其中 }C=-2C_1).$$

例 3 求方程 $\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 满足初始条件 $y(0)=2$ 的特解.

解 将方程整理得

$$y(x-1)\mathrm{d}y=(y^2-1)\mathrm{d}x.$$

分离变量，得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x-1}.$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln C.$$

化简，得

$$y^2-1=C(x-1)^2.$$

将初始条件 $y(0)=2$ 代入，得 $C=3$. 故所求特解为

$$y^2=3(x-1)^2+1.$$

例 4 放射性元素铀由于原子不断地放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫作衰变. 由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量 M 成正比. 已知时间 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀的含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解 因为铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$，由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M, (其中\ \lambda>0)\\ M|_{t=0}=M_0,\end{cases}$$

将$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M$ 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda\,\mathrm{d}t,$$

两端分别积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=\int(-\lambda)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\ln M=-\lambda t+\ln C(以\ \ln C\ 表示任意常数),$$

故

$$M=C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

又由$M|_{t=0}=M_0$ 得 $C=M_0$，从而所求变化规律为

$$M=M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

7.2.2 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程，称为**齐次方程**.

例如，判断下列方程是不是齐次方程.

(1)$xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$

$\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$，是齐次方程.

(2)$\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$，不是齐次方程.

解法 引进新的函数 $u=\dfrac{y}{x}$，$y=ux$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入原方程，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u,$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

求出积分后，再用$\dfrac{y}{x}$代替u，便得所给齐次方程的通解.

例 5　求微分方程 $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$的通解.

解　原方程可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1},$$

这是齐次方程. 令$\dfrac{y}{x}=u$，则

$$y=xu$$
$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入上列方程，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}-u=\frac{u}{u-1},$$

分离变量，得

$$(1-\frac{1}{u})du=\frac{1}{x}dx,$$

两边积分，得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

或写成

$$\ln|xu|=u-C_1,$$

以 $u=\dfrac{y}{x}$代入，得

$$\ln|y|=\frac{y}{x}-C_1,$$

或

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}(C=\pm e^{-C_1}).$$

例 6　求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=y(1+\ln y-\ln x)$满足初始条件$y|_{x=1}=1$ 的特解.

解　原方程可变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x}).$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入方程得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u(1+\ln u),$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分，得

$$\ln|\ln u|=\ln|x|+\ln C,$$

即

$$\ln u=Cx,$$

故

$$u=\mathrm{e}^{Cx},\ \frac{y}{x}=\mathrm{e}^{Cx}$$

将初始条件$y|_{x=1}=1$代入通解，得 $1=\mathrm{e}^{C}$，即 $C=0$.
所以满足初始条件的特解为

$$y=x.$$

7.2.3 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

的微分方程，称为**一阶线性微分方程**.

若 $Q(x)\equiv 0$，则称方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

为**一阶线性齐次微分方程**.

若 $Q(x)\neq 0$，则称方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

为**一阶线性非齐次微分方程**.

不难看出，一阶段性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

是可分离变量方程. 分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$

所以方程的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

注：这也可以作为一阶线性齐次微分方程的通解公式.

下面我们利用常数变易法来求一阶线性非齐次微分方程的通解.

常数变易法，是将齐次线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$通解中的常数C换成x的未知函数$C(x)$，将

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

代入非齐次线性方程求得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

化简得

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C,$$

于是非齐次线性方程的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right), \tag{1}$$

或

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

非齐次线性方程的通解等于对应的齐次线性方程通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

注：上述解法中所用的方法，将常数C变为待定函数$C(x)$，再通过确定$C(x)$而求得方程解的方法，称为**常数变易法**.

例 7 求方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$的通解.

解 方法一

这是一个非齐次线性方程. 先求对应的齐次线性方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$$

分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$

两端积分，得

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+C_1,$$

齐次数性方程的通解为

$$y=C_2(x+1)^2(\text{其中 } C_2=\pm e^{C_1}).$$

用常数变易法，把C_2换成$C_2(x)$，即令$y=C_2(x)(x+1)^2$，代入所给非齐次线性方程，得